
3 3433 06910414 3

Anleitung

zur

höheren Mathematik.

Von

J. J. Littrow,

Director der k. k. Sternwarte und Professor der Astronomie an der Universität zu Wien, Ritter des kais. russischen St. Anna-Ordens der zweyten Classe, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften in London, Petersburg, Palermo, Kasan ꝛc.

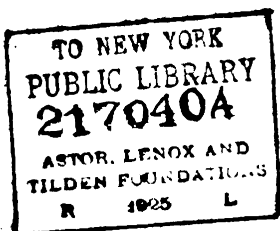


Mit vier Kupfertafeln.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1836.



Vorrede.

Die nächste Veranlassung zu der gegenwärtigen Schrift gaben die Vorlesungen über höhere Analysis, welche ich an unserer Universität zu geben den Auftrag erhielt. Dazu bedurfte es vor allem eines *angemessenen* Lehrbuchs, da der sogenannte freye Vortrag, er mag nun bloß mündlich gegeben, oder so recht eigentlich dictirt werden, nach meiner Ansicht in allen, vorzüglich aber in den mathematischen Collegien, welche Vortheile er auch manchem *Lehrer* gewähren mag, für den *Schüler* als durchaus gemeinschädlich zurückgewiesen werden soll.

Ich suchte lange genug, um die angemessenste aller Schriften jener Art zu finden, und so groß auch die Anzahl war, unter der gewählt werden sollte: ich habe sie nicht gefunden. Nicht als ob nicht mehrere derselben, für *ihren* bestimmten Kreis, sehr gut, ja wahrhaft vortrefflich gewesen wären: aber sie waren für *unsere* Bedürfnisse, und für die in mancher Beziehung besondere Stellung *unserer* Zuhörer nicht geeignet.

Ich habe demnach den Versuch gewagt, diesen Gegenstand noch einmal, und so darzustellen, wie ich dieß unseren Bedürf-

nissen am angemessensten erachtete. Ob ich diese Absicht erreicht habe, werden diejenigen beurtheilen, welche den Gegenstand selbst sowohl, als auch unsere Verhältnisse zu ihm, und welche den Grad der Vorbildung unserer Zuhörer der höheren Analysis aus eigener Erfahrung näher kennen.

Mein Hauptzweck dabey war, dem Lehrer oder dem Zuhörer in der kürzesten Zeit und mit der wenigsten Mühe, ohne der Strenge der Wissenschaft wesentlich zu vergeben, die wichtigsten Wahrheiten derselben und die vorzüglichsten Mittel zuzuführen, um das Ganze zu übersehen, und um sich so bald als möglich den Genuß des Selbstfindens zu verschaffen. Diesem gemäß wurde schon auf dem zweyten Blatte der Differentialrechnung (§. 25) das einfachste Princip dieses Calculs so aufgestellt, wie es von Leibnitz und im Grunde auch von Euler gegeben wurde, und auf welches man, so viel man sich auch dagegen sträuben mag, in späteren, mehr verwickelten Untersuchungen, besonders bey den geometrischen Anwendungen und in der Integralrechnung, doch immer wieder zurück kommen muß.

Da in unseren Vorträgen der Elementar-Mathematik von den krummen Linien nur eben die Kegelschnitte erwähnt, die analytische Geometrie aber, und selbst die sphärische Trigonometrie, gänzlich zur Seite gestellt werden, so suchte ich das Vorzüglichste von diesen drey Gegenständen in der Einleitung, nur kurz und ohne Beweise, gleichsam als Bindungs- oder Übergangsmittel von der elementaren zu der höheren Analysis, wieder in-

das Gedächtniß des Lesers zurück zu führen. Wer dieselben bereits kennt, wird sie, der Übersicht und der in der Schrift selbst folgenden Citate wegen, nicht unangemessen hier zusammen gestellt sehen, und der andere wird sich, durch die dieser Einleitung folgende Schrift selbst, bald in die Nothwendigkeit versetzt sehen, die hier der Kürze wegen übergangenen Beweise aus seinem Eigenen, oder aus anderen Werken, an denen kein Mangel ist, nachzutragen. Zur näheren Kenntniß dieser Werke aber ist dem Ganzen ein Verzeichniß der vorzüglichsten älteren und neueren mathematischen Schriften beygegeben worden, das für diejenigen, welche Kraft und Lust in sich fühlen, über die Gränzen eines Compendiums heraus zu gehen, und die Wissenschaft näher kennen zu lernen, wahrscheinlich auf längere Zeit genügen wird. Es war anfangs meine Absicht, dieses Verzeichniß in mehrere Abschnitte zu theilen, und die eigentlichen Lehrbücher (Biot, Bohnenberger, Euler, Kästner ꝛc.); die durch ihre ersten Erfindungen ausgezeichneten Schriften (Lagrange, Monge, d'Alembert, Cauchy ꝛc.); die Geschichte der Wissenschaft (Bossut, Kästner ꝛc.), und die bibliographischen Werke (Murhard, Müller, Weidler ꝛc.) gesondert aufzuführen, und jedem dieser Werke Bemerkungen über Inhalt, Absicht und Gehalt derselben beyzufügen. Allein da dieß zum Theil schon durch die Aufschrift des Werkes gesagt wird, und da überdieß jeder, dem es um wahre Ausbildung zu thun ist, die meisten dieser Schriften aus eigener Ansicht kennen lernen muß, so bin ich von dem Unternehmen abgestanden, das ohnehin, gehörig ausgeführt, seine besonderen Schwierigkeiten haben, und selbst dann nicht leicht allen Lesern genügen wird. Auch soll bey einer zum mündlichen Vortrage bestimmten

Schrift nur das eigentlich Nothwendige gesagt, und das Übrige, wie Zeit und Umstände es herauf führen, diesem Vortrage selbst überlassen bleiben.

Wien, im September 1835.

Der Verfasser.

Inhalt.

Sammlung der vorzüglichsten Integralformeln.

Einleitung.

Da das folgende Werk sich öfter auf die ersten Gründe der analytischen Geometrie bezieht, und da die in ihm enthaltenen Theoreme häufig auf die vorzüglichsten krummen Linien, als auf einzelne Beyspiele, angewendet werden, so wurde es für zweckmäßig erachtet, diese beyden Gegenstände, zur leichtern Übersicht und bloß in ihren Resultaten, hier kurz zusammen zu stellen.

Punkte und gerade Linien in der Ebene.

§. 1. (Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene). Um die Lage eines Punktes in einer gegebenen Ebene zu bestimmen, nimmt man in dieser Ebene zwey feste, ihrer Lage nach gegebene, auf einander senkrecht stehende gerade Linien XAX′ und YAY′ (Fig. 1) an, und bestimmt dann den Ort des Punktes M durch seine senkrechten Abstände $MQ = PA = x$ und $MP = QA = y$ von jenen beyden Linien. Man nennt x die Abscisse, y die Ordinate und beyde zusammen die Coordinaten des Punktes M, und jene zwei feste Gerade heißen die Axen der Coordinaten, so wie A der Anfangspunkt derselben. Demnach ist also x die Entfernung des Punktes M von der Coordinaten-Axe der y, und y ist die Entfernung desselben Punktes von der Axe der x. Nimmt man den Quadranten XAY als den ersten an, in welchem die Coordinaten x und y beyde positiv sind, so ist offenbar in dem zweyten Quadranten YAX′ die Abscisse x negativ, im dritten X′AY′ ist x und y, und im vierten Y′AX endlich ist blos die Ordinate y negativ.

§. 2. (Gleichungen einer geraden Linie und eines Punktes). Jede Gleichung zwischen x, y und constanten Größen gehört für eine stetige Folge von Punkten, d. h. für eine Linie. Ist diese Gleichung für x oder y des ersten, zweyten, dritten Grades u. f., so wird auch

die durch sie ausgedrückte Linie eine Linie des ersten, zweyten, dritten Grades u. s. genannt. — Gleichungen des ersten Grades gehören für gerade Linien, und die allgemeine Form dieser Gleichungen ist

$$y = ax + b.$$

Sey CBM diese Gerade. Für $x = o$ ist $y = b$, und für $y = o$ ist $x = -\frac{b}{a}$, also ist $AC = \frac{b}{a}$ und $AB = b$ die Entfernung der Punkte C und B, in welchen die Gerade von der Axe der x und der y geschnitten wird, so wie auch a die Tangente des Winkels XCM ist, unter welchen die Gerade die Axe der x schneidet.

Ist $b = o$, so geht die Gerade durch den Anfang A der Coordinaten. Die Gleichung $x = A$ gehört für eine der Axe der y, und die Gleichung $y = B$ für eine der Axe der x parallele Gerade. Die beyden Gleichungen

$$x = A \quad \text{und} \quad y = B$$

zusammen genommen aber, gehören für einen Punkt, der von der Axe der x um B, und von der Axe der y um die Größe A absteht. Demnach gehören auch die beyden Gleichungen $x = A$ und $y = o$ für einen Punkt in der Axe der x, und die Gleichungen $x = o$ und $y = B$ für einen Punkt in der Axe der y, und die beyden Gleichungen $x = o$ und $y = o$ endlich für den Anfangspunkt der Coordinaten.

§. 3. **(Verbindung von zwey geraden Linien).** Betrachten wir zwey gerade Linien, die wir durch (1) und (2) ausdrücken, und deren Gleichungen

$$y = ax + b \ldots (1) \quad \text{und}$$
$$y = a'x + b' \ldots (2)$$

seyn sollen. Diese zwey Gerade werden sich im Allgemeinen in einem Punkte schneiden, und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes werden seyn

$$x = \frac{b' - b}{a' - a} \quad \text{und} \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

I. Nennt man (1 . 2) den Winkel, welchen diese beyden Geraden unter sich bilden, so hat man

$$\text{tang } (1 . 2) = \frac{a' - a}{1 + a'a}.$$

Nennt man eben so (1 . x) und (1 . y) den Winkel, welchen die Gerade (1) mit der Axe der x und mit der Axe der y bildet, so hat man

$$\cos.(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\cos.(1.y) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

und eben so für die Gerade (2)

$$\cos.(2.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}},$$

$$\cos.(2.y) = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}},$$

und zwischen diesen fünf Winkeln besteht die Relation

$$\cos.(1.2) = \cos.(1.x)\cos.(2.x) + \cos.(1.y)\cos.(2.y)$$

II. Aus diesen Ausdrücken folgt zugleich, daß die beyden Geraden (1) und (2) unter sich parallel sind, wenn man hat $a = a'$, und daß sie auf einander senkrecht stehen, wenn man hat $1 + aa' = 0$ oder $a' = -\frac{1}{a}$.

III. Daher ist auch $y - y' = a(x - x')$ die Gleichung einer Geraden, die mit (1) parallel ist, und überdieß durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x' und y' sind. Eben so ist $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ die Gleichung einer durch denselben Punkt x', y' gehenden, und auf der Geraden (1) senkrechten Linie. Nennt man x'', y'' die Coordinaten des Durchschnittspunktes der zwey letzten Linien, so hat man

$$x'' = x' + \frac{(y' - ax' - b)a}{1 + a^2} \quad \text{und} \quad y'' = y' - \frac{(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

und die Distanz der zwey erwähnten Punkte, deren Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$ sind, ist gleich

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \quad \text{oder gleich} \quad \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

IV. Endlich ist auch die Gleichung einer Geraden, welche durch die zwey Punkte geht, deren Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$ sind,

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

so wie die Distanz dieser zwey Punkte wieder gleich ist

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

§. 4. (Verwandlung der Coordinaten in einer Ebene). Oft ist es vortheilhaft und selbst nothwendig, den beyden Coordinaten-

axen eine andere Lage in der Ebene zu geben. Seyen, wie zuvor, AP $=$ x und PM $=$ y (Fig. 2) die Coordinaten des Punkts M gegen die Coordinatenaxen AX und AY. Man nehme den neuen Anfangspunkt A′ gegen dieselben Axen so, daß seine Coordinaten AB $=$ a und BA′ $=$ b sind, ziehe A′P′ mit AP parallel, und nehme den Winkel P′A′P″ $= \alpha$. Die auf die neuen Axen sich beziehenden Coordinaten des Punktes M sollen A′P″ $=$ x′ und P″M $=$ y′ seyn, wo MP″ auf A′P″ senkrecht ist. Nennt man noch m den Winkel P″A′M und nimmt man die Distanz A′M gleich der Einheit an, so hat man sofort die vier Gleichungen

$$A'P' = x - a = \cos.(\alpha + m),$$
$$P'M = y - b = \sin.(\alpha + m) \quad \text{und}$$
$$A'P'' = x' = \cos. m,$$
$$P''M = y' = \sin. m;$$

woraus man leicht die folgenden Ausdrücke findet, die zur Verwandlung des einen dieser zwey Coordinatensysteme in das andere dienen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (y - b)\sin.\alpha + (x - a)\cos.\alpha \\ y' &= (y - b)\cos.\alpha - (x - a)\sin.\alpha \end{aligned}\right\} \text{und}$$
$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos.\alpha - y'\sin.\alpha \\ y &= b + x'\sin.\alpha + y'\cos.\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Da durch die Substitution dieser Ausdrücke in einer Gleichung zwischen xy oder zwischen x′y′ der Grad der Gleichung nicht geändert wird, so können die Linien mit Recht nach ihren Gleichungen in Klassen eingetheilt werden.

§. 5. (**Polarcoordinaten in der Ebene**). Der Punkt M (Fig. 3) der Ebene, in welcher die Coordinaten AP $=$ x und PM $=$ y liegen, läßt sich auch dadurch bestimmen, daß man die Distanz AM $=$ r dieses Punktes von dem Anfangspunkte A der Coordinaten, und den Winkel MAB $=$ v dieser Distanz mit einer ihrer Lage nach bestimmten Geraden AB in dieser Ebene angibt. Nennt man m den Winkel BAX dieser Geraden mit der Axe der x, so hat man XAM $=$ v $-$ m, und daher

$$x = r\cos.(v - m), \quad y = r\sin.(v - m) \quad \text{und}$$
$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Vermittelst dieser Gleichungen läßt sich jede Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y in eine andere zwischen

den Polarcoordinaten r und v verwandeln, wo dann A der Pol der letzten Coordinaten heißt. Für die umgekehrte Verwandlung aber hat man

$$\cos.(v-m) = \frac{x}{r}, \quad \sin.(v-m) = \frac{y}{r}, \quad \tang.(v-m) = \frac{y}{x},$$

$$\text{also auch} \quad v - m = \text{arc. tang.} \frac{y}{x} \quad \text{u. s. w.}$$

Nimmt man, der größeren Einfachheit wegen, an, daß die fixe Gerade AB mit der Abscissenaxe AX zusammenfällt, so ist $m = 0$, und man hat

$$\cos. v = \frac{x}{r}, \quad \sin. v = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \tang. v = \frac{y}{x}.$$

Punkte, gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. 6. (**Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume**). Um die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, nimmt man in diesem Raume drey feste, ihrer Lage nach gegebene, und auf einander gegenseitig senkrecht stehende Ebenen an. Sey XAZ (Fig. 4) ein rechter Winkel in der Ebene des Papiers, und AY eine auf diese Ebene, also auch auf die Linien AX und AZ, senkrechte Gerade, wo AY auf der Rückseite, oder auf der von dem Leser abgewendeten Seite des Blatts steht. Verlängert man die drey unten sich senkrechten Linien XA, YA, ZA auf der andern Seite von A, und legt durch je zwey derselben eine Ebene, so sind XYX'Y', XZX'Z' und YZY'Z' die erwähnten drey normalen Ebenen, deren Lage im Raume gegeben ist. Kennt man dann die senkrechten Abstände eines Punktes M von diesen drey Ebenen, so wird auch die Lage dieses Punktes im Raume bestimmt seyn. — Sey $MQ = z$ dieser Abstand des Punktes M von der Ebene der XY, sey eben so $Ma = y$ dieser Abstand von der Ebene der XZ, und endlich $Mb = x$ der Abstand von der Ebene der YZ. Ergänzt man das rechtwinklige Parallelepipedum, dessen Seiten MQ, Ma und Mb sind, so ist auch

$$AB = x, \quad BQ = y \quad \text{und} \quad QM = z;$$

und man nennt diese Größen x, y, z die Coordinaten des Punktes M, so wie man A den Anfang der Coordinaten, die Linien XAX', YAY', ZAZ' die Coordinatenaxen, und jene drey normalen Ebenen die coordinirten Ebenen zu nennen pflegt.

Nimmt man unter den acht Octanten, in welche der unbegränzte

Raum durch die drey coordinirten Ebenen getheilt wird, den zwischen den Linien AX, AY und AZ enthaltenen, als den ersten oder als denjenigen an, in welchem die drey Coordinaten xyz sämmtlich positiv sind, so werden dadurch die Zeichen dieser Coordinaten in den übrigen Octanten auf folgende Weise bestimmt:

Octant	I	... XYZ ...	$+x+y+z$,
»	II	... X′YZ ...	$-x+y+z$,
»	III	... X′Y′Z ...	$-x-y+z$,
»	IV	... XY′Z ...	$+x-y+z$,
»	V	... XYZ′ ...	$+x+y-z$,
»	VI	... X′YZ′ ...	$-x+y-z$,
»	VII	... X′Y′Z′ ...	$-x-y-z$ und
»	VIII	... XY′Z′ ...	$+x-y-z$.

§. 7. (Gleichungen des Punktes und der Linie). So wie in einer gegebenen Ebene die Lage eines Punktes durch zwey, die Linie aber nur durch eine Gleichung bestimmt wurde, so wird im Raume die Lage eines Punktes durch drey, die Linie durch zwey und die Ebene durch eine einzige Gleichung bestimmt. Die Linie wird nämlich als der Durchschnitt von zwey, und der Punkt als der gemeinschaftliche Durchschnitt von drey Ebenen betrachtet. Diese für Punkte und Linien gehörenden Gleichungen werden am einfachsten, wenn man die Ebenen, durch deren Durchschnitt sie erzeugt werden, auf eine der drey coordinirten Ebenen senkrecht annimmt.

I. Diesem gemäß gehört die Gleichung $x=a$ für eine der yz parallele und von ihr um die Größe a entfernte Ebene, und überhaupt gehört die Gleichung

$x=a$	für eine der	yz	parallele	Ebene,
$y=b$	» » »	xz	»	»
$z=c$	» » »	xy	»	»

also auch

$x=0$	für die coordinirte Ebene der	yz,
$y=0$	» » » » »	xz,
$z=0$	» » » » »	xy.

II. Die beyden ersten Gleichungen $x=a$ und $y=b$ zusammen genommen aber, gehören für eine der Axe der z parallelen Linie, deren Abstand von yz gleich a und von xz gleich b ist; und überhaupt gehören die Gleichungs-Paare

$x = a$ und $y = b$ für eine der Axe der z parallele Linie,
$x = a$ » $z = c$ » » » » » y » »
$y = b$ » $z = c$ » » » » » x » »
also auch $x = o$ und $y = o$ für die Axe der z
$x = o$ » $z = o$ » » » » y
$y = o$ » $z = o$ » » » » x.

Die drey Gleichungen $x = a$, $y = b$ und $z = c$ zusammen genommen endlich gehören für einen Punkt, dessen Entfernung von der Ebene der yz, xz und xy in derselben Ordnung gleich a, b und c ist.

III. Eben so gehört die Gleichung

$$y = ax + b$$

für eine auf der coordinirten Ebene der xy senkrechte Ebene, deren Durchschnitt in dieser Ebene mit der Axe der x den Winkel bildet, dessen Tangente gleich a ist.

Die beyden Gleichungen aber

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad z = c$$

zusammen genommen gehören für eine Linie, die in einer der xy parallelen und von xy um die Größe c entfernten Ebene liegt, oder diese Linie ist der Durchschnitt der beyden Ebenen $y = ax + b$ und $z = c$, von welchen die erste auf xy senkrecht, und die zweyte mit xy parallel ist.

Eben so gehören die beyden Gleichungen

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad z = a'x + b'$$

zusammen genommen für eine gerade Linie überhaupt, oder für den Durchschnitt von zwey Ebenen, von denen die eine auf xy und die andere auf xz senkrecht steht. Ist $b = b' = o$, so geht diese Linie durch den Anfang der Coordinaten.

§. 8. (**Gleichung der Ebene**). Die allgemeine Gleichung einer Ebene hat die Form

$$Ax + By + Cz + D = o.$$

Für sie ist die Entfernung des Anfangspunktes der Coordinaten von demjenigen Punkte, in welchem diese Ebene

die Axe der x schneidet, gleich $-\frac{D}{A}$,
» » » y » » $-\frac{D}{B}$,
» » » z » » $-\frac{D}{C}$,

und wenn die Ebene durch den Anfangspunkt geht, so ist $D = 0$. Die geraden Linien, in welchen jene Ebene die drey coordinirten Ebenen schneidet, heißen die Knotenlinien jener Ebenen. Man hat daher für die Knotenlinie der Ebene

in xy die Gleichungen $Ax + By + D = 0$ und $z = 0$,
» xz » » $Ax + Cz + D = 0$ » $y = 0$,
» yz » » $By + Cz + D = 0$ » $x = 0$.

§. 9. (Verbindung von zwey geraden Linien). Betrachten wir die Verbindung von zwey geraden Linien im Raume, die wir der Kürze wegen durch (1) und (2) bezeichnen wollen, und deren Gleichungen, nach dem Vorhergehenden, von der Gestalt sind:

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \ldots (1) \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \ldots (2).$$

Diese beyden Linien werden sich nur dann begegnen oder einander schneiden, wenn die Bedingungsgleichung

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}$$

Statt hat.

I. Sey (1.2) der Winkel, welchen diese beyden Linien unter sich bilden, und sey eben so $(1.x)$, $(1.y)$ und $(1.z)$ der Winkel der Linie (1) mit der Axe der x, y und z. Setzt man der Kürze wegen

$$m^2 = 1 + a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad m'^2 = 1 + a'^2 + b'^2,$$

so hat man

$$\cos.(1.2) = \frac{1 + aa' + bb'}{mm'} \quad \text{und}$$

$$\cos.(1.x) = \frac{a}{m}, \quad \text{so wie} \quad \cos.(2.x) = \frac{a'}{m'},$$

$$\cos.(1.y) = \frac{b}{m} \quad » \quad \cos.(2.y) = \frac{b'}{m'},$$

$$\cos.(1.z) = \frac{1}{m} \quad » \quad \cos.(2.z) = \frac{1}{m'}.$$

Zwischen diesen Winkeln haben überdieß folgende Relationen Statt:

$$\cos.(1.2) = \cos.(1.x)\cos.(2.x) + \cos.(1.y)\cos.(2.y) + \cos.(1.z)\cos.(2.z)$$

und $\cos.^2(1.x) + \cos.^2(1.y) + \cos.^2(1.z) = 1$,
$\cos.^2(2.x) + \cos.^2(2.y) + \cos.^2(2.z) = 1$.

II. Daraus folgt, daß die beyden Linien (1) und (2) parallel sind, wenn man hat $a = a'$ und $b = b'$; und daß sie auf einander senkrecht sind, wenn man hat $1 + aa' + bb' = 0$. Auch lassen sich die Gleichungen der Linie (1) so darstellen:

$$x = z \frac{\cos.(1.x)}{\cos.(1.z)} + \alpha,$$

$$y = z \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.z)} + \beta.$$

III. Die Linie, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind, und welche überdieß mit der Linie (1) parallel ist, hat zu ihren Gleichungen

$$x - x' = a(z - z') \quad \text{und} \quad y - y' = b(z - z').$$

Diejenige Linie aber, welche durch die zwey gegebenen Punkte geht, deren Coordinaten $x'y'z'$ und $x''y''z''$ sind, hat zu ihren Gleichungen

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z') \quad \text{und}$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z'),$$

und die Entfernung der beyden gegebenen Punkte ist gleich

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

IV. Die Linie, welche durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf der Geraden (1) steht, hat zu ihren Gleichungen

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \quad \text{und}$$

$$(x - x')(y' - bz' - \beta) - (y - y')(x' - az' - \alpha)$$
$$+ (z - z')[b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)] = 0.$$

Sind dann X, Y, Z die Coordinaten des Durchschnittspunktes beyder Geraden, so hat man

$$Z = \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$Y = bZ + \beta \quad \text{und} \quad X = aZ + \alpha.$$

§. 10. (**Verbindung zweyer Ebenen**). Betrachten wir die gegenseitige Lage zweyer Ebenen, die wir durch (I) und (II) bezeichnen wollen, und deren Gleichungen folgende Gestalt haben:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots (I)$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \ldots (II).$$

Nennt man (I. II) den Winkel, unter welchem diese beyden Ebenen gegen einander geneigt sind, so hat man

$$\cos.(I.II) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Sind daher diese Ebenen zu einander parallel, so hat man

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \text{ und } \frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \text{ also auch } \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'},$$

und sind sie auf einander senkrecht, so ist

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

I. Nennt man eben so (I. xy) den Winkel der Ebene (I) mit der coordinirten Ebene der xy und (I. x) den Winkel der Ebene (I) mit der Axe der x, und bezeichnet man durch (I. xz), (I. yz) und durch (I. y), (I. z) die ähnlichen Winkel für die Ebenen xz, yz und für die Axen der y und z, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$M^2 = A^2 + B^2 + C^2 \text{ setzt:}$$

$$\cos.(I.xy) = \frac{C}{M} \text{ und } \sin.(I.x) = \frac{A}{M},$$
$$\cos.(I.xz) = \frac{B}{M} \quad \text{»} \quad \sin.(I.y) = \frac{B}{M},$$
$$\cos.(I.yz) = \frac{A}{M} \quad \text{»} \quad \sin.(I.z) = \frac{C}{M},$$

und zwischen diesen Winkeln haben folgende Relationen Statt:

$$\cos.(I.II) = \cos.(I.xy)\cos.(II.xy) + \cos.(I.xz)\cos.(II.xz) + \cos.(I.yz)\cos.(II.yz)$$

$$\text{und } \cos.^2(I.xy) + \cos.^2(I.xz) + \cos.^2(I.yz) = 1.$$

II. Nennt man R das Loth vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebene (I), so hat man

$$R = -\frac{D}{M} = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

daher man die Gleichung der Ebene (I) auch so ausdrücken kann:

$$x\cos.(I.yz) + y\cos.(I.xz) + z\cos.(I.xy) = R \text{ oder}$$
$$x\sin.(I.x) + y\sin.(I.y) + z\sin.(I.z) = R.$$

III. Bezeichnet man durch ξ, v, z die Knotenlinien der Ebene (I) in der coordinirten Ebene der yz, xz, xy, so hat man für die Winkel

dieser Knotenlinien unter sich und mit den Axen der xyz folgende Ausdrücke:

$$\text{tang.}(\xi v) = \frac{CM}{AB} \quad \text{und} \quad \text{tang.}(x\zeta) = -\frac{A}{B},$$
$$\text{tang.}(\xi\zeta) = \frac{BM}{AC} \quad \text{»} \quad \text{tang.}(y\xi) = -\frac{B}{C},$$
$$\text{tang.}(v\zeta) = \frac{AM}{BC} \quad \text{»} \quad \text{tang.}(vz) = +\frac{C}{A}.$$

Nennt man also den Winkel (I.xy) = n und (xζ) = k, so ist

$$\text{tang. k} = -\frac{A}{B} \qquad \text{oder} \quad \text{tang. n sin. k} = -\frac{A}{C},$$
$$\text{cos. n} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \text{»} \quad \text{tang. n cos. k} = +\frac{B}{C}.$$

§. 11. (Verbindung der Ebenen mit Linien). Sey analog mit den vorigen Bezeichnungen (I, 1) der Winkel der Ebene (I) mit der Geraden (1), so hat man

$$\sin.(I.1) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,\sqrt{1+a^2+b^2}}, \text{ oder auch}$$

$$\sin.(I.1) = \cos.(I.xy)\cos.(1.z) + \cos.(I.xz)\cos.(1.y) + \cos.(I.yz)\cos.(1.x).$$

Soll daher die Gerade (1) auf der Ebene (I) senkrecht stehen, so hat man

$$a = \frac{A}{C} \quad \text{und} \quad b = \frac{B}{C};$$

oder die Gleichung einer auf der Geraden (1) senkrechten Ebene ist

$$ax + by + z + D = 0,$$

wo die Größe D willkürlich ist; und eben sind die Gleichungen einer auf der Ebene (I) senkrechten Geraden

$$x = \frac{A}{C}z + \alpha \quad \text{und} \quad y = \frac{B}{C}z + \beta,$$

wo die Größen α und β willkürlich sind.

I. Die Gleichungen der Geraden, die durch den Punkt x'y'z' geht, und senkrecht auf der Ebene (I) steht, sind:

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z') \quad \text{und} \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Eben so ist die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt x'y'z' geht, und mit den beyden Geraden (1) und (2) parallel ist,

$$(x-x')(b'-b)+(y-y')(a-a')+(z-z')(a'b-ab')=0.$$

Die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf der Geraden (1) steht, ist

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $x'y'z'$ und durch die Linie (1) geht, ist

$$(x-x')(y'-bz'-\beta)-(y-y')(x'-az'-\alpha)$$
$$+(z-z')[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)]=0.$$

Die Gleichung der Ebene endlich, die durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf einer Geraden steht, die mit den Axen der xyz in derselben Ordnung die Winkel $\alpha\beta\gamma$ bildet, ist

$$(x-x')\cos.\alpha+(y-y')\cos.\beta+(z-z')\cos.\gamma=0.$$

§. 12. (**Verwandlung der Coordinaten im Raume**). Sey eine Gleichung zwischen den drey rechtwinkligen Coordinaten xyz gegeben. Will man sie auf ein anderes Coordinatensystem $x'y'z'$ beziehen, in welchem die neue Axe der x zwar noch in der Ebene der xy liegt, aber mit der Axe der x den Winkel ψ bildet, so hat man

$$x=x'\cos.\psi+y'\sin.\psi \quad \text{oder} \quad x'=x\cos.\psi-y\sin.\psi,$$
$$y=y'\cos.\psi-x'\sin.\psi \quad \text{»} \quad y'=x\sin.\psi+y\cos.\psi,$$
$$z=z' \quad \text{»} \quad z'=z.$$

Geht man von diesem zweyten Systeme zu einem dritten über, in welchem die neuen Coordinaten durch $x''y''z''$ bezeichnet werden, so daß die neue Axe der x'' mit der Axe der x' zusammen fällt, die Ebene der $x''y''$ aber mit der vorhergehenden Ebene der xy den Neigungswinkel θ bildet, so hat man

$$x'=x'' \quad \text{oder} \quad x''=x',$$
$$y'=y''\cos.\theta+z''\sin.\theta \quad \text{»} \quad y''=y'\cos.\theta-z'\sin.\theta,$$
$$z'=z''\cos.\theta-y''\sin.\theta \quad \text{»} \quad z''=y'\sin.\theta+z'\cos.\theta.$$

Steigt man endlich noch von diesem dritten Systeme zu einem vierten auf, dessen Coordinaten $x'''y'''z'''$ sind, so daß wohl die Ebenen der $x''y''$ und $x'''y'''$ dieselben bleiben, aber daß die neue Axe der x'' mit der vorhergehenden Axe der x'' den Winkel φ bildet, so hat man

$$x''=x'''\cos.\varphi-y'''\sin.\varphi \quad \text{oder} \quad x'''=y''\sin.\varphi+x''\cos.\varphi,$$
$$y''=y'''\cos.\varphi+x'''\sin.\varphi \quad \text{»} \quad y'''=y''\cos.\varphi-x''\sin.\varphi,$$
$$z''=z''' \quad \text{»} \quad z'''=z''.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
A &= \cos.\theta \sin.\psi \sin.\varphi + \cos.\psi \cos.\varphi,\\
A' &= \cos.\theta \sin.\psi \cos.\varphi - \cos.\psi \sin.\varphi,\\
A'' &= \sin.\theta \sin.\psi;\\
B &= \cos.\theta \cos.\psi \sin.\varphi - \sin.\psi \cos.\varphi,\\
B' &= \cos.\theta \cos.\psi \cos.\varphi + \sin.\psi \sin.\varphi,\\
B'' &= \sin.\theta \cos.\psi;\\
C &= -\sin.\theta \sin.\varphi,\\
C' &= -\sin.\theta \cos.\varphi,\\
C'' &= \cos.\theta.
\end{aligned}$$

Substituirt man dann die gefundenen Ausdrücke von $x'y'z'$ und $x''y''z''$ in den zuerst gegebenen Werthen von xyz, so findet man

$$\left.\begin{aligned}
x &= Ax''' + A'y''' + A''z'''\\
y &= Bx''' + B'y''' + B''z'''\\
z &= Cx''' + C'y''' + C''z'''
\end{aligned}\right\}$$

und eben so umgekehrt

$$\left.\begin{aligned}
x''' &= Ax + By + Cz\\
y''' &= A'x + B'y + C'z\\
z''' &= A''x + B''y + C''z
\end{aligned}\right\}.$$

Man muß aber bemerken, daß zwischen diesen Coordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2$$

besteht, und daß daher zwischen den Coefficienten $AA'\ldots$ folgende zwölf Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$\left.\begin{aligned}
A^2 + A'^2 + A''^2 &= 1\\
B^2 + B'^2 + B''^2 &= 1\\
C^2 + C'^2 + C''^2 &= 1
\end{aligned}\right\}
\quad
\left.\begin{aligned}
A^2 + B^2 + C^2 &= 1\\
A'^2 + B'^2 + C'^2 &= 1\\
A''^2 + B''^2 + C''^2 &= 1
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
AB + A'B' + A''B'' &= 0\\
AC + A'C' + A''C'' &= 0\\
BC + B'C' + B''C'' &= 0
\end{aligned}\right\}
\quad
\left.\begin{aligned}
AA' + BB' + CC' &= 0\\
AA'' + BB'' + CC'' &= 0\\
A'A'' + B'B'' + C'C'' &= 0
\end{aligned}\right\}$$

§. 13. (Polarcoordinaten im Raume). Statt, wie bisher, die Lage des Punktes M (Fig. 4) im Raume durch seine senkrechten Abstände von den drey coordinirten Ebenen oder durch die rechtwinkligen Coordinaten $AB = x$, $BQ = y$, $QM = z$ zu bestimmen, kann man diese Lage auch durch die Entfernung $AM = r$ dieses Punktes von dem Anfange der Coordinaten und durch die Winkel angeben, welche diese

Entfernung oder ihre Projection AQ, Aa und Ab in den coordinirten Ebenen der xy, xz und yz mit den drey Coordinatenaxen AX, AY und AZ bildet.

I. Nennt man nämlich α, β und γ die Winkel, welche die Distanz r mit den Coordinatenaxen der x, y und z macht, so hat man

$$x = r\cos.\alpha,\quad y = r\cos.\beta,\quad z = r\cos.\gamma,$$

und zwischen den drey Größen α, β, γ hat die Bedingungsgleichung Statt:

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1,$$

wo jeder der drey Winkel α, β, γ nie größer als 180° werden kann.

II. Ist aber m der Winkel der Projection von r in der Ebene xy mit x, und ist n der Winkel der r mit der Axe der z, das heißt, ist QAX = m und MAZ = n, so hat man

$$x = r\cos.m\sin.n,\quad y = r\sin.m\sin.n,\quad z = r\cos.n,$$

wo der Winkel m von der festen Geraden AX immer nach derselben Richtung von 0° bis 360° gezählt wird, während der Winkel n nie größer, als 180°, genommen werden kann, um alle Punkte des Raumes um den Anfangspunkt A zu umfassen.

III. Ist endlich λ der Winkel der Distanz AM = r mit der Axe der x, und μ der Winkel der Projection BM oder Ab dieser Distanz in der Ebene der yz mit der Axe der y, oder ist λ = MAX und μ = MBQ = bAd, so hat man

$$x = r\cos.\lambda,\quad y = r\sin.\lambda\cos.\mu,\quad z = r\sin.\lambda\sin.\mu,$$

und hier wird der Winkel λ von der fixen Geraden AX immer in derselben Richtung von 0 bis 360° gezählt, während wieder μ nie größer, als 180° seyn kann. Man sieht, daß der Winkel $\lambda = \alpha$ und $n = \gamma$ ist.

Algebraische krumme Linien.

§. 14. (**Linien der zweyten Ordnung**). In der nun folgenden Zusammenstellung werden nur die vorzüglichsten Curven, um sie später als Beyspiele anzuwenden, nach ihren Gleichungen, von einfachen Zeichnungen begleitet, kurz angeführt.

Die Curven der zweyten Ordnung, oder die sogenannten Kegelschnitte, sind sämmtlich in der Gleichung enthalten:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

und diese Gleichung gehört für eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel,

nn die Größe $b^2 - 4ac$ negativ, positiv oder Null ist; für den eis ist $a = c$ und $b = 0$.

In den beyden ersten Fällen, d. h. wenn $b^2 - 4ac$ nicht gleich ull ist, läßt sich diese Gleichung auf die Form bringen:

$$\frac{x^2}{A^2} \pm \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt, ren halbe große und kleine Axe A und B ist, und wo der Anfang der oordinaten in dem Mittelpunkte der Ellipse oder Hyperbel liegt. In m dritten Falle, wo $b^2 = 4ac$ ist, läßt sich jene Gleichung auf die nfache Gestalt

$$y^2 = 2px$$

urückführen, die also für die Parabel gehört, und wo p den halben arameter der Parabel bezeichnet. — Aber auch die erste gegebene Gleihung bietet schon ein Mittel dar, durch die in ihr enthaltenen Coeffiienten a, b ... f diese Halbaxen A und B der Ellipse oder Hyperbel, rner die beyden der x und y parallelen Coordinaten X und Y des Mittelpunktes dieser beyden Curven, und endlich den Winkel ω zu bestimmen, welchen die große Axe $2A$ der Curve mit der Coordinatenaxe er x bildet. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$g = b^2 - 4ac,$$
$$h = bde - ae^2 - cd^2$$
$$k^2 = b^2 + (a - c)^2,$$

o findet man für die gesuchten halben Axen

$$A^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a + c - k)} \quad \text{und} \quad B^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a + c + k)},$$

und für die Coordinaten des Mittelpunktes

$$X = \frac{2ae - bd}{g}, \quad Y = \frac{2cd - be}{g};$$

und endlich für den Winkel ω der großen Axe der Curve mit der Coordinatenaxe der x:

$$\text{tang. } 2\omega = \frac{b}{c - a} \quad \text{oder} \quad \text{tang. } \omega = \frac{b}{c - a + k}.$$

Für die Parabel lassen sich ähnliche Ausdrücke aufstellen. Es erhält man für den halben Parameter derselben

$$p = \frac{2cd - bc}{(a + c)\sqrt{b^2 + 4c^2}},$$

und für den Winkel ω den Ausdruck

$$\text{tang.}\,\omega = -\frac{2c}{b}.$$

Nimmt man den Anfang der Coordinaten x, y in dem Scheitel, d. h. in demjenigen Punkte der Curve, in welchem sie von ihrer großen Axe, die zugleich die Axe der x seyn soll, geschnitten wird, so hat man für die gemeinsame Gleichung dieser drey Curven

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{A},$$

und diese Gleichung gehört für die Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn A positiv, negativ oder unendlich groß ist. Für den Kreis hat man $p = A$, also $y^2 = 2Ax - x^2$, wo A der Halbmesser des Kreises ist. — Man kann noch bemerken, daß die Gleichung der Ellipse, in die der Hyperbel übergeht, wenn man in jener A in $-A$ und B in $B\sqrt{-1}$ verwandelt. Für diese beyden Curven aber ist der halbe Parameter $p = \frac{B^2}{A}$ immer positiv. Nennt man endlich $A\varepsilon$ die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse oder Hyperbel von einem ihrer beyden Brennpunkte, so ist

$$\varepsilon^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \quad \text{und} \quad p = A(1 - \varepsilon^2) \quad \text{für die Ellipse,}$$

und daher auch

$$\varepsilon^2 = \frac{A^2 + B^2}{A^2} \quad \text{und} \quad p = A(\varepsilon^2 - 1) \quad \text{für die Hyperbel.}$$

Um die Gleichung dieser drey Curven in Polarcoordinaten zu erhalten, sey einer der Brennpunkte derselben der Pol, und r die Entfernung dieses Brennpunktes von irgend einem Punkte der Curve. Nennt man dann ν den Winkel, welchen der Radius Vector r mit der großen Axe, von dem dem Pole nächsten Scheitel gezählt, bildet, so ist die gesuchte Gleichung der Linien der zweyten Ordnung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos. \nu},$$

und diese Gleichung gehört für die Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn ε kleiner oder größer, oder so groß als die Einheit ist, in welchem letzten Falle daher die Gleichung der Parabel wird:

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{\cos.^2 \frac{1}{2}\nu}.$$

§. 15. (Linien der dritten und vierten Ordnung). I. Neil's Parabel, oder die kubische Parabel, zum Unterschiede der in §. 14 betrachteten, welche letzte auch die Apollonische Parabel genannt wird. Ihre Gestalt ist in Fig. 5 verzeichnet, und ihre Gleichung ist

$$y^3 = a x^2;$$

wo hier, so wie in allen folgenden Figuren, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt wird, immer $AP = x$, und die darauf senkrechte Gerade $PM = y$, also $AP \ldots$ die coordinirte Axe der x ist. Die Neil'sche Parabel hat zwey unendliche Aeste, die beyde auf der positiven Seite der y liegen, und die sich im Anfangspunkte A der Coordinaten zu einer Spitze vereinigen. Neil und Fermat hat diese Curve zuerst betrachtet, und an ihr mehrere merkwürdige Eigenschaften gefunden.

II. Cissois (Fig. 6). Die Gleichung dieser Curve ist

$$x^3 = y^2 (a - x).$$

Auch sie läuft von einer Spitze im Anfangspunkte A in zwey unendlichen Ästen aus, von welchen aber einer über und der andere unter der Axe der x liegt. Beyde Äste kommen der Geraden mBn, die in der Entfernung $AB = a$ auf der Abscissenaxe senkrecht errichtet wird, als ihrer Asymptote, immer näher, ohne sie je zu erreichen. Der griechische Geometer Diocles hat diese Curve ausgedacht, um durch sie das den Alten wichtige Problem aufzulösen, zwischen zwey gegebenen Größen zwey mittlere stetige Proportionalen zu finden. Ihre Benennung hat sie von κισσος (Epheublatt), dem sie ähnlich seyn soll.

III. Glockenlinie (Fig. 7). Ihre Gleichung ist

$$a y^2 = x (x - b) (x + c),$$

wo $AB = b$ und $AF = c$ ist. Diese Curve besteht aus zwey abgesonderten Theilen, deren einer eine geschlossene, ovale Gestalt, und der andere zwey unendliche Äste hat, die in Form einer Glocke auslaufen.

Nach den Werthen der beyden Größen b und c gehört diese Gleichung zu verschiedenen Gestalten.

Ist $c = o$, so verschwindet der erwähnte ovale Theil, und die Curve hat die Gestalt der Fig. 8.

Ist $b = o$, so ist die Gleichung der Curve $a y^2 - x^3 - c x^2 = o$, und ihre Form sieht man in Fig. 9.

Ist endlich $b = o$ und $c = o$, so ist ihre Gleichung $x^3 = a y^2$, oder sie geht dann in die Neil'sche Parabel über.

IV. Conchois oder Muschellinie (Fig. 10). Man errichte auf der Abscissenaxe AX das Loth $AB = a$, und ziehe aus dem so bestimmten Punkte B die Gerade MBm, welche die Abscissenaxe in dem Punkte O schneidet. Von diesem Durchschnittspunkte O nehme man zu beyden Seiten der Abscissenaxe die Linien $OM = Om = b$, so liegen diese Punkte M, m in den Conchois. Ist dann $ABM = \nu$ und $BM = r$, so hat man

$$a = (r - b) \cos.\nu, \quad y = b \cos.\nu \quad \text{und} \quad r^2 = x^2 + (a + y)^2,$$

woraus man durch Elimination der beyden Größen r und ν erhält

$$x^2 y^2 = (a + y)^2 (b^2 - y^2),$$

die Gleichung der Conchois. Nennt man aber das Loth von M auf AB, oder nennt man $MQ = y'$ und $BQ = x'$, so ist $x = y'$ und $y = x' - a$, also auch die Gleichung der Conchois

$$\frac{y'^2}{x'^2} = \left(\frac{b}{x' - a}\right)^2 - 1.$$

Sie hat vier unendliche Äste, die alle die Abscissenaxe AX zur Asymptote haben. Unter dem festen Punkte B hat sie eine Schleife, so lange b größer als a ist. Für $b = a$ aber verschwindet diese Schleife, und geht bloß in eine Spitze bey B über. Für b kleiner als a endlich verschwindet auch diese Spitze, und die Curve hat dann unter der Axe der x dieselbe Gestalt, wie über derselben. Der griechische Geometer Nikomedes hat sie zur Auflösung des bey der Cissois erwähnten Problemes erfunden, und auch, um einen gegebenen Winkel in drey gleiche Theile zu theilen. Newton gebrauchte sie zur Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades, da sie in Absicht ihrer Construction so einfach ist. Auch hat man sie zu den Verzierungen in der Architektur und zur Messung des Inhalts der Fässer angewendet.

V. Cassini's Curve (Fig. 11). Wenn das Produkt den Entfernungen MF und MF' eines Punktes M von zwey festen Punkten F und F' für alle Lagen des Punktes M constant ist, so liegt dieser Punkt M in der betrachteten Curve. Sey $FF' = 2a$ die Distanz jener festen Punkte, und $MF . MF' = b^2$, so hat man, wenn der Anfangspunkt A in der Mitte zwischen F und F' liegt:

$$FM^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad F'M^2 = (a + x)^2 + y^2,$$

und daher für die Gleichung der Curve

$$b^4 = [(a + x)^2 + y^2] . [(a - x)^2 + y^2] \quad \text{oder}$$

$$x^2 + y^2 + a^2 = \sqrt{b^4 + 4a^2x^2}.$$

Diese Curve ändert mit den Werthen von a und b ihre Gestalt. Für $b > a$ hat sie die in Fig. 11 angezeigte Form, so lange zugleich $b > a\sqrt{2}$ ist.

Ist aber $b > a$ und zugleich $b < a\sqrt{2}$, so nimmt sie die Form der Fig. 12 an. Ist $b = a$, so geht sie in die Gestalt Fig. 13 über, wo $AB = AC = a\sqrt{2}$ ist. Ist endlich $b < a$, so besteht sie aus zwey von einander abgesonderten Ovalen, oder die zwey Schleifen der Fig. 13 rücken aus einander, so daß der Zwischenraum bey A gleich $2\sqrt{a^2 - b^2}$ und die Entfernung ihre zwey äußersten Punkte $BC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Diese Curve, so wie sie die Fig. 11 darstellt, hat Domin. Cassini gefunden, um dadurch, wie er glaubte, die Bewegung der Planeten um die Sonne auf eine zur Rechnung bequemere Art darzustellen, als dieß durch die Ellipse geschieht.

VI. Die Lemniscate oder die Schleifenlinie hat ebenfalls die Gestalt der Fig. 13, und ihre Gleichung ist

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2},$$

wo $AB = AC = a$ ist. Diese Curve hat Jakob Bernoulli zuerst betrachtet, und Fagnano hat die merkwürdige Eigenschaft derselben entdeckt, daß sich in ihr unzählig viele Bogen angeben lassen, die einander entweder völlig gleich, oder von welchen der eine genau doppelt so groß ist als der andere. Leonh. Euler hat dieß weiter ausgeführt (in den Novi Comment. Petrop. Vol. VI. für das Jahr 1756), und in den neuern Zeiten haben jene Untersuchungen Gelegenheit zu der Entwickelung der sogenannten elliptischen Funktionen gegeben, die für die Integralrechnung sehr wichtig sind. Ihren Namen hat sie von Lemniscus (Fransen oder Schleifen an Gewändern).

VII. Cardioide oder herzförmige Curve (Fig. 14). Ist An ein Kreis des Halbmessers $\frac{1}{2}a$, und verlängert man die Sehne An zu beyden Seiten derselben, bis $nM = nm = a$, so liegen die Punkte M und m in der Curve. Ist $AM = r$ und $PAM = v$, wo PA in dem Durchmesser BA des Kreises liegt, so ist die Sehne $An = a \cos. v$, also auch

$$r = a\,(1 + \cos. v)$$

die Polargleichung der Curve. Für die senkrechten Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ aber hat man die Gleichung

$$x^4 + y^4 - 2ax^3 = (a^2 + 2ax - 3x^2)\,y^2.$$

Man findet leicht, daß die Cardioide auch durch die Bewegung

eines Kreises entsteht, der sich auf der Peripherie eines andern Kreises von gleicher Größe wälzt, und daß daher die Cardioide eine der Epicycloiden (m. s. unten §. 102 I.) ist. Sie ist auch die Brennlinie oder Catacaustik (m. s. §. 135 II.), oder sie entsteht durch den Durchschnitt der Lichtstrahlen von der inneren Seite der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser gleich $3a$ ist, wenn der leuchtende Punkt in dem einen Endpunkte des Durchmessers dieses Kreises liegt.

VIII. Scyphois oder Becherlinie (Fig. 15). Auf den unter sich senkrechten Geraden AX und AY nehme man $AB = AC = AD = a$ und ziehe die Geraden BC und BD. Man nehme eben so $AF = a$ und ziehe durch F eine willkürliche Gerade FG, welche die AX in G schneidet, und errichte auf FG durch G eine senkrechte Gerade, und nehme auf dieser Senkrechten $GM = GN = GA$, so liegen die Punkte M und N in den Scyphois. Ist $AP = x$, $PM = y$ und zieht man GQ parallel mit AY, so ist $x^2 = AG^2 - (y - AG)^2$ oder

$$AG = \frac{x^2 + y^2}{2y}.$$

Da ferner die Dreyecke GQM und AFG ähnlich sind, so ist auch

$$AG = \frac{ax}{y - AG}.$$

Die Elimination der Größe AG aus diesen beyden Gleichungen gibt

$$y^4 - x^4 = 4ay^2x$$

die Gleichung der Curve. Sie hat vier unendliche Äste, und die zwey Geraden BC und BD sind, erweitert, die Asymptoten dieser Äste, von welchen die zwey untern dieser Asymptoten von außen, und die zwey obern aber von innen immer näher kommen, ohne sie doch je zu erreichen.

IX. Symmetrische Curve (Fig. 16). Obschon auch die meisten der andern krummen Linien einen symmetrischen Bau haben, so verdient doch diese jene Benennung vorzugsweise, da sie, ihrer größeren Zusammensetzung ungeachtet, doch zu beyden Seiten der Axe der x sowohl als auch der y, eine vollkommen ähnliche Gestalt hat. Die Gleichung dieser Curve ist

$$y^4 + 100a^2x^2 - 96a^2y^2 - x^4 = 0 \quad \text{oder}$$

$$y = \pm\sqrt{[48a^2 \pm \sqrt{2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}]}.$$

Sie besteht aus einer der Schleifenlinie ähnlichen, isolirten Curve, die zu ihren beyden Seiten von zwey ins Unendliche fortgehende Bogenpaaren begleitet ist.

§. 16. (Linien, deren Gleichungen von höherer Ordnung oder irrationell sind). Von diesen Linien sind vorzüglich diejenigen zu bemerken, deren Gleichung die Form hat:

$$x^{\frac{m}{n}} + y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}},$$

wo man besonders drey Fälle unterscheiden kann.

I. Fall. Wenn m und n ungerade Zahlen sind.

Für $m = n = 1$ hat man

$$x + y = a$$

die Gleichung der geraden Linie.

Für $m = 3$ und $n = 1$ ist

$$x^3 + y^3 = a^3$$

eine Gleichung, zu welcher die Curve der Fig. 17 gehört, und welche zur Asymptote die Gerade m A n hat, deren Gleichung $x + y = 0$ ist.

II. Fall. Wenn m gerade und n ungerade ist.

Alle hieher gehörenden Curven sind in einen endlichen Raum eingeschlossen, da $x = \pm a$ und $y = \pm a$ die beyden äußersten Werthe dieser zwey Coordinaten sind.

Für $m = 2$ und $n = 1$ hat man

$$x^2 + y^2 = a^2$$

die Gleichung des Kreises, dessen Halbmesser gleich a ist.

Für $m = 2$ und $n = 3$ aber ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

und die zu dieser Gleichung gehörende Curve ist in Fig. 18 verzeichnet. Sie steht in naher geometrischer Verwandtschaft mit der Ellipse, wie wir später sehen werden.

III. Fall. Wenn m ungerade und n gerade ist. Alle hieher gehörenden Curven haben zwey endlose Äste, die beyde auf der positiven Seite von x und y liegen;

$m = 1$ und $n = 2$ gilt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ oder

$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0$$

die Gleichung der Apollonischen Parabel.

Für $m = 5$ und $n = 4$ aber hat man die Gleichung

$$x^{\frac{5}{4}} + y^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{4}},$$

zu welcher die Curve Fig. 19 gehört, deren zwey Äste die unter dem Winkel $XAN = 45$ gezogene Gerade AN zur Asymptote haben.

IV. Auf eine ähnliche Weise kann man auch die verschiedenen besonderen Fälle der Gleichung

$$y = c + b (x - a)^m$$

betrachten, welche zu verschiedenen Curven gehört, nachdem der Exponent m eine gerade oder eine ungerade Zahl, oder ein Bruch ist.

Hier bemerken wir nur noch die in Fig. 20 verzeichnete Schnabellinie, die zu der Gleichung

$$y = a x^2 + b \sqrt{x^5}$$

gehört, und wo die in dem Anfangspunkte A sich begegnenden Äste der Curve nicht nur, wie bey den Spitzen (Fig. 5, 6 u. f.) eine gemeinschaftliche Berührungslinie AX haben, sondern überdieß noch beyde auf derselben Seite der Berührungslinie liegen und derselben ihre convexe Seite zuwenden.

§. 17. (Transcendente Curven). So nennt man diejenigen krummen Linien, deren Gleichungen nicht algebraisch sind und z. B. die Größe a^x, log. x, arc. sin. x u. f. enthalten.

I. Die Logistik oder die logarithmische Linie (Fig. 21). Ihre Gleichung ist

$$x = a^y,$$

oder wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt

$$\log. x = y \log. a.$$

Für x = AB = 1 ist also die Ordinate y = 0. Sey AC = a und die mit der Axe der x parallele Gerade CD = b, also a die zur Abscisse b gehörende Ordinate, und daher auch

$$b = a^a \quad \text{oder} \quad \log. b = a \log. a.$$

Substituirt man diesen Werth von $\log. a = \frac{1}{a} \log. b$ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$\log. x = \frac{y}{a} \log. b \quad \text{oder} \quad x = b^{\frac{y}{a}}$$

für die Gleichung der Logistik. Ist endlich AC = 1 und b = e die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist die einfachste Gleichung der Logistik

$$y = \log. x \quad \text{oder} \quad x = e^y.$$

In dieser Curve sind also die Ordinaten die Logarithmen der Abscissen. Für positive Abscissen, die größer als die Einheit sind, wach-

sen die ebenfalls positiven Ordinaten ins Unendliche. Von $x = + 1$ bis $x = 0$ aber wachsen die negativen Ordinaten ebenfalls ohne Ende, und der Bogen Bm nähert sich der Ordinatenaxe YA ohne Ende.

II. Quadratrix (Fig. 22). Sey CBC′ ein Kreis des Halbmesser $AB = a$, und es werde der Punkt M der Curve, zu welchem die Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ gehören, so genommen, daß sich MP zu AC verhält, wie der Bogen BN zu dem Bogen BC, oder daß man hat

$$y : a = \nu : \tfrac{1}{2}\pi,$$

wo ν den Winkel MAB und π die bekannte Ludolph'sche Zahl 3.14159.. bezeichnet, so ist $y = \frac{2a\nu}{\pi}$ und überdieß $y = x \text{ tang. } \nu$, also auch $x = \frac{2a\nu}{\pi \text{ tang. } \nu}$. Bezeichnet man daher den Radius Vector AM durch r, so ist $r^2 = x^2 + y^2$, und die Polargleichung der Curve

$$r = \frac{2a\nu}{\pi \sin. \nu},$$

und eben so die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten

$$\frac{y}{x} = \text{tang.} \frac{\pi y}{2a}.$$

Für $\nu = \pi$ ist $x = -\infty$ und $y = 2a$; also geht die Curve auf der negativen Seite der Abscissenaxe, oder in der Richtung von AX′, ins Unendliche fort, und nähert sich hier, über und unter der Axe AX, einer Asymptote, die mit AX parallel und von ihr um $2a$ entfernt ist. Für die Winkel $\nu = \pi$ bis $\nu = 2\pi$ kömmt die Curve von dem unendlich weit entfernten Theile dieser beyden Asymptoten wieder zurück, und erstreckt sich auf der positiven Seite der x wieder ins Unendliche, indem sie sich in ihren beyden neuen Ästen wieder zweyen, den AX parallelen Asymptoten nähert, die von der Axe AX um die Distanz $4a$ entfernt sind, und solcher Hin- und Hergänge gibt es unzählig viele zwischen je zwey solcher Asymptoten, die immer um $2a$ von einander abstehen. Diese Curve wurde von Dinostrates, einem Zeitgenossen Plato's, ausgedacht, um durch sie die Fläche des Kreises anzugeben, oder um den Kreis und jeden Sector desselben zu quadriren. Sie dient auch zur Theilung eines jeden Kreisbogens oder des ihm zugehörenden Winkels in eine gegebene Anzahl von Theilen, wenn man diese Curve als bereits richtig verzeichnet annimmt.

III. Sinuslinie (Fig. 23). Sie erstreckt sich zu beyden Seiten

der Axe y ins Unendliche, indem sie die Axe der x in unzähligen Windungen umgibt. Ihre Gleichung ist

$$y = a \sin. x,$$

und sie schneidet daher die Abscissenaxe für $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$, so wie sie sich von derselben am meisten entfernt, für $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi$ u. f.

IV. **Zuglinie** oder Tractorie (Fig. 24). Ist die im Anfange A der Abscissenaxe auf dieselbe errichtete Senkrechte $AB = 1$, und setzt man $AP = x$, $PM = y$ und den Bogen $BM = s$, so ist die Gleichung dieser krummen Linie

$$s = \log. y.$$

Sie hat nur einen einzigen Bogen auf der Seite der positiven x und y, welcher sich der Abscissenaxe als einer Asymptote nähert. Stellt man die Ebene der Curve vertical, und ist an dem einen Endpunkte M eines gespannten Fadens MT von gegebener Länge, ein der Schwere ausgesetzter Körper befestiget, so wird dieser Endpunkt M des Fadens die Tractorie beschreiben, wenn der andere Endpunkt T desselben in der Axe der x mit gleichförmiger Bewegung fortgeht.

V. **Kettenlinie** (Chainette) Fig. 25. Ist $AP = x$, $PM = y$ und $AN = a$, und der Bogen $NM = Nm = s$, so ist die Gleichung der Curve

$$s^2 = x^2 - a^2,$$

und diese Curve beschreibt ein biegsamer, in seinen beyden Endpunkten B, C befestigter Faden, wenn die Schwere der Erde auf alle seine Theile gleichförmig wirkt, und die Punkte B und C in derselben Höhe über dem Horizonte liegen.

VI. **Cyclois** oder Cycloide (Radlinie) Fig. 26. Wenn ein Kreis HMG auf einer Geraden AB rollt, so beschreibt ein gegebener Punkt M der Peripherie dieses Kreises die Cyclois.

Ist $AP = x$, $PM = y$ und O der Mittelpunkt dieses Kreises, dessen Halbmesser gleich a ist, und nennt man t den Bogen HM, welcher Bogen der Geraden HA gleich ist, so ist der Winkel $MOH = \frac{t}{a}$, und man hat

$$x = t - a \sin. \frac{t}{a} \quad \text{und} \quad y = a\left(1 - \cos. \frac{t}{a}\right).$$

Setzt man aber der Kürze wegen $t = a\nu$, also ν gleich dem Winkel MOH, so ist auch

$$x = a\,(\nu - \sin.\nu) \quad \text{und}$$
$$y = a\,(1 - \cos.\nu),$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe ν, so erhält man

$$x = a \,\text{arc.}\cos.\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

für die Gleichung der Cycloid. Setzt man in ihr $y = DC = 2a$, so ist $x = AD = DB = a\pi$, wo wieder $\pi = 3,14159\ldots$

(A). Ist aber $CQ = x'$ und $QM = y'$, so ist $x' = 2a - y$ und $y' = a\pi - x$; also sind auch jene Gleichungen

$$x' = a\left(1 + \cos.\frac{t}{a}\right), \quad y' = a\pi - t + a\sin.\frac{t}{a},$$

oder, wenn $\pi - \nu = \omega$ ist:

$$x' = a\,(1 - \cos.\omega), \quad y' = a\,(\omega + \sin.\omega);$$

und wenn man die Größe ω aus diesen beyden Gleichungen eliminirt, so hat man für die Gleichung der Cycloid

$$y' = a \,\text{arc.}\cos.\left(1 - \frac{x'}{a}\right) + \sqrt{2ax' - x'^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Größe $\pm x$ mit dem Bogen t ohne Ende wachsen kann, und daß daher die Cycloid aus unendlich vielen, dem ACB ähnlichen Bogen besteht.

(B). Liegt der beschreibende Punkt M des Kreises HMG nicht in dem Endpunkte des Halbmessers, sondern irgendwo in der Verlängerung desselben, und zwar in der Distanz b von dem Mittelpunkte O des Kreises, so hat man

$$x = t - b\sin.\frac{t}{a} \quad \text{und} \quad y = a - b\cos.\frac{t}{a}$$

Eliminirt man daraus die Größe t, so hat man

$$x = a \,\text{arc.}\cos.\frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2},$$

welches die Gleichung der verkürzten oder der verlängerten Cycloid ist, je nachdem b größer oder kleiner ist, als a. Für $a = b$ erhält man die vorhergehende oder die gemeine Cycloid.

§. 18. (Spiralen). I. (Archimedische Spirale). Um den Mittelpunkt C (Fig. 27) des Kreises ABD bewege sich der Halbmesser, den wir gleich der Einheit annehmen, und zugleich bewege sich in die-

sem Halbmesser ein Punkt M gleichförmig so, daß immer der Radius Vector CM = r zu dem Halbmesser CA = 1 sich verhalte, wie der Kreisbogen AB = ν zu der ganzen Peripherie 2π dieses Kreises, so ist M ein Punkt der Archimedischen Spirallinie, deren Gleichung daher ist

$$r = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Spirale, nach dem ersten ganzen Umlauf des Halbmessers, den Kreis in A schneidet, und daß sie dann in unzähligen, immer größeren Windungen um den Kreis lauft. Da man den Bogen ν auch negativ von A nach D nehmen kann, so besteht diese Curve noch aus einer zweyten Spirale, die der vorigen gleich und ähnlich ist, aber eine entgegengesetzte Lage hat. Diese Spirale ist nur die einfachste von denen, welche in der Gleichung $r = a.\nu^m$ enthalten sind. — So lange der Exponent m eine positive Größe ist, fangen alle diese Spirale in dem Mittelpunkte C des Kreises an. Ist aber m negativ, so ist r anfangs unendlich groß für $\nu = 0$, und nimmt dann für wachsende ν immer ab, oder der beschreibende Punkt M nähert sich in zahllosen Windungen dem Mittelpunkte C, ohne ihn je zu erreichen. Man sieht, daß die Spiralen ebenfalls zu den transcendenten Curven gehören.

II. (Logarithmische Spirale) Fig. 28. Ihre Gleichung ist

$$\nu = \log. r,$$

wo wieder r = CM und ν der Winkel der r mit einer festen Geraden CA ist. Für r = CA = 1 ist $\nu = 0$, so daß also diese Schneckenlinie in unzähligen Windungen für wachsende positive Winkel ACM sich von dem Mittelpunkte C entfernt, und eben so für abnehmende oder negative Winkel ACm sich diesem Punkte immer mehr nähert.

III. (Hyperbolische Spirale) Fig. 29. In ihr verhält sich der Radius Vector CM = r wie verkehrt der Winkel, welchen derselbe mit einer festen Geraden CX bildet. Nennt man also ν den Winkel XCM, so hat man

$$r.\nu = a.$$

Ist MP senkrecht auf CX, so hat man

$$MP = CM \sin. \nu = \frac{a}{\nu} \sin. \nu.$$

Für $\nu = 0$ ist $\frac{\sin. \nu}{\nu} = 1$, also auch MP = a. Ist daher auch CA = a senkrecht auf CX, und zieht man durch A eine mit CX parallelen

Gerade AB, so ist AB die Asymptote der Spirale. Für negative Werthe von ν gibt es noch eine zweyte ähnliche Spirale, die gegen die andere Seite AB′ der Asymptote eben so liegt, wie jene gegen AB. Beyde gehen in unzähligen, immer kleineren Windungen um den Mittelpunkt C.

IV. (Parabolische Spirale) Fig. 30. Ihre Gleichung ist

$$r^2 = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Auf einem Kreise APB, dessen Halbmesser gleich der Einheit ist, nimmt man den Bogen AP oder den Winkel ACP gleich ν, wo dann der Theil PM des Halbmessers gleich r ist. Für $\nu = 0$ ist auch $r = 0$, und für $\nu = 360^\circ$ ist $r = 1$, oder die Curve schneidet für $\nu = 0$ die Peripherie des Kreises, und geht für $\nu = 2\pi$ durch den Mittelpunkt derselben. Für $\nu = 8\pi$ schneidet sie den Kreis noch einmal, und geht dann in immer größeren Windungen um denselben herum. Es gibt aber auch noch für negative Werthe von r einen zweyten Zweig Am dieser Spirale, die ganz außer dem Kreise liegt, und wo immer $Pm = PM$ ist, wenn m in der Verlängerung des Halbmessers CP des Kreises liegt.

Man bemerkt, daß man jede Curve, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist, in eine Spirale verwandeln kann, wenn man sich die Abscissenaxe derselben nach der Peripherie eines Kreises gekrümmt, und auf demselben gleichsam aufgewunden vorstellt, so daß die Ordinaten der Curve ihre frühere senkrechte Stelle gegen die Abscissenaxe, d. h. gegen die Peripherie dieses Kreises beybehalten. Ist der Halbmesser dieses Kreises gleich der Einheit, so wird man nur in der gegebenen Gleichung der Curve zwischen x und y die Abscisse x in ν und y in r verwandeln, um sofort die Polargleichung der entsprechenden Spirale zu erhalten. So hat man für eine Gerade, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und deren Neigung gegen die Axe der x gleich arc. tang. $\frac{1}{2\pi}$ ist, die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $x = 2\pi y$. Nimmt man damit die angezeigte Verwandlung vor, so erhält man $\nu = 2\pi r$ die Polargleichung der Archimedischen Spirale. Für die Logistik war (§. 17) $x = \log. y$, wenn (in Fig. 21) $AQ = x$ und $QM = y$ ist; also ist auch $\nu = \log. r$ die Gleichung der logarithmischen Spirale. Eben so ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x . y = a$, und daher die der hyperbolischen Spirale

$r.v = a$. Die Gleichung der Parabel endlich ist, wenn man ihren Parameter gleich $\frac{1}{2\pi}$ setzt, $x = 2\pi y^2$, und daher die Polargleichung der parabolischen Spirale $v = 2\pi r^2$ wie zuvor.

§. 19. (Goniometrische Formeln). Zum Schlusse dieser Einleitung wollen wir noch die vorzüglichsten Ausdrücke zur bequemen Übersicht zusammen stellen, welche die Verwandlungen der trigonometrischen Functionen und die Auflösung der Dreyecke betreffen, da wir uns in der Folge öfter auf dieselben beziehen werden.

I. Wenn α und β zwey willkürliche Winkel oder Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, bezeichnen, so hat man bekanntlich

$$\sin.\alpha = \sqrt{1-\cos.^2\alpha} = \frac{1}{\text{cosec.}\,\alpha} = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}} = \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1+\text{tang.}^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\cos.\alpha = \sqrt{1-\sin.^2\alpha} = \frac{1}{\sec.\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}} = \frac{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\text{tang.}^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\sin.\,\alpha}{\cos.\,\alpha} = \frac{1}{\text{cotang.}\,\alpha} = \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin.\,2\alpha}{1+\cos.\,2\alpha} = \frac{1-\cos.\,2\alpha}{\sin.\,2\alpha}$$

$$\sin.\,\text{vers.}\,\alpha = 1-\cos.\,\alpha = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\cos.\,\text{vers.}\,\alpha = 1-\sin.\,\alpha = 2\sin.^2\frac{90^0-\alpha}{2}.$$

II. $$\sin.\,2\alpha = 2\sin.\,\alpha\cos.\,\alpha = \frac{2\,\text{tang.}\,\alpha}{1+\text{tang.}^2\alpha}$$

$$\cos.\,2\alpha = 1-2\sin.^2\alpha = 2\cos.^2\alpha - 1 = \frac{1-\text{tang.}^2\alpha}{1+\text{tang.}^2\alpha}$$

$$\text{tang.}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang.}\,\alpha}{1-\text{tang.}^2\alpha}$$

$$\sec.\,2\alpha = \frac{1+\text{tang.}^2\alpha}{1-\text{tang.}^2\alpha}$$

$$\text{cosec.}\,2\alpha = \tfrac{1}{2}(\text{tang.}\,\alpha + \text{cotang.}\,\alpha).$$

III. $$\sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos.\,\alpha}{2}},\quad \cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos.\,\alpha}{2}}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos.\,\alpha}{\sin.\,\alpha} = \frac{\sin.\,\alpha}{1+\cos.\,\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos.\,\alpha}{1+\cos.\,\alpha}}$$

$$= \frac{\text{tang.}\,\alpha}{1+\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}} = -\text{cotg.}\,\alpha + \sqrt{1+\text{cotg.}^2\alpha}$$

$$\sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha + \cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\sin.\,\alpha}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha - \cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin.\alpha}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin.\alpha} + \sqrt{1-\sin.\alpha}}{\sqrt{1+\sin.\alpha} - \sqrt{1-\sin.\alpha}}.$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1+\cos.2\alpha} = \tfrac{1}{2}(1 - \text{tang.}^2\alpha)$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1-\cos.2\alpha} = \tfrac{1}{2}(\text{cotang.}^2\alpha - 1)$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1+\sin.2\alpha} = \text{tang.}(45^\circ - \alpha)$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1-\sin.2\alpha} = \text{cotang.}(45^\circ - \alpha)$$

$$1 + \sin.\alpha = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}(90+\alpha) = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}(90-\alpha)$$

$$1 - \sin.\alpha = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}(90+\alpha) = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}(90-\alpha).$$

IV. $\sin.(\alpha \pm \beta) = \sin.\alpha\cos.\beta \pm \cos.\alpha\sin.\beta$

$$\cos.(\alpha \pm \beta) = \cos.\alpha\cos.\beta \mp \sin.\alpha\sin.\beta$$

$$\text{tang.}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta}{1 \mp \text{tang.}\alpha\,\text{tang.}\beta}$$

$$\text{tang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta = \frac{\sin.(\alpha \pm \beta)}{\cos.\alpha\cos.\beta}$$

$$\text{cotang.}\alpha \pm \text{cotang.}\beta = \frac{\sin.(\beta \pm \alpha)}{\sin.\alpha\sin.\beta}$$

$$\text{cotang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta = \frac{\cos.(\alpha \mp \beta)}{\sin.\alpha\cos.\beta}.$$

V. $\sin.\alpha + \sin.\beta = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$$\sin.\alpha - \sin.\beta = 2\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos.\beta + \cos.\alpha = 2\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos.\beta - \cos.\alpha = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

$$2\sin.\alpha\cos.\beta = \sin.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin.\beta = \sin.(\alpha+\beta) - \sin.(\alpha-\beta)$$

$$2\cos.\alpha\cos.\beta = \cos.(\alpha-\beta) + \cos.(\alpha+\beta)$$

$$2\sin.\alpha\sin.\beta = \cos.(\alpha-\beta) - \cos.(\alpha+\beta).$$

VI. $\sin.(\alpha+\beta)\sin.(\alpha-\beta) = \sin.^2\alpha - \sin.^2\beta$

$$\cos.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha-\beta) = \cos.^2\alpha - \sin.^2\beta$$

$$\sin.(n+2)\alpha = 2\sin.(n+1)\alpha.\cos.\alpha - \sin.n\alpha$$

$$\cos.(n+2)\alpha = 2\cos.(n+1)\alpha.\cos.\alpha - \cos.n\alpha.$$

$$\text{VII. arc. sin. } x = \text{arc. cos.} \sqrt{1-x^2} = \text{arc. tang.} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$
$$= \text{arc. sec.} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \text{arc. cosec.} \frac{1}{x}$$
$$\text{arc. sin. } x = \tfrac{1}{2} \text{arc. cos.} (1-2x^2) = \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } 2x \sqrt{1-x^2}$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. vers. } 2x^2$$
$$\text{arc. cos. } x = \tfrac{1}{2} \text{arc. cos.} (2x^2-1) = \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } 2x \sqrt{1-x^2}$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. vers. } 2(1-x^2)$$
$$\text{arc. tang. } x = \tfrac{1}{2} \text{arc. cos.} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} \text{arc. sin.} \frac{2x}{1+x^2}$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. vers.} \frac{2x^2}{1+x^2}$$
$$\text{arc. tg. } x \pm \text{arc. tg. } y = \text{arc. tang.} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$
$$\text{arc. sin. } x \pm \text{arc. sin. } y = \text{arc. sin.} \left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right].$$

VIII.

$\sin. 90^\circ = 1,$	$\sin. 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$
$\sin. 15^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$	$\sin. 54^\circ = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
$\sin. 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$	$\sin. 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin. 30^\circ = \tfrac{1}{2},$	$\sin. 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\sin. 36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$	$\sin. 75^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

§. 20. (**Vorzüglichste Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie**). Nennt man A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreyecks, und α, β, γ die ihnen in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten, so hat man den bekannten Ausdruck

$$\cos. \alpha = \sin. \beta \sin. \gamma \cos. A + \cos. \beta \cos. \gamma,$$

woraus durch bloße Analogie, oder durch eine einfache Drehung des Dreyecks auch die beyden ähnlichen Formeln entstehen:

$$\cos. \beta = \cos. \alpha \cos. \gamma + \sin. \alpha \sin. \gamma \cos. B$$
$$\cos. \gamma = \cos. \alpha \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta \cos. C.$$

Jede dieser drey Gleichungen enthält, wie bekannt, die gesammten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie. Durch eine einfache Umwandlung derselben erhält man sofort:

$$\cos. A = \sin. B \sin. C \cos. \alpha - \cos. B \cos. C$$
$$\text{cotang. } A \sin. C = \text{cotang. } \alpha \sin. \beta - \cos. \beta \cos. C$$
$$\text{cotang. } \alpha \sin. \gamma = \text{cotang. } A \sin. B + \cos. B \cos. \gamma \quad \text{und}$$
$$\sin. A \sin. \beta = \sin. B \sin. \alpha,$$

von welchen vier Gleichungen jede wieder, durch dieselbe Drehung des Dreyecks, zwey andere analoge Ausdrücke gibt.

Von den vorhergehenden Formeln enthält jede, wie man sieht, nur vier Größen, so daß man also, wenn je drey der sechs Größen A, B, C und α, β, γ eines sphärischen Dreyecks gegeben sind, mit Hülfe dieser Formeln die drey übrigen Größen finden kann, worin die gewöhnliche sogenannte Auflösung der Dreyecke besteht.

Durch eine zweckmäßige Combination der vorhergehenden Formeln kann man andere, zwischen fünf Größen ableiten, deren Kenntniß öfter von Nutzen ist. Solche Formeln sind:

$$\sin.\alpha\cos.C = \sin.\beta\cos.\gamma - \cos.\beta\sin.\gamma\cos.A$$
$$\cos.A\sin.\gamma = \sin.\beta\cos.\alpha - \sin.\alpha\cos.\beta\cos.C$$
$$\sin.A\cos.\beta = \cos.B\sin.C + \sin.B\cos.C\cos.\alpha$$
$$\sin.A\cos.\gamma = \sin.B\cos.C + \cos.B\sin.C\cos.\alpha,$$

von welchen jede wieder zwey andere analoge involvirt.

Eben so könnte man aus denselben Ausdrücken noch andere, und selbst solche ableiten, die alle sechs Bestimmungsstücke eines Dreyecks enthalten, die wir aber hier, der Kürze wegen, übergehen.

§. 21. (Auflösung der sphärischen Dreyecke). Diese Auflösung besteht, wie gesagt, in der Bestimmung von drey Bestimmungsstücken des sphärischen Dreyecks, wenn die drey übrigen gegeben sind. Wie bereits erwähnt, kann man dazu durch die fünf ersten Ausdrücke, ja schon durch die erste Gleichung des §. 20 gelangen. Zum bequemeren Gebrauche aber hat man ihnen für die Rechnung angemessene Formen gegeben, und sie in Tafeln zusammengestellt. Man sieht leicht, daß diese Auflösung der Dreyecke sich im Allgemeinen auf sechs Fälle zurückbringen läßt, die wir hier näher anzeigen wollen.

A. Wenn drey Seiten α, β, γ gegeben sind.

Dann findet man die drey Winkel A, B, C durch folgende Ausdrücke:

$$\cos.A = \frac{\cos.\alpha - \cos.\beta\cos.\gamma}{\sin.\beta\sin.\gamma},$$

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin.\beta\sin.\gamma}$$

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\beta\sin.\gamma},$$

mit den diesen drey Ausdrücken analogen Formeln für B und C.

Auch kann man diese Winkel mittelst einer Hülfsgröße x auf folgende Weise finden:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}x = \frac{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\gamma},$$

$$\cos.\ A = \text{cotang.}\ \beta\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\gamma+x),$$

$$\cos.\ B = \text{cotang.}\ \alpha\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\gamma-x).$$

B. Wenn drey Winkel A, B, C gegeben sind.

$$\cos.\ \alpha = \frac{\cos.\ A + \cos.\ B\ \cos.\ C}{\sin.\ B\ \sin.\ C},$$

$$\sin.^2\ \tfrac{1}{2}\alpha = -\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin.\ B\ \sin.\ C},$$

$$\cos.^2\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B-C)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin.\ B\ \sin.\ C},$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}x = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B+A)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B-A)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos.\ \alpha = \text{cotang.}\ B\ \text{cotang.}\ \tfrac{1}{2}(C-x),$$

$$\cos.\ \beta = \text{cotang.}\ A\ \text{cotang.}\ \tfrac{1}{2}(C+x).$$

C. Wenn α, β, C oder zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

$$\text{cotang.}\ A = \frac{\text{cotang.}\ \alpha\ \sin.\ \beta - \cos.\ \beta\ \cos\ C}{\sin.\ C},$$

$$\text{cotang.}\ B = \frac{\text{cotang.}\ \beta\ \sin.\ \alpha - \cos.\ \alpha\ \cos.\ C}{\sin.\ C},$$

$$\cos.\ \gamma = \sin.\ \alpha\ \sin.\ \beta\ \cos.\ C + \cos.\ \alpha\ \cos.\ \beta.$$

Den vorhergehenden Gleichungen kann man noch folgende hinzufügen:

$$\text{tang.}\ x = \cos.\ C\ \text{tang.}\ \alpha,$$

$$\text{cotang.}\ A = \frac{\sin.\ (\beta-x)}{\text{tang.}\ C\ \sin.\ x},\quad \cos.\ \gamma = \frac{\cos.\ \alpha\ \cos.\ (\beta-x)}{\cos.\ x},$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\ \text{cotang.}\ \tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin.\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\ \text{cotang.}\ \tfrac{1}{2}C.$$

Auch hat man

$$\sin.\ \gamma\ \sin.\ B = \sin.\ \beta\ \sin.\ C,$$

$$\sin.\ \gamma\ \cos.\ B = \sin.\ \alpha\ \cos.\ \beta - \cos.\ \alpha\ \sin.\ \beta\ \cos.\ C,$$

$$\cos.\ \gamma = \cos.\ \alpha\ \cos.\ \beta + \sin.\ \alpha\ \sin.\ \beta\ \cos.\ C.$$

D. Wenn A, B, γ oder zwey Winkel mit der eingeschlossenen Seite gegeben sind.

$$\text{cotang.}\,\alpha = \frac{\text{cotang. A sin. B} + \text{cos. B cos.}\,\gamma}{\text{sin.}\,\gamma},$$

$$\text{cotang.}\,\beta = \frac{\text{cotang. B sin. A} + \text{cos. A cos.}\,\gamma}{\text{sin.}\,\gamma},$$

$$\text{cos. C} = \text{sin. A sin. B cos.}\,\gamma - \text{cos. A cos. B},$$

welchen Gleichungen man noch folgende hinzufügen kann:

$$\text{tang. x} = \frac{\text{cotang. A}}{\text{cos.}\,\gamma}, \quad \text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\gamma\ \text{cos.}\,\alpha}{\text{cos. (B} - \text{x)}},$$

$$\text{cos. C} = \frac{\text{cos. A sin. (B} - \text{x)}}{\text{sin. x}}.$$

Auch hat man

$$\text{sin. C sin.}\,\beta = \text{sin. B sin.}\,\gamma,$$

$$\text{sin. C cos.}\,\beta = \text{cos. A sin. B cos.}\,\gamma + \text{sin. A cos. B},$$

$$\text{cos. C} = \text{sin. A sin. B cos.}\,\gamma - \text{cos. A cos. B}.$$

E. Wenn α, β, A oder zwey Seiten und einer der ihnen gegenüber stehenden Winkel gegeben ist.

$$\text{sin. B} = \frac{\text{sin. A sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\alpha},$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\text{C} = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B}),$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Auch hat man

$$\text{tang. x} = \frac{\text{cotang. A}}{\text{cos.}\,\beta}, \qquad \text{cos. (C} - \text{x)} = \frac{\text{tang.}\,\beta\ \text{cos. x}}{\text{tang.}\,\alpha},$$

$$\text{tang. y} = \text{cos. A tang.}\,\beta, \quad \text{cos.}\,(\gamma - \text{y}) = \frac{\text{cos.}\,\alpha\ \text{cos. y}}{\text{cos.}\,\beta}.$$

F. Wenn A, B, α oder zwey Winkel und eine der ihnen gegenüber stehenden Seiten gegeben ist.

$$\text{sin.}\,\beta = \frac{\text{sin.}\,\alpha\ \text{sin. B}}{\text{sin. A}},$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\text{C} = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B}),$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Auch hat man

$$\text{cotang.}\, x = \frac{\text{cotang.}\, A}{\cos.\, \beta}, \qquad \cos.\,(C-x) = \frac{\text{tang.}\, \beta \cos.\, x}{\text{tang.}\, \alpha},$$

$$\text{tang.}\, y = \cos.\, A\, \text{tang.}\, \beta, \quad \cos.\,(\gamma - y) = \frac{\cos.\, \alpha \cos.\, y}{\cos.\, \beta}.$$

Man kann bemerken, daß die unter C, D, E und F angeführten Ausdrücke, welche die halben Winkel und Seiten enthalten, und die unter der Benennung der Neper'schen Formeln bekannt sind, nur besondere Fälle der folgenden allgemeineren Ausdrücke enthalten:

$$\cos.\, \tfrac{1}{2}(A+B) \cos.\, \tfrac{1}{2}\gamma = \cos.\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin.\, \tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin.\, \tfrac{1}{2}(A+B) \cos.\, \tfrac{1}{2}\gamma = \cos.\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos.\, \tfrac{1}{2}C,$$
$$\cos.\, \tfrac{1}{2}(A-B) \sin.\, \tfrac{1}{2}\gamma = \sin.\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin.\, \tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin.\, \tfrac{1}{2}(A-B) \sin.\, \tfrac{1}{2}\gamma = \sin.\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos.\, \tfrac{1}{2}C.$$

§. 22. (Auflösung der sphärischen rechtwinkligen Dreyecke.) Wenn einer der Winkel des sphärischen Dreyeckes ein rechter ist, so werden die vorhergehenden Ausdrücke einfacher. Da dieser Fall öfter Statt hat, so stellen wir die hieher gehörenden Ausdrücke ebenfalls tabellarisch zusammen. Die hier folgenden Ausdrücke setzen den Winkel $A = 90°$ voraus.

A. Wenn A, β, γ gegeben ist:

$$\text{tang.}\, B = \frac{\text{tang}\, \beta}{\sin.\, \gamma}, \quad \text{tang.}\, C = \frac{\text{tang.}\, \gamma}{\sin.\, \beta}, \quad \cos.\, \alpha = \cos.\, \beta \cos.\, \gamma.$$

B. Wenn A, α, β gegeben ist:

$$\sin.\, B = \frac{\sin.\, \beta}{\sin\, \alpha}, \quad \cos.\, C = \text{tang.}\, \beta\, \text{cotang.}\, \alpha, \quad \cos.\, \gamma = \frac{\cos.\, \alpha}{\cos.\, \beta}.$$

C. Wenn A, B, β gegeben ist:

$$\sin.\, \alpha = \frac{\sin.\, \beta}{\sin.\, B}, \quad \sin.\, \gamma = \frac{\text{tang}\, \beta}{\text{tang.}\, B}, \quad \sin.\, C = \frac{\cos.\, B}{\cos.\, \beta}.$$

D. Wenn A, C, β gegeben ist:

$$\text{tang.}\, \alpha = \frac{\text{tang.}\, \beta}{\cos.\, C}, \quad \text{tang.}\, \gamma = \sin.\, \beta\, \text{tang.}\, C, \quad \cos.\, B = \cos.\, \beta \sin.\, C.$$

E. Wenn A, B, α gegeben ist:

$$\sin.\, \beta = \sin.\, \alpha \sin.\, B, \quad \text{tang.}\, \gamma = \text{tang.}\, \alpha \cos.\, B, \quad \text{tang.}\, C = \frac{\text{cotang}\, B}{\cos.\, \alpha}.$$

F. Wenn A, B, C gegeben ist:

$$\cos.\, \alpha = \text{cotang.}\, B\, \text{cotang.}\, C, \quad \cos.\, \beta = \frac{\cos.\, B}{\sin.\, C}, \quad \cos.\, \gamma = \frac{\cos.\, C}{\sin.\, B}.$$

§. 23. (Auflösung der ebenen Dreyecke.) Die vorhergehenden Ausdrücke der sphärischen Dreyecke lassen sich sofort auch auf ebene oder geradlinige Dreyecke anwenden, wenn man in jenen die Sinus und Tangenten der drey Seiten α, β, γ gleich diesen Seiten, und die Cosinus derselben gleich der Einheit setzt. Dadurch erhält man folgende Tafel für die Auflösung der ebenen Dreiecke.

A. Wenn α, β, γ gegeben ist:

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)}{4\beta\gamma},$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)}{4\beta\gamma},$$

mit den analogen Ausdrücken für B und C.

Eben so hat man

$$\cos. A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

B. Wenn A, β, γ gegeben ist:

$$\text{cotang.} B = \frac{\gamma - \beta \cos. A}{\beta \sin. A}, \quad \text{cotang.} C = \frac{\beta - \gamma \cos. A}{\gamma \sin. A},$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos. A,$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \text{cotang.} \tfrac{1}{2} A.$$

C. Wenn A, B, γ gegeben ist:

$$C = 180^\circ - (A + B), \quad \alpha = \gamma \frac{\sin. A}{\sin. C}, \quad \beta = \gamma \frac{\sin. B}{\sin. C},$$

$$\alpha + \beta = \gamma \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin. \tfrac{1}{2} C}, \quad \alpha - \beta = \gamma \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A - B)}{\cos. \tfrac{1}{2} C}.$$

D. Wenn α, β, A gegeben ist:

$$\sin. B = \frac{\beta}{\alpha} \sin. A, \quad C = 180^\circ - (A + B),$$

$$\gamma = \beta \frac{\sin C}{\sin B} = \alpha \frac{\sin. C}{\sin. A}, \text{ oder auch}$$

$$\gamma = (\alpha + \beta) \frac{\sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos. \tfrac{1}{2}(A - B)} = \beta \cos. A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 A}.$$

E. Wenn A, B, α gegeben ist:

$$\beta = \alpha \frac{\sin. B}{\sin A}, \quad C = 180^\circ - (A + B),$$

$$\gamma = \alpha \frac{\sin. C}{\sin. A} = (\alpha + \beta) \frac{\sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos. \tfrac{1}{2}(A - B)}.$$

Bemerken wir noch, daß die vorhergehenden Ausdrücke für die sphärischen Dreyecke, wenn man bey der numerischen Entwickelung derselben auf ihre Zeichen gehörig achtet, in beynahe allen Fällen von selbst anzeigen, in welchen der vier Quadranten die gesuchten Winkel oder Seiten des Dreyeckes fallen, wozu folgende kleine Tafel sehr bequem ist.

$$\sin.(90^\circ + x) = \cos.x,$$
$$\sin.(180^\circ + x) = -\sin.x,$$
$$\sin.(270^\circ + x) = -\cos.x.$$

$$\cos.(90^\circ + x) = -\sin.x,$$
$$\cos.(180^\circ + x) = -\cos.x,$$
$$\cos.(270^\circ + x) = \sin.x.$$

$$\text{tang.}(90^\circ + x) = -\text{cotang.}x,$$
$$\text{tang.}(180^\circ + x) = \text{tang.}x,$$
$$\text{tang.}(270^\circ + x) = -\text{cotang.}x.$$

$$\text{cotang.}(90^\circ + x) = -\text{tang.}x,$$
$$\text{cotang.}(180^\circ + x) = \text{cotang.}x,$$
$$\text{cotang.}(270^\circ + x) = -\text{tang.}x.$$

Differentialrechnung.

I.

Differential der algebraischen Funktionen.

§. 24. (**Differential und Differential-Coefficient.**) Funktion einer veränderlichen Größe x nennt man jeden analytischen Ausdruck, der aus dieser Größe x und andern unveränderlichen a, b, . . . zusammengesetzt ist, wie z. B. ax oder $\frac{a+x}{b-x}$, oder $\sqrt{a^2+bx}$ u. s. w., wo dann x die Stammgröße dieser Funktion heißt. Wir wollen solche Funktionen von x überhaupt durch das Zeichen $f(x)$ ausdrücken.

Wenn in einer solchen Funktion $u = f(x)$ die Stammgröße x sich ändert, und z. B. $x+h$ wird, so wird auch die Funktion $f(x)$ sich ändern oder in $u' = f(x+h)$ übergehen, und man wird die auf diese Weise erfolgende Änderung der Funktion erhalten, wenn man diese beyden Werthe u′ und u derselben von einander abzieht. Eben so wird also auch das Verhältniß der Änderung $u'-u$ der Funktion zu der Änderung h ihrer Stammgröße gleich seyn:

$$\frac{u'-u}{h} \text{ oder auch } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Hat man z. B., um dieß sogleich durch einen besondern Fall zu erläutern, die Funktion

$$u = f(x) = ax^2$$

gegeben, und geht x über in $x+h$, so erhält man

$$u' = f(x+h) = a(x+h)^2,$$

oder wenn man entwickelt:

$$u' = a(x^2 + 2hx + h^2);$$

also auch, wenn man von diesem Ausdrucke den früheren Werth derselben oder $u = ax^2$ abzieht, und durch h dividirt:

$$\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah.$$

Dieses Verhältniß $\frac{u'-u}{h}$ der beyden Änderungen, der Funktion und ihrer Stammgröße, besteht, wie man sieht, aus zwey Theilen $2ax$ und ah, von welchen allein der letzte von der Größe der Änderung h der Stammgröße x noch abhängig, der erste aber, oder $2ax$, davon ganz unabhängig ist.

Je kleiner nun h wird, desto mehr nähert sich das Verhältniß $\frac{u'-u}{h}$ dem Werthe $2ax$, als einer Gränze, die es erst dann erreicht, wenn h kleiner wird als jede andere noch angebliche Größe, in welchem Zustande dann h eine unendlich kleine Größe genannt wird. Man bezeichnet diese unendlich kleine Veränderung h der Stammgröße x durch dx, und die durch sie erzeugte, im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Änderung $u'-u$ ihrer Funktion durch du, so daß man daher hat

$$\frac{du}{dx} = 2ax.$$

Man nennt aber dx und du das Differential der Stammgröße x und ihrer Funktion u, so wie man das Verhältniß $\frac{du}{dx}$ den Differential-Coefficienten der Funktion zu nennen pflegt, so daß daher der Differential-Coefficient einer Funktion die Gränze ist von dem Verhältnisse der Änderung der Funktion zu der Änderung ihrer Stammgröße, welcher Gränze sich nämlich dieses Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner die Änderung dx der Stammgröße wird, bis es endlich, für ein unendlich kleines dx, diese Gränze selbst erreicht.

Ganz eben so hat man in einem zweyten Beyspiele

$$u = ax^3,$$

wenn x wieder in $x + h$ übergeht,

$$u' = a(x+h)^3, \text{ und daher}$$

$$\frac{u'-u}{h} = a(3x^2 + 3hx + h^2);$$

und auch hier ist bloß das erste Glied $3ax^2$ des Verhältnisses $\frac{u'-u}{h}$ von der Größe h unabhängig, und daher dieses Glied wieder die Gränze, welcher sich jenes Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner h angenommen wird, so daß also dieses Gränzverhältniß, wenn h gleich dx oder unendlich klein wird, durch

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2$$

ausgedrückt wird, u. s. f. in allen anderen Fällen.

Man sieht daraus, daß, wenn auch die beyden Änderungen du und dx der Funktion und ihrer Stammgröße, jede für sich, unendlich klein sind, daß doch das Verhältniß derselben oder daß der Differential-Coefficient $\frac{du}{dx}$ demungeachtet eine endliche Größe seyn kann.

Der Gegenstand der Differentialrechnung ist es nun, diesen Differential-Coefficienten oder dieses Gränzverhältniß der Änderung der Funktion und ihrer Stammgröße für alle gegebenen Funktionen zu bestimmen. Ehe wir aber diese Bestimmungen vornehmen, wird es angemessen seyn, einige Bemerkungen über dieses Geschäft vorausgehen zu lassen.

§. 25. (Einfachere Darstellung und Erweiterung des Vorhergehenden.) Das in unserem vorhergehenden ersten Beyspiele erhaltene Gränzverhältniß $\frac{du}{dx} = 2ax$ läßt sich auch in Gestalt einer gewöhnlichen Gleichung auf folgende Weise ausdrücken:

$$du = 2axdx,$$

in welcher a und x endliche, du und dx aber unendlich kleine Größen bezeichnen. Um aber zu dieser Gleichung zu gelangen, kann man annehmen, daß sie aus der analogen früher erhaltenen Gleichung

$$du = (2ax + adx)dx$$

dadurch entstanden ist, daß man in ihr die unendlich kleine Größe adx gegen die endliche $2ax$ weggelassen hat.

Ganz eben so hatten wir in unserem zweyten Beyspiele aus dem gegebenen Ausdrucke $u = ax^3$ für die Differenz $u' - u$ oder du erhalten:

$$du = a(3x^2 + 3xdx + dx^2)dx,$$

welchen Ausdruck man auch so darstellen kann:

$$du = [3ax^2 + a(3x + dx)dx]dx.$$

Läßt man hier wieder die unendlich kleine Größe dx gegen die endliche $3x$ weg, so ist

$$du = [3ax^2 + 3axdx]dx \quad \text{oder}$$

$$du = 3ax(x + dx)dx,$$

und wenn endlich auch hier $x + dx$ gleich x gesetzt wird, so erhält man

$$du = 3ax^2 dx \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = 3ax^2, \text{ wie zuvor.}$$

Man kömmt also zu demselben Zwecke, wenn man, wie in dem Vorhergehenden, das Gränzverhältniß der Änderung einer Funktion zur Änderung ihrer Stammgröße, oder wenn man, wie hier, die Veränderung du einer Funktion sucht, die aus einer Änderung dx ihrer Stammgröße entspringt, vorausgesetzt, daß man, bey dem zweyten Verfahren, diese Änderung dx so klein annimmt, daß sie gegen jede andere endliche und noch angebbare Größe als verschwindend zu betrachten ist.

Beyde Verfahren führen zu demselben Resultate, aber das letzte ist offenbar einfacher und zur Anwendung bequemer, obschon es übrigens nur als ein wegen dieser Einfachheit eingeführter, abgekürzter Ausdruck des ersten, oder als ein bequemes Mittel zu demselben Zwecke zu betrachten ist. Demnach besteht, dieser zweyten Darstellungsweise zu Folge, das Princip der Differentialrechnung darin: »daß man zwey endliche Größen, welche »unter sich nur durch eine unendlich kleine Größe verschieden sind, als »völlig gleiche Größen betrachtet,« weil man nämlich nach der vorhergehenden Erklärung des Wortes »unendlich klein« zwischen jenen zwey Größen keine weitere noch angebliche Ungleichheit auffinden kann.

I. Wenn man aber diesen Begriff der unendlich kleinen Größen einmal eingeführt hat, so folgt unmittelbar daraus, daß die Verhältnisse dieser so wie der endlichen Größen unter einander sehr verschieden, und selbst wieder unendlich klein seyn können. Ist z. B. dx eine unendlich kleine Größe, so ist das Verhältniß des Quadrates derselben zu ihr selbst gleich $\frac{dx^2}{dx}$, also gleich dx, oder dieses Verhältniß ist selbst unendlich klein, so daß man daher, nach demselben oben aufgestellten Principe, die Größe dx^2 gegen dx weglassen, oder daß man die beyden Ausdrücke $dx + dx^2$ und dx als nicht mehr unter sich verschieden, sondern als vollkommen identisch betrachten muß, wie dieß auch schon oben bey unserm zweyten Beyspiele geschehen ist, wo man die Größe $3xdx + dx^2$ gleich $3xdx$ angenommen hat. In der That ist auch $dx + dx^2 = dx(1 + dx)$, und da, nach dem erwähnten Principe, $1 + dx$ gleich 1 ist, so muß auch $dx + dx^2$ gleich dx seyn.

Man pflegt aber solche Größen, wie dx^2, unendlich kleine

Größen der zweyten Ordnung zu nennen, und diese überhaupt durch $d^2 x$ anzudeuten, so daß also Ausdrücke der Form $d^2 u$, dx^2, $dx \,.\, dy$ u. f. als unendlich kleine Größen der zweyten Ordnung anzusehen sind, weil ihr Verhältniß zu den unendlich kleinen Größen du, dx, dy, ... der ersten Ordnung selbst wieder unendlich klein ist. Ganz eben so wird man also auch unendlich kleine Größen der dritten Ordnung erhalten, und diese allgemein durch $d^3 u$ andeuten, wo $d^3 u$ in Beziehung auf seine Ordnung gleichbedeutend ist mit dx^3 oder $dx^2 \,.\, dy$, oder $dx \,.\, dy \,.\, dz$ u. s. w.

II. Übrigens wird man auf diesen Begriff der unendlich kleinen Größen durch die uns von allen Seiten umgebenden Erscheinungen der Natur gleichsam von selbst geführt, und man kann sie daher nicht, wie Manche glaubten, als bloße Einbildungen betrachten, die sich die Geometer zu ihren Untersuchungen ausgedacht haben. So wächst die Zeit durch die Aufeinanderfolge von Momenten, deren Intervalle kleiner sind, als jede andere angebliche, wenn auch noch so kleine Zeit. So wächst die von einem bewegten Körper beschriebene gerade oder krumme Linie auf eine Weise, daß der zwischen je zwey nächsten Punkten dieser Linie enthaltene Zwischenraum kleiner ist, als jede andere noch angebbare Linie, u. s. f.

Aus diesem Grunde wird man auch jene krummen Linien in der Geometrie, unserm aufgestellten Principe gemäß, als Polygone von unendlich vielen unendlichkleinen Seiten betrachten können, und die auf diese Betrachtung gegründeten Resultate werden mit denjenigen als identisch zusammenfallen, die unmittelbar aus dem Begriffe der stetigen Aufeinanderfolge der Punkte hervorgehen, die ein in Bewegung begriffener, und dadurch diese krumme Linie beschreibender Körper nach und nach einnimmt. Ein in einem Kreise eingeschriebenes oder ihm umschriebenes Polygon wird diesem Kreise desto näher kommen, je kleiner die Seiten dieses Polygons sind, und beyde, Kreis und Polygon, werden als ganz identische Größen zusammenfallen, oder der Unterschied zwischen beyden wird nicht weiter angegeben werden können, wenn einmal diese Seiten des Polygons selbst kleiner als jede noch angebliche gerade Linie, d. h. wenn diese Seiten unendlich klein seyn werden, wo dann sofort auch jede dieser Seiten des Polygons mit dem zu ihr gehörenden Bogen der krummen Linie, oder wo die Sehne jedes Bogens von ihrem Bogen selbst nicht weiter zu unterscheiden, und daher beyde von gleicher Größe seyn werden.

III. Die Geometrie, die uns auf diese Weise gleichsam von selbst

auf die Betrachtung der unendlich kleinen Größen führt, leitet uns auch noch auf den Unterschied, der zwischen diesen unendlich kleinen Größen in Beziehung auf die oben erwähnten Ordnungen derselben Statt hat. — Nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises verhält sich der Sinusversus eines Bogens des Kreises zu der Sehne dieses Bogens, wie sich diese Sehne zu dem Durchmesser des Kreises verhält. Nennt man also d den Durchmesser des Kreises, und s die Sehne, so wie x den Sinusversus eines Bogens desselben, so hat man

$$\frac{x}{s} = \frac{s}{d} \quad \text{oder} \quad x = \frac{s^2}{d}.$$

Ist daher der Bogen und also auch seine Sehne s eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung, so ist, wie die letzte Gleichung zeigt, der Sinusversus dieses Bogens eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung. Eben so ist der Flächeninhalt einer in allen ihren Dimensionen unendlich kleinen Oberfläche immer wenigstens eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung, weil er kleiner ist als das Quadrat der längsten geraden Linie, die man von einem Punkte des Umfanges dieser Oberfläche zu einem andern ziehen kann. Und eben so ist endlich das Volum eines in allen seinen Dimensionen unendlich kleinen Körpers wenigstens eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung, weil dieses Volum des Körpers kleiner ist als der Würfel der längsten geraden Linie, die man von einem Punkte des Umfanges des Körpers zu einem andern ziehen kann.

Dieß wird genügen, dem Leser von der Beschaffenheit unseres Gegenstandes und der nun folgenden Art seiner Behandlung Rechenschaft zu geben. — Gehen wir nun zu unserem oben angeführten Zwecke die verschiedenen Funktionen durch, und betrachten wir unter ihnen zuerst die *algebraischen* Funktionen, d. h. diejenigen Ausdrücke, welche keine sogenannten transcendenten Größen, wie a^x, log. x, arc. sin. x u. dgl. enthalten.

§. 26. (Differential der einfachsten algebraischen Funktionen.) Sey zuerst die Funktion

$$u = f(x) = A - Bx$$

gegeben, wo A und B constante Größen bezeichnen. Dieß vorausgesetzt, hat man nach dem Vorhergehenden

$$du = f(x + dx) - fx \quad \text{oder}$$

$$du = [A - B(x + dx)] - [A - Bx],$$

das heißt, man hat

$$du = - Bdx,$$

und dieß ist das gesuchte Differential der Funktion $A - Bx$, also ist auch der Differential-Coefficient dieser Funktion

$$\frac{du}{dx} = - B.$$

Ist eben so die Funktion

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3$$

gegeben, so findet man auf dieselbe Weise

$$u + du = A - B(x + dx) + C(x + dx)^2 - D(x + dx)^3,$$

und wenn man davon den vorigen Ausdruck abzieht:

$$du = - Bdx + Cdx(2x + dx)$$
$$- Ddx[3x^2 + 3xdx(1 + dx)].$$

Da aber nach dem Geiste der Differentialrechnung die Größen

$$2x + dx, \quad 3x^2 + 3xdx \quad \text{und} \quad 1 + dx$$

in derselben Ordnung gleich

$$2x, \quad 3x^2 \quad \text{und} \quad 1$$

sind, so hat man sofort für das gesuchte Differential

$$du = - Bdx + 2Cxdx - 3Dx^2dx,$$

oder für den gesuchten Differential-Coefficienten

$$\frac{du}{dx} = - B + 2Cx - 3Dx^2.$$

§. 27. (Differential eines Produktes.) Sey u das Produkt von zwey veränderlichen Größen x und y, oder sey die Funktion

$$u = xy$$

gegeben, so hat man

$$u + du = (x + dx)(y + dy) \quad \text{oder}$$

$$u + du = xy + xdy + ydx + dxdy,$$

oder wenn man von diesem Ausdrucke den ersten $u = xy$ abzieht, und den Rest durch dx dividirt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y + dy,$$

Da aber der Differential-Coefficient $\frac{dy}{dx}$ nach dem in §. 25 Gesagten eine endliche Größe ist, so ist auch $\frac{xdy}{dx}$ und y eine endliche, dy aber eine unendlich kleine Größe, und daher $\frac{xdy}{dx} + y + dy$ gleich $\frac{xdy}{dx} + y$, daß man daher hat

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y,$$

oder wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes durch dx multiplicirt:

$$d.(xy) = xdy + ydx.$$

Das Differential eines Produktes von zwey veränderlichen Factoren ist daher gleich der Summe der Produkte eines jeden dieser Factoren in das Differential des anderen.

Wäre eben so das Produkt $u = xyz$ von drey Factoren gegeben, so setze man der Kürze wegen $xy = t$, wodurch man erhält $u = tz$, also auch, nach dem Vorhergehenden,

$$du = tdz + zdt.$$

Aber da der Ausdruck $t = xy$ nach dem Vorhergehenden gibt $dt = xdy + ydx$, so erhält man, wenn man diesen Werth von dt in dem vorhergehenden Ausdrucke von du substituirt:

$$d.xyz = xydz + xzdy + yzdx.$$

Eben so würde man, wenn $x, x', x'', x''', \ldots$ verschiedene veränderliche Größen sind, und das Produkt

$$u = xx'x''x''' \ldots$$

gegeben ist, für das Differential derselben finden

$$du = xx'x''.dx''' + xx'x'''.dx'' + xx''x'''.dx' + x'x''x'''.dx, \text{ u. s. w.},$$

so daß daher das Differential eines Produktes mehrerer Factoren gleich der Summe der Produkte des Differentials eines jeden dieser Factoren in alle übrigen Factoren ist.

Auch kann man den Differential-Coefficienten des letzten Ausdruckes auf folgende einfachere Weise darstellen:

$$\frac{d.xx'x''\ldots}{xx'x''\ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \ldots$$

§. 28. (Differential eines Quotienten.) Sey der Ausdruck

$$u = \frac{x}{y}$$

gegeben. Man suche das Differential von u.

Da dieser Ausdruck auch so dargestellt werden kann:

$$x = uy,$$

so hat man sofort (nach §. 27)

$$dx = udy + ydu \quad \text{oder}$$

$$du = \frac{dx - udy}{y};$$

oder endlich, wenn man in dem letzten Ausdrucke den Werth von $u = \frac{x}{y}$ substituirt:

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Das Differential eines Bruches ist daher gleich dem Produkte des Nenners in das Differential des Zählers, weniger dem Produkte des Zählers in das Differential des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners.

§. 29. (Differential einer Potenz.) Wir haben oben, zu Ende des §. 27, den Ausdruck erhalten:

$$\frac{d \,.\, xx'x'' \ldots}{xx'x'' \ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \ldots$$

Setzt man aber alle diese Größen x, x', x'', ... unter sich gleich, und nennt n die Anzahl derselben, so geht der vorhergehende Ausdruck in den folgenden einfacheren über:

$$\frac{d \,.\, x^n}{x^n} = n \,.\, \frac{dx}{x},$$

woraus sofort folgt

$$d \,.\, x^n = n x^{n-1} dx,$$

und in diesem Ausdrucke bezeichnet offenbar die Größe n eine ganze und positive Zahl.

I. Sey $u = x^{\frac{a}{b}}$ und $\frac{a}{b}$ ein positiver Bruch.

Da der gegebene Ausdruck auch so dargestellt werden kann:

$$u^b = x^a,$$

so hat man nach dem Vorhergehenden, da a und b wieder ganze positive Zahlen bezeichnen:

$$b u^{b-1} du = a x^{a-1} dx \quad \text{oder}$$

$$du = \frac{a . x^{a-1} dx}{b . u^{b-1}}.$$

Substituirt man hier statt u^{b-1} seinen Werth $(x^{\frac{a}{b}})^{b-1} = x^{a - \frac{a}{b}}$, so erhält man:

$$du = \frac{a}{b} x^{\frac{a}{b} - 1} dx.$$

Ist daher $\frac{a}{b} = n$, so ist auch

$$du = n x^{n-1} dx,$$

wie zuvor, obschon n ein positiver Bruch ist.

Da ferner die irrationalen Zahlen als die Gränzen ihrer rationalen Näherungswerthe betrachtet werden, so kann in dem letzten Ausdrucke von du die Größe n selbst eine positive irrationale Zahl bezeichnen.

II. Hat endlich diese Größe n einen an sich positiven Werth (ist z. B. $n = a^2$), und ist der Ausdruck gegeben

$$u = x^{-n},$$

so ist auch $u . x^n = 1$. Setzt man $y = x^n$, so ist $uy = 1$, und dieses Produkt gibt (nach §. 27)

$$u dy + y du = 0.$$

Allein der Ausdruck $y = x^n$, wo n eine positive, ganze oder gebrochene Zahl ist, gibt nach dem unmittelbar Vorhergehenden

$$dy = n x^{n-1} dx.$$

Substituirt man diesen Werth von dy in der obigen Gleichung, so erhält man

$$du = - n x^{-n-1} dx,$$

wie zuvor, obschon n eine an sich negative Zahl ist.

Das Differential einer Potenz x^m, wo m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, wird daher immer gleich seyn dem Produkte des Exponenten in die um die Einheit nächst niedere Potenz, und in das Differential der Wurzel dieser Potenz.

§. 30. (**Differential der zusammengesetzten Funktionen.**) Alle übrigen algebraischen Funktionen sind aus den vorhergehenden

(§. 26—29) zusammengesetzt, und lassen sich daher auch nach den bereits gegebenen Vorschriften differentiiren.

Sey z. B. die Funktion

$$u = (a + b x^m)^n$$

gegeben, so hat man für das Differential derselben

$$du = n (a + b x)^{n-1} . d (a + b x^m), \quad \text{oder da}$$

$$d (a + b x^m) = m b x^{m-1} dx \quad \text{ist,}$$

$$du = m n b (a + b x^m)^{n-1} . x^{m-1} dx.$$

Denselben Ausdruck würde man einfacher erhalten, wenn man

$$y = a + b x^m, \quad \text{und daher} \quad u = y^n \quad \text{setzt.}$$

Denn dann ist

$$\frac{du}{dy} = n y^{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = m b x^{m-1},$$

und daher, wenn man den Werth von dy aus der zweyten dieser Gleichungen in der ersten substituirt

$$\frac{du}{dx} = m n b (a + b x^m)^{n-1} . x^{m-1}, \quad \text{wie zuvor.}$$

I. In diesem Beyspiele wird also u als eine Funktion von y, und y als eine Funktion von x betrachtet, und der Differential-Coefficient von u in Beziehung auf x gesucht, wo x als die unabhängige Größe gedacht wird, von welcher y unmittelbar und u mittelbar, nämlich durch Vermittlung der Größe y, abhängt.

II. Hat man, um dieß allgemein darzustellen, drey Größen u, y und x, deren die erste eine Funktion der zweyten, und die zweyte eine Funktion der dritten ist, und bestehen zwischen diesen drey Größen die folgenden zwey Gleichungen

$$u = f(y) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x),$$

wo die Zeichen f und φ im Allgemeinen Funktionen andeuten, so kann man auch das Differential von u in Beziehung auf x finden, ohne erst die Mittelgröße y aus diesen zwey Gleichungen zu eliminiren. Denn wenn diese drey Größen durch irgend eine Änderung der unabhängigen Größe x in einen neuen Zustand übergehen, wo sie, in der angeführten Ordnung durch u', y' und x' bezeichnet werden sollen, oder wo sie die Änderungen $u' - u$, $y' - y$ und $x' - x$ erlitten haben, so hat man

$$\frac{u' - u}{x' - x} = \left(\frac{u' - u}{y' - y}\right) . \left(\frac{y' - y}{x' - x}\right),$$

also auch, wenn man von diesen Verhältnissen die Gränzen nimmt

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

und in diesem Ausdrucke ist das erste du die vollständige gesuchte Änderung von u, die aus einer gegebenen Änderung der unabhängigen Größe x entspringt; während das zweyte du nur diejenige Änderung von u ist, die aus einer Änderung von y entspringt, welche letzte selbst wieder von der Änderung der unabhängigen Größe x abhängt, so daß also der Ausdruck $\left(\frac{du}{dy}\right)$ unbestimmt bleibt, so lange $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ nicht bestimmt ist. In unserm Beyspiele ist

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = ny^{n-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = mbx^{m-1},$$

und beyder Größen Produkt ist

$$mnby^{n-1}.x^{m-1} \quad \text{oder} \quad mnb(a + bx^m)^{n-1}.x^{m-1};$$

das heißt, ist gleich $\frac{du}{dx}$, wie zuvor.

Hätte man, um diesen allgemeinen Ausdruck noch auf ein zweytes Beyspiel anzuwenden, die zwey Gleichungen

$$u = y^2 + y^5 \quad \text{und} \quad y^2 + y^3 = x,$$

und sucht man das Differential von u in Beziehung auf x, so hat man, ohne erst zur Elimination von y aus diesen zwey Gleichungen zu gehen,

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y + 5y^4 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2y + 3y^2};$$

also ist auch sofort

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2 + 5y^3}{2 + 3y}.$$

II. Beyspiele. Durch Anwendung des angezeigten Verfahrens findet man:

$$d.\sqrt{2ax - x^2} = \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

$$d.\sqrt{a + x}\,.\,\sqrt[4]{a + x} = \frac{3dx}{4\sqrt[4]{a + x}},$$

$$d.(a + x)\sqrt{a - x} = \frac{(a - 3x)\,dx}{2\sqrt{a - x}},$$

$$d.\frac{a + x}{a - x} = \frac{2a\,dx}{(a - x)^2},$$

$$d.\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{-a^2 dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$d.\frac{a + 2bx^2}{x\sqrt{a + bx^2}} = \frac{-a^2 dx}{x^2(a + bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

II.

Differential der transcendenten Funktionen.

---

§. 31. **(Differential der Logarithmen).** Bezeichnen wir den Differential-Coefficienten des Logarithmus von x, da uns derselbe noch unbekannt ist, vorläufig durch die Funktion $\varphi(x)$, so daß man also hat

$$d.\log.x = \varphi(x).dx.$$

Da in diesem Ausdrucke die Größe x ganz willkürlich ist, so kann man für sie auch jede andere Größe, z. B. x^n setzen, wo n wieder eine willkürliche constante Größe bezeichnet, so daß man daher auch haben wird

$$d.\log.x^n = \varphi(x^n).d.x^n.$$

Allein nach dem Vorhergehenden ist $d.x^n = nx^{n-1}dx$, und nach einer bekannten Eigenschaft der Logarithmen hat man $\log.x^n = n\log.x$; also ist auch

$$nd.\log.x = \varphi(x^n).nx^{n-1}dx.$$

Substituirt man in dieser Gleichung statt $d.\log.x$ den vorhergehenden Ausdruck $\varphi(x)dx$, und dividirt dann zu beyden Seiten des Gleichheitszeichens durch ndx, so erhält man

$$x.\varphi(x) = x^n.\varphi(x^n).$$

Da nun x^n, wegen dem ganz willkürlichen Exponenten n, jede Größe vorstellen kann, so zeigt die letzte Gleichung, daß der Ausdruck $x.\varphi(x)$ keine Änderung erleidet, wenn man auch in ihm statt der Größe x irgend eine andere Größe x^n substituirt, und daß daher dieses Produkt $x.\varphi(x)$ von x selbst völlig unabhängig, d. h. daß es irgend eine *constante Größe* seyn muß. Bezeichnen wir diese constante

4 *

Größe durch m, so ist $x . \varphi(x) = m$, und da $d . \log . x = \varphi(x) dx$ war, so hat man für das gesuchte Differential des Logarithmus

$$d . \log. x = m . \frac{dx}{x}.$$

Wir werden bald Gelegenheit haben, diese constante Größe m näher zu bestimmen. Am einfachsten und natürlichsten wird es offenbar seyn, sie gleich der Einheit anzunehmen. In der That nennt man auch, wie wir später sehen werden, diejenigen Logarithmen, für welche diese Constante m gleich der Einheit ist, die natürlichen Logarithmen. Wir wollen sie diesem gemäß durch log. nat. bezeichnen, so daß man für diese Logarithmen hat

$$d . \log. nat. x = \frac{dx}{x},$$

während wir jede andere Gattung von Logarithmen, zum Unterschiede mit jenen, gemeine Logarithmen nennen, und durch log. com. anzeigen wollen, so daß man für dieselben, wie zuvor, haben wird

$$d . \log. com. x = m . \frac{dx}{x},$$

wo die Constante m von der Einheit verschieden, übrigens unserer Willkür überlassen ist.

§. 32. (Differential der Exponentialgrößen). Es sey der Ausdruck

$$y = a^x$$

gegeben, wo a eine constante, und x so wie y eine veränderliche Größe bezeichnet. Nimmt man von diesem Ausdrucke die natürlichen Logarithmen, so hat man

$$\log. nat. y = x . \log. nat. a;$$

und wenn man davon, nach §. 32, das Differential nimmt, so ist

$$\frac{dy}{y} = dx . \log. nat. a, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d . a^x}{a^x} = dx . \log. nat. a, \quad \text{oder endlich}$$

$$d . a^x = a^x dx . \log. nat. a.$$

I. Wäre die hier willkürlich gewählte Constante a diejenige, hier übrigens noch unbekannte Zahl, deren log. nat. gleich der Einheit ist, welche in der Folge noch oft vorkommende Zahl wir immer durch e anzeigen wollen, so würde man haben

$$\log.\text{ nat. } e = 1 \quad \text{und}$$
$$d \,.\, e^x = e^x dx.$$

II. Sey noch der Ausdruck

$$u = x^y$$

gegeben, wo x sowohl als auch der Exponent y veränderlich ist. Nimmt man von ihm die natürlichen Logarithmen, so ist

$$\log.\text{ nat. } u = y \,.\, \log.\text{ nat. } x,$$

und davon ist das Differential (nach §. 28 und 32)

$$\frac{du}{u} = dy \,.\, \log.\text{ nat. } x + y \,.\, \frac{dx}{x},$$

oder es ist

$$d \,.\, x^y = y x^{y-1} dx + x^y dy \,.\, \log.\text{ nat. } x;$$

so daß daher das Differential dieses Ausdrucks x^y gleichsam aus den beyden $d\,.\,a^y$ und $d\,.\,x^n$ des §. 30 und 32 zusammengesetzt erscheint, wenn $y = n$ gesetzt wird.

§. 33. (Differential der trigonometrischen Funktionen). Um das Differential von sin. x zu finden, hat man (Einl. §. 19 IV.)

$$d \,.\, \sin. x = \sin. (x + dx) - \sin. x$$
$$= \sin. x \cos. dx + \cos. x \sin. dx - \sin. x.$$

Allein es ist (Einl. §. 19 II.) für jeden Werth von dx

$$\cos. dx = 1 - 2 \sin.^2 \frac{dx}{2},$$

und daher, wenn dx unendlich klein ist, $\cos. dx = 1$. Ferner ist, im ersten Quadranten des Kreises, der Bogen desselben immer größer als sein Sinus, und kleiner als seine Tangente, oder es ist

$$\text{tang. } dx > dx > \sin. dx;$$

also auch, wenn man durch sin. dx dividirt:

$$\frac{\text{tang. } dx}{\sin. dx} > \frac{dx}{\sin. dx} > \frac{\sin. dx}{\sin. dx}.$$

Da aber $\frac{\text{tang. } dx}{\sin. dx} = \frac{1}{\cos. dx}$, so ist die Einheit die Gränze, welcher sich das Verhältniß $\frac{\text{tang. } dx}{\sin. dx}$ immer mehr nähert, je kleiner dx ist. Da aber auch $\frac{\sin. dx}{\sin. dx}$ gleich der Einheit ist, so nähert sich auch

das Verhältniß $\frac{dx}{\sin. dx}$ der Einheit desto mehr, je kleiner dx ist, so daß man daher für einen unendlich kleinen Bogen dx hat:

$$\cos. dx = 1 \quad \text{und} \quad \sin. dx = dx.$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck von $d . \sin. x$, so erhält man:

$$d . \sin. x = dx \cos. x.$$

I. Setzt man in der letzten Gleichung $90 - x$ statt x, so erhält man:

$$d . \sin. (90 - x) = - dx \cos. (90 - x) \quad \text{oder}$$
$$d . \cos. x = - dx \sin. x.$$

II. Eben so erhält man

$$d . \text{tang}. x = d . \frac{\sin. x}{\cos. x} = \frac{\cos. x . d \sin. x - \sin. x . d \cos. x}{\cos.^2 x};$$

also auch, wenn man hierin $d . \sin. x$ und $d . \cos. x$ aus dem Vorhergehenden substituirt:

$$d . \text{tang}. x = \frac{dx}{\cos.^2 x};$$

und eben so erhält man auch

$$d . \text{cotang}. x = - \frac{dx}{\sin.^2 x},$$

$$d . \sec. x = \frac{dx . \sin. x}{\cos.^2 x},$$

$$d . \text{cosec}. x = - \frac{dx . \cos. x}{\sin.^2 x},$$

$$d . \sin. \text{vers}. x = dx . \sin. x \quad \text{und}$$
$$d . \cos. \text{vers}. x = - dx . \cos. x.$$

§. 34. **(Differential der Kreisbogen).** Um das Differential des Kreisbogens, zu welchem die Größe x als Sinus gehört, oder um $d . \text{arc}. \sin. x$ zu finden, sey $y = \text{arc}. \sin. x$; also auch $x = \sin. y$. Differirt man den letzten Ausdruck nach §. 33, so erhält man

$$dx = dy . \cos. y = dy . \sqrt{1 - \sin.^2 y} = dy . \sqrt{1 - x^2},$$

also ist auch

$$d . \text{arc}. \sin. x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

I. Ganz eben so erhält man auch

$$d . \text{arc}. \cos. x = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \,.\, \text{arc. tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \,.\, \text{arc. cotang. } x = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \,.\, \text{arc. sec. } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$d \,.\, \text{arc. sin. vers. } x = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \quad \text{u. s. w.}$$

§. 35. (Zusammenstellung des Vorhergehenden). Wenn man die bisher von §. 27 an erhaltenen Ausdrücke zur bequemeren Übersicht zusammenstellt, so hat man

$$d \,.\, xy = x\,dy + y\,dx,$$

$$d \,.\, \frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$d \,.\, x^n = n x^{n-1}\,dx,$$

$$d \,.\, \text{log. nat. } x = \frac{dx}{x} \quad \text{und}$$

$$d \,.\, \text{log. com. } x = m \,.\, \frac{dx}{x}.$$

$$d \,.\, a^x = a^x dx \,.\, \text{log. nat. } a \quad \text{und}$$

$$d \,.\, e^x = e^x dx,$$

$$d \,.\, x^y = y x^{y-1} dx + x^y dy \,.\, \text{log. nat. } x.$$

$$d \,.\, \text{sin. } x = dx \text{ cos. } x,$$

$$d \,.\, \text{cos. } x = -dx \text{ sin. } x,$$

$$d \,.\, \text{tang. } x = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x},$$

$$d \,.\, \text{cotang. } x = -\frac{dx}{\text{sin.}^2 x},$$

$$d \,.\, \text{arc. sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \,.\, \text{arc. cos. } x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \,.\, \text{arc. tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \,.\, \text{arc. cotang. } x = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \,.\, \text{arc. sec. } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$d \,.\, \text{arc. sin. vers. } x = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

§. 36. (Beyspiele zu dem Vorhergehenden.) Wir wollen nun die Vorschriften der vorhergehenden Nummer auf folgende Beyspiele anwenden, in welchen das Zeichen log. der Kürze wegen statt log. nat. gesetzt wurde, und wo e die in §. 32 I. erwähnte Zahl bezeichnet, deren natürlicher Logarithmus gleich der Einheit ist.

Sey zuerst

$$u = \log. \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

gegeben.

Setzt man

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \text{ so ist } du = \frac{dy}{y}.$$

Differentiirt man aber den Ausdruck von y nach §. 28, so hat man

$$dy = \frac{(a^2 + x^2) - x^2(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und daher

$$du = \frac{a^2 dx}{x(a^2 + x^2)}.$$

Sey eben so

$$u = \log. \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

gegeben.

Setzt man

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \text{ und}$$
$$z = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x},$$

so erhält man

$$u = \log. \frac{y}{z} = \log. y - \log. z, \text{ also auch}$$

$$du = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}.$$

Allein es ist

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= -\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right] = -\frac{z\,dx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

und eben so hat man auch

$$dz = \frac{y\,dx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

so daß daher ist

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{(y^2+z^2)\,dz}{2yz\sqrt{1-x^2}}.$$

Da man aber hat

$$y^2 + z^2 = 4 \quad \text{und} \quad yz = 2x,$$

so findet man endlich

$$du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf diese oder ähnliche Weise wird man sich auch von der Richtigkeit der folgenden Ausdrücke überzeugen, die hier, der Kürze wegen, ohne weitere Erläuterung zusammen gestellt werden.

Ist $\quad u = \frac{3}{2}(a+\sqrt{x})^{\frac{4}{3}} - 6a(a+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}},$

so hat man

$$dy = \frac{dx}{(a+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}}.$$

Ist $\quad u = \frac{1}{7}(a+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{2a}{5}(a+x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}a^2(a+x^2)^{\frac{3}{2}},$

so hat man

$$dy = x^5\,dx\sqrt{a+x^2}.$$

Ist $\quad u = \frac{1}{2}\log.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x},$

so hat man

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ist $\quad u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\log.(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}),$

so hat man

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

also das Differential von u reell, obgleich u selbst imaginär ist.

Eben so wird man erhalten:

$$d\,.\,\log.[x+\sqrt{1+x^2}] = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$d\,.\,(\log. x)^n = n(\log. x)^{n-1}\frac{dx}{x},$$

$$d \,.\, \text{arc. sin.} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{2\,dx}{1+x^2},$$

$$d \,.\, \text{arc. tang.} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\,dx}{1+x^2},$$

$$d \,.\, \log.\sin.x = dx \,.\, \text{cotang.}\,x,$$

$$d \,.\, \text{arc. sin.}\, 2x\sqrt{1-x^2} = \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d \,.\, \text{arc. tang.} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{dx}{2\,(1+x^2)},$$

$$d \,.\, \cos.\left(\log.\frac{1}{x}\right) = \frac{dx}{x} \,.\, \sin.\left(\log.\frac{1}{x}\right);$$

$$d \,.\, \cos.x^{\sin.x} = dx\cos.x^{\sin.x}\left(\cos.x\,.\,\log.\cos.x - \frac{\sin.^2x}{\cos.x}\right),$$

$$d \,.\, \log.(\log.x) = \frac{dx}{x\,\log.x},$$

$$d \,.\, e^x\,(x-1) = e^x \,.\, x\,dx, \text{??}$$

$$d \,.\, e^x\,(x^2-2x+2) = e^x \,.\, x^2\,dx,$$

$$d \,.\, a^{b^x} = a^{b^x} \,.\, b^x dx \,.\, \log.a \,.\, \log.b,$$

$$d \,.\, e^{e^x} = e^{e^x} e^x dx.$$

III.

Wiederholte Differentiationen und Taylor's Lehrsatz.

§. 37. (Höhere Differentialien). Da der Differential-Coefficient irgend einer Funktion von x wieder, wie wir aus allem Vorhergehenden gesehen haben, eine Funktion von x ist, so kann auch er ebenfalls einer neuen Differentiation unterworfen werden. Ist z. B. $u = x^n$, so ist der Differential-Coefficient dieses Ausdrucks (nach §. 29)

$$\frac{du}{dx} = nx^{n-1},$$

und wenn man diese Größe nx^{n-1} neuerdings nach §. 29 differentiirt, so erhält man $n\,(n-1)\,x^{n-2}\,dx$ für das Differential derselben, oder,

was dasselbe ist, für das zweyte Differential der ursprünglichen Größe u. Drückt man dieses zweyte Differential von u durch d^2u aus, so hat man

$$d^2u = n(n-1)x^{n-2}dx^2,$$

wo daher das Zeichen d^2 nicht mehr, wie sonst, das Quadrat von d, sondern bloß die zweymal wiederholte Differentiation der Größe u andeutet, und wo, wie man sieht, dieser Ausdruck d^2u in Beziehung auf die Ordnung des Unendlichkleinen, mit $(dx)^2$ oder mit dem Quadrate des Differentials dx von gleicher Art ist, oder wo d^2u und dx^2 als homogene Größen zu betrachten sind (vgl. §. 25, I.). Ganz eben so wird man auch das dritte Differential von u erhalten, wenn man den Ausdruck

$$n(n-1)x^{n-2}$$

noch einmal differentiirt, wodurch man also haben wird

$$d^3u = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3 \quad \text{u. s. w.}$$

§. 38. (**Beständigkeit eines ersten Differentials**). Man sieht, daß bey diesen ferneren Differentialien der Funktion $u=f(x)$ das erste Differential dx der Stammgröße x als constant, also

$$d^2x = d^3x \ldots = 0$$

vorausgesetzt worden ist, weil sonst z. B. das zweyte Differential des Ausdrucks $u = x^n$ (nach §. 27 differentiirt)

$$d^2u = n(n-1)x^{n-2}dx + nx^{n-1}d^2x$$

keinen bestimmten Sinn, keine fixe Bedeutung mehr haben würde. Betrachtet man nämlich x als die Abscisse, und u als die darauf senkrechte Ordinate einer krummen Linie, zu welcher die Gleichung $u=f(x)$ gehört, so zeigt uns das erste Differential du der Größe u, wie sich die Differenz $u'-u=du$ zweyer nächsten Ordinaten verhält, deren senkrechter Abstand von einander die gegebene Größe dx ist. Die höheren Differentialien d^2u, d^3u... dieses Ausdrucks aber sollen uns offenbar das Verhalten mehrerer auf einander folgender, einander nächsten Ordinaten dieser krummen Linie kennen lehren, und dazu ist es nothwendig, daß alle diese Ordinaten unter sich gleich weit abstehen, oder daß für alle die Größe dx eine und dieselbe sey, weil sich sonst, wenn auch diese dx willkürlich veränderlich wären, nichts Bestimmtes über die ihnen zukommenden Ordinaten feststellen lassen würde.

In der That haben auch alle Ausdrücke von zweyten und höheren Differentialien, in welchen kein erstes Differential als constant ange-

nommen wird, keine bestimmte Bedeutung mehr. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$u = \frac{x^2 d^2 x}{d x^2},$$

und ist darin kein Differential constant angenommen, so wird man, um demselben eine bestimmte Bedeutung zu geben, irgend ein willkürliches erstes Differential als constant voraussetzen müssen. Nimmt man also z. B. $dx = \text{const.}$, so ist $d^2 x = 0$, und daher auch $u = 0$. Wählt man aber ein anderes erstes Differential, z. B. das von x^2 als constant, so ist $d.x^2 = \text{const.}$ oder $2xdx = \text{const.}$, und daher

$$2 dx^2 + 2 x d^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{d x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{d^2 x}{d x^2}$ in dem vorigen Ausdruck von u, so erhält man $u = -x$; ein Werth, der von dem vorigen $u = 0$ verschieden ist. Wollte man aber $d.x^3 = \text{const.}$ annehmen, so würde man $u = -2x$ finden, und $d.x^4 = \text{const.}$ würde $u = -3x$ geben u. s. w., so daß man also über die wahre Bedeutung der Größe u ganz ungewiß bleiben würde.

§. 39. (Taylor's Theorem). Sey $u = f(x)$ als eine Funktion von x gegeben. Wenn in dieser Funktion die Stammgröße x in $x + y$ übergeht, welches wird der Ausdruck der so veränderten Funktion $u' = f(x + y)$ seyn?

Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir zuerst, daß eine willkürliche Funktion des Binoms $(x + y)$ immer denselben Differential-Coefficienten geben wird, welche von den beyden Größen x und y man auch als die veränderliche gewählt haben mag. Ist z. B.:

$$u' = (x + y)^n, \quad \text{so ist} \quad \frac{du'}{dx} = n (x + y)^{n-1},$$

und eben so ist auch

$$\frac{du'}{dy} = n (n + y)^{n-1}.$$

Ist aber

$$u' = \log. (x + y), \quad \text{so ist} \quad \frac{du'}{dx} \text{ so wie } \frac{du'}{dy'} \text{ gleich } \frac{1}{x + y} \quad \text{u. s. w.}$$

Dieß vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, daß der gesuchte Ausdruck von $u' = f(x + y)$ sich in eine Reihe entwickeln lasse, die nach den Potenzen der Größe y fortgeht. Nehmen wir für diese Reihe folgende Gestalt an:

$$f(x+y) = L + My^{\alpha} + Ny^{\beta} + Py^{\gamma} + \ldots$$

wo L, M, N... noch unbekannte Funktionen von x sind, die kein y enthalten, und wo α, β, γ... unbestimmte Exponenten vorstellen, die wir nun näher bestimmen wollen.

Man sieht zuerst von selbst, daß keiner dieser Exponenten negativ seyn kann. Denn wenn z. B. das zweyte Glied jener Entwicklung die Form $My^{-\alpha} = \frac{M}{y^{\alpha}}$ hätte, so würde für $y=0$ die zweyte Seite der vorhergehenden Gleichung unendlich groß werden, während doch die erste Seite nur $f(x)$ geben würde, was unmöglich ist.

Wenn aber alle Exponenten α, β, γ... positiv sind, so erhält man, wenn man $y=0$ setzt, sofort

$$f(x) = L,$$

wodurch daher bereits der erste Coefficient L unserer Reihe bestimmt wird. Bildet man dann den Differential-Coefficienten jener Entwicklung der Größe $f(x+y)$, und zwar so, daß man zuerst x und dann y als die veränderliche Größe betrachtet, so erhält man:

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dx}\right)y^{\alpha} + \left(\frac{dN}{dx}\right)y^{\beta} + \left(\frac{dP}{dx}\right)y^{\gamma} + \ldots \quad \text{und}$$

$$\alpha My^{\alpha-1} + \beta Ny^{\beta-1} + \gamma Py^{\gamma-1} + \ldots,$$

und diese beyden Ausdrücke müssen, der oben vorausgeschickten Bemerkung zu Folge, identisch seyn, welches auch der Werth von y seyn mag. Dieß kann aber nur dann Statt finden, wenn in beyden Ausdrücken gleiche Exponenten und Coefficienten von y vorkommen. Allein, wenn die Exponenten in dem ersten Ausdrucke steigend geordnet sind, so sind sie dieß auch in dem zweyten, und man hat daher

$$\alpha - 1 = 0, \quad \beta - 1 = \alpha, \quad \gamma - 1 = \beta \quad \text{u. s.}$$

woraus sofort folgt:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3 \quad \text{u. s.}$$

Dieß von den Exponenten vorausgesetzt, gibt dann die Vergleichung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$M = \left(\frac{dL}{dx}\right), \quad N = \frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dx}\right), \quad P = \frac{1}{3}\left(\frac{dN}{dx}\right) \quad \text{u. s.}$$

oder da bereits $L = f(x) = u$ war:

$$M = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad N = \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \quad P = \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \quad \text{u. s.}$$

so daß man daher für die gesuchte Entwicklung den folgenden Ausdruck hat:

$$u' = u + y\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{y^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots$$

von welcher Reihe das Gesetz des Fortgangs für sich deutlich ist. Sie ist unter der Benennung des Taylor'schen Theorems bekannt, weil Taylor sie der erste öffentlich mitgetheilt hat. (Andere Beweise dieses wichtigen Satzes findet man in Lacroix's Traité du Calc. diff. et intégral. Vol. I. S. 160 u. 277, und Vol. III. S. 60 u. 396).

Hat man also die Funktion $u = fx$ gegeben, und geht in ihr die Stammgröße x über in $x + h$, so geht u über in

$$u' = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots$$

§. 40. (**Maclaurin's Theorem**). Macht man in dem zuletzt gefundenen Ausdrucke die Größe $x = 0$, und bezeichnet man die dieser Annahme entsprechenden Werthe von

$$\begin{array}{ccc} u & \text{durch} & U, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) & \text{»} & U', \\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) & \text{»} & U'' \text{ u. f.} \end{array}$$

so erhält man sofort

$$f(y) = U + y \,.\, U' + \frac{y^2}{1.2} \,.\, U'' + \frac{y^3}{1.2.3} \,.\, U''' + \ldots$$

Da aber dieser Ausdruck für jeden willkürlichen Werth von y Statt haben muß, so kann man in ihm auch x statt y setzen, wodurch die Größen $U, U', U'' \ldots$ die kein y enthalten, nicht geändert werden. Sind daher, wie zuvor, $U, U', U \ldots$ die Werthe von

$$u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \ldots$$

unter der Voraussetzung, daß man in den letzten Ausdrücken die Größe x gleich Null gesetzt hat, so erhält man für die Entwicklung der Funktion $u = f(x)$ in einer nach den Potenzen von x fortgehenden Reihe den Ausdruck

$$u = f(x) = U + x \,.\, U' + \frac{x^2}{1.2} \,.\, U'' + \frac{x^3}{1.2.3} \,.\, U''' + \ldots$$

und dieser Ausdruck ist unter der Benennung des Theorems von Mac-

laurin bekannt, obschon er bereits früher von Stirling gefunden worden seyn soll.

Beschließen wir diesen Gegenstand mit der Bemerkung, daß sich die oben gegebene Taylor'sche Reihe in manchen Fällen, wenn der Stammgröße x einer Funktion bestimmte Werthe beygelegt werden, auf die Entwicklung dieser Funktion nicht anwenden lassen. Dieß wird nämlich immer dann Statt haben, wenn die wahre Entwicklung der Funktion auf gebrochene oder negative Exponenten von h führt, die in der Taylor'schen Reihe nicht vorkommen. Ist z. B.

$$u = \sqrt{x^2 - a^2}$$

gegeben, und sucht man

$$u' = \sqrt{(x + h)^2 - a^2}$$

für den bestimmten Werth von $x = a$, so hat man

$$u' = \sqrt{(a + h)^2 - a^2} = \sqrt{2ah + h^2} = \sqrt{2ah} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h^3}{2a}} + \ldots$$

und ein solcher Ausdruck kann durch die Taylor'sche Reihe nicht gegeben werden. In allen diesen, übrigens selten vorkommenden Fällen, wird man also die Entwicklung der Funktion ganz auf die gewöhnliche Art vornehmen, so wie es in diesem Beyspiele eben geschehen ist. Wir werden später wieder auf diese Bemerkung zurückkommen.

IV.

Entwicklung der Funktionen in Reihen.

§. 41. (Newton's Binomium). Die beyden vorhergehenden Theoreme biethen uns sehr vortheilhafte Mittel zur Entwicklung der verschiedenen Funktionen in Reihen dar.

Sey zuerst die Funktion $u = f(x) = x^n$ gegeben. Man suche

$$u' = f(x + y) = (x + y)^n,$$

wo n was immer für eine Zahl bezeichnet.

Nach §. 29 hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = n x^{n-1},$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) = n (n - 1) x^{n-2},$$
$$\left(\frac{d^3 u}{d x^3}\right) = n (n - 1) (n - 2) x^{n-3} \quad \text{u. s. w.}$$

also ist auch sofort (nach §. 39)

$$(x+y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \ldots$$

und diese Entwicklung der Funktion $(x+y)^n$ ist unter dem Namen von Newton's Binom bekannt. Das Gesetz des Fortgangs der Reihe ist für sich klar. Wenn die Glieder derselben in der angeführten Ordnung durch 0, 1, 2, 3... bezeichnet werden, so ist das r^{te} Glied derselben

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(r-1)]}{1.2.3\ldots(r-1)r} . x^{n-r} y^r.$$

I. Ist die Größe y negativ, so erhält man die analoge Entwicklung der Größe $(x-y)^n$, wenn man in der letzten Reihe die zu dem Index 1.3.5 gehörenden Glieder negativ setzt.

Nimmt man aber $x=1$, so hat man

$$(1+y)^n = 1 + n y + \frac{n(n-1)}{1.2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^3 + \ldots$$

oder, wenn man in diesem Ausdrucke $1+y=z$ setzt:

$$z^n = 1 + n(z-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(z-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(z-1)^3 + \ldots$$

II. Setzt man in der gefundenen Entwicklung $y = \frac{px}{1-p}$, also auch $x + y = \frac{x}{1-p}$, so hat man $(x+y)^n = x^n . (1-p)^{-n}$. Es ist aber, nach derselben Entwicklung:

$$(1-p)^{-n} = 1 + np + \frac{n(n+1)}{1.2} p^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} p^3 + \ldots$$

also ist auch, wenn man den Werth von $p = \frac{y}{x+y}$ wieder herstellt:

$$(x+y)^n = x^n . \left[1 + n\left(\frac{y}{x+y}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{y}{x+y}\right)^3 + \ldots\right],$$

welche Reihe oft viel schneller convergirt, als der oben für $(x+y)^n$ gefundene Ausdruck.

III. Diese Reihen sind sehr geschickt, um durch sie die Wurzeln irgend einer gegebenen Zahl zu finden. Es war nämlich

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \dots\right].$$

Man wird daher jede Zahl, aus welcher die n^{te} Wurzel gezogen rden soll, in zwey Theile x und y so theilen, daß x eine vollständige Potenz irgend einer andern Zahl, und daß $\frac{y}{x}$ ein eigentlicher Bruch, wo dann die Reihe desto schneller convergiren wird, je kleiner dieser Bruch ist.

Für die Quadratwurzel z. B. hat man $n = \frac{1}{2}$, also auch

$$(x+y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \dots\right]$$

Sucht man z. B. die Quadratwurzel von der Zahl 6, so kann an $x = 4$ und $y = 2$ nehmen, so daß man hat

$$\sqrt{6} = 2\left[1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{128} - \frac{5}{2048} + \dots\right].$$

Da aber diese Reihe nur langsam convergirt, so kann man vortheilhafter auf folgende Weise verfahren.

Nimmt man bloß die zwey ersten Glieder der Reihe, so ist

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Von $\frac{5}{2}$ ist aber das Quadrat $\frac{25}{4}$, oder um $\frac{1}{4}$ größer als die gegebene Zahl 6. Ist daher $x = \frac{25}{4}$ und $y = -\frac{1}{4}$, so erhält man, wenn man diese Werthe von x und y in dem vorhergehenden Ausdrucke von $(x+y)^{\frac{1}{2}}$ substituirt:

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{25^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{25^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{25^4} - \dots\right]$$

oder wenn man diese Glieder summirt:

$$\sqrt{6} = 2.4494897.$$

Will man aber eine noch schneller convergirende Reihe, so kann man von dem letzten Ausdrucke wieder die zwey ersten Glieder nehmen, wodurch man erhält

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20},$$

wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ zu groß ist. Setzt man also $x = \frac{2401}{400}$ und $y = -\frac{1}{400}$, so erhält man die sehr schnell convergirende Reihe

$$\sqrt{6} = \frac{49}{20} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2401} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2401^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2401^3} - \dots\right],$$

oder wenn man diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt:

$$\sqrt{6} = \frac{49}{20}\cdot\left\{\begin{array}{l} +\ 1 \\ -\ 0.00020\ 82465\ 639 \\ -\ 0.00000\ 00216\ 830 \\ -\ 0.00000\ 00000\ 045\ \ldots \end{array}\right\},$$

das heißt

$$\sqrt{6} = 2.44948\ 97427\ 841\ \ldots$$

Ganz eben so wird man auch mit der Ausziehung der dritten und jeder andern Wurzel verfahren. Man wird so z. B. erhalten:

$$\sqrt[3]{9} = 2.0800837,\quad \sqrt[10]{10} = 1.2589255,$$

$$\sqrt[100]{10} = 1.0232930,\ \text{u. f.}$$

§. 42. (Entwicklung der Logarithmen in Reihen.) Sey nun die Funktion

$$u = \log.\ \text{com.}\ (1+x)$$

gegeben, so hat man (nach §. 31)

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{m}{1+x},\quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{-m}{(1+x)^2},\quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{2m}{(1+x)^3},\ \text{u. f.};$$

also auch, nach Maclaurin's Theorem (§. 40), wenn man in diesen Ausdrücken $x=0$ setzt:

$$U = 0,\quad U' = m,\quad U'' = -m,\quad U''' = 2m,\ \text{u. f.};$$

und wenn man diese Werthe in

$$u = U + xU' + \frac{x^2}{1.2}U'' + \ldots$$

substituirt:

$$\log.\ \text{com.}\ (1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

I. Man kann diesem Ausdrucke verschiedene andere Gestalten geben. Ist z. B. die Größe x negativ, so hat man

$$\log.\ \text{com.}\ (1-x) = -m\left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots\right),$$

also auch, wenn man beyde Ausdrücke von einander subtrahirt:

$$\log.\ \text{com.}\ \frac{1+x}{1-x} = 2m\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots\right).$$

Setzt man überdieß in dem letzten Ausdrucke statt x die Größe $\frac{y}{2x+y}$, so hat man

$$\log.\text{com.}(x+y)$$
$$= \log.\text{com.}\,x + 2m\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{y^3}{3(2x+y)^3} + \frac{y^5}{5(2x+y)^5} + \dots\right]$$

u. s. f.

II. Die vorhergehenden Ausdrücke reichen hin, die Logarithmen aller natürlichen Zahlen auf eine bequeme Weise zu berechnen. Setzt man z. B. in der letzten Gleichung $x = y = 1$, so erhält man, da $\log. 1 = 0$ ist:

$$\log.\text{com.}\,2 = 2m\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \dots\right),$$

oder wenn man diese Brüche entwickelt:

$$\log.\text{com.}\,2 = m(0.69314\ 71806).$$

Eben so gibt $x = 2$ und $y = 1$

$$\log.\text{com.}\,3 = \log.\text{com.}\,2 + 2m\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \dots\right) \text{ oder}$$

$$\log.\text{com.}\,3 = m(1.09861\ 22887),$$

und auf dieselbe Weise findet man

$$\log.\text{com.}\,5 = m(1.60943\ 79124) \text{ und}$$
$$\log.\text{com.}\,7 = m(1.94591\ 01490).$$

Die übrigen Logarithmen bis 10 aber findet man durch bloße Addition aus dem Vorhergehenden, da

$$\log. 4 = 2\log. 2,$$
$$\log. 6 = \log. 2 + \log. 3,$$
$$\log. 8 = 3\log. 2,$$
$$\log. 9 = 2\log. 3 \text{ und}$$
$$\log. 10 = \log. 2 + \log. 5 = m(2.30258\ 50930) \text{ ist.}$$

§. 43. (Entwicklung der Exponentialgrößen.) Ist die Funktion $u = a^x$ gegeben, so hat man (§. 32)

$$\frac{du}{dx} = a^x . \log.\text{nat.}\,a,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = a^x . (\log.\text{nat.}\,a)^2,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = a^x . (\log.\text{nat.}\,a)^3, \text{ u. f.};$$

also auch, wenn man in diesen Ausdrücken $x = 0$ setzt:

$$U = 1,$$

$$U' = \log. \text{nat.}\, a,$$
$$U'' = (\log. \text{nat.}\, a)^2,$$
$$U''' = (\log. \text{nat.}\, a)^3, \ldots$$

und daher nach Maclaurin's Theorem (§. 40)

$$a^x = 1 + (x \log. \text{nat.}\, a) + \frac{1}{1.2}(x \log. \text{nat.}\, a)^2 + \frac{1}{1.2.3}(x \log. \text{nat.}\, a)^3 + \ldots$$

§. 44. (**Vergleichung der natürlichen und gemeinen Logarithmen.**) Wir haben oben (§. 31 und 42) gesehen, daß man die gemeinen Logarithmen aller Zahlen erhält, wenn man die natürlichen Logarithmen derselben Zahlen durch die Größe m multiplicirt, so daß also für die natürlichen Logarithmen die Größe m gleich der Einheit ist. Wir wollen nun diese Zahl m näher bestimmen.

In jedem logarithmischen Systeme muß es eine Zahl geben, deren Logarithmus gleich der Einheit ist. Man nennt diese Zahl die Basis des logarithmischen Systems. Sey also a die Basis der gemeinen, und e die Basis der natürlichen Logarithmen, so daß man hat

$$\log. \text{com.}\, a = 1 \quad \text{und} \quad \log. \text{nat.}\, e = 1.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, für jede Zahl N die Gleichung besteht:

$$\log. \text{com.}\, N = m \log. \text{nat.}\, N,$$

so hat man auch, wenn man sowohl N = a, als auch N = e setzt:

$$\log. \text{com.}\, a = m \log. \text{nat.}\, a \quad \text{und} \quad \log. \text{com.}\, e = m \log. \text{nat.}\, e,$$

und daraus folgt sofort für die Bestimmung der Größe m der doppelte Ausdruck

$$m = \log. \text{com.}\, e \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{\log. \text{nat.}\, a}.$$

I. Substituirt man diesen Werth von $\log. \text{nat.}\, a = \frac{1}{m}$ in der letzten Gleichung des §. 43, so erhält man für die Exponentialgröße a^x den Ausdruck

$$a^x = 1 + \left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

Setzt man aber in derselben Gleichung des §. 43, da in ihr die Größe a ganz willkürlich ist, statt a die Größe e, so hat man, da $\log. \text{nat.}\, e = 1$ ist:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Wird in dieser Reihe die Größe $x = 1$ gesetzt, so hat man

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

und wenn man diese Brüche auf Decimalen zurückführt:

$$e = 2.718281\ 828459\ 045235\ 360287 \ldots,$$

wodurch daher die Basis des Systems der natürlichen Logarithmen bestimmt ist.

II. Um eben so auch die Größe m oder den sogenannten Modul des gemeinen Logarithmen-Systems zu bestimmen, mit welchem man nämlich die natürlichen Logarithmen, deren Basis e ist, multiplicirt, um die gemeinen Logarithmen zu erhalten, deren Basis a ist, wollen wir wieder zu dem Ausdrucke des §. 42 zurückgehen. Wir haben daselbst die Gleichung erhalten:

$$\log.\text{com.}(1 + x) = m(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots).$$

Setzt man in demselben die willkürliche Größe $1 + x = a$, so erhält man, da $\log.\text{com.}\,a = 1$ ist:

$$\frac{1}{m} = (a - 1) - \tfrac{1}{2}(a - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a - 1)^3 - \ldots,$$

und durch diese Gleichung wird die Abhängigkeit der beyden Größen a und m von einander ausgedrückt, so daß also m bekannt wird, wenn a gegeben ist. Bekanntlich hat man aber in demjenigen Systeme, nach welchem diejenigen Logarithmentafeln construiret sind, mit welchen wir zu rechnen pflegen, die Basis a gleich der Zahl zehn angenommen, so daß man daher für dieses System hat

$$\frac{1}{m} = 9 - \tfrac{1}{2}9^2 + \tfrac{1}{3}9^3 - \ldots$$

Allein diese Reihe convergirt erst in ihren höheren Gliedern, und auch da zu langsam, als daß man durch sie die Größe m bequem finden könnte. Man kann sie aber leicht zu diesem Zwecke geschickter machen, wenn man bemerkt, daß die n^{te} Wurzel irgend einer selbst sehr großen Zahl der Einheit immer desto näher kömmt, je größer n ist. Setzt man also in der ersten Gleichung dieses Abschnittes wieder $1 + x = a$, so hat man

$$\log.\text{com.}\,a = m\left[(a - 1) - \tfrac{1}{2}(a - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a - 1)^3 - \ldots\right].$$

Allein es ist auch $\log.\text{com.}\,a = \omega \log.\text{com.}\sqrt[\omega]{a}$, wo ω irgend eine willkürliche Zahl bezeichnet; also ist auch, wenn man diesen Werth

von a substituirt:

$$\log.\text{com}.\,a = m\omega\left[(\sqrt[\omega]{a}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[\omega]{a}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[\omega]{a}-1)^3 - \ldots\right];$$

und daher, da $\log.\text{com}.\,a = 1$ ist:

$$\frac{1}{m} = \omega\left[(\sqrt[\omega]{a}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[\omega]{a}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[\omega]{a}-1)^3 - \ldots\right];$$

und diese Reihe convergirt desto schneller, je größer die Zahl ω gegen die Einheit ist. Sey z. B. $\omega = 10$, so ist, wie wir schon oben (§. 41) gefunden haben, $\sqrt[\omega]{a} = \sqrt[10]{10} = 1.2589255$; also hat man, wenn man der Kürze wegen $k = \sqrt[\omega]{a}-1$ setzt:

$$\begin{aligned}
k &= 0.2589255\\
-\tfrac{1}{2}k^2 &= -0.0335212\\
\tfrac{1}{3}k^3 &= 0.0057863\\
-\tfrac{1}{4}k^4 &= -0.0011237\\
\tfrac{1}{5}k^5 &= 0.0002327\\
-\tfrac{1}{6}k^6 &= -0.0000502\\
\tfrac{1}{7}k^7 &= 0.0000111\\
-\tfrac{1}{8}k^8 &= -0.0000025\\
\tfrac{1}{9}k^9 &= 0.0000006\\
-\tfrac{1}{10}k^{10} &= -0.0000001\\
\hline
\text{Summe} \ldots &0.2302585;
\end{aligned}$$

und wenn man diese Summe zehnfach nimmt und die Rechnung noch weiter fortsetzt, so findet man

$$\frac{1}{m} = 2.302585\ 092994\ 045684\ 017991\ \ldots,$$

und daher auch

$$m = 0.434294\ 481903\ 251827\ 651129\ \ldots$$

III. Auch hätte man den Werth des Moduls m ohne Hülfe dieser Reihe finden können, da wir bereits oben (§. 42) den Logarithmus der Zahl 10 erhalten haben. Es war nämlich

$$\log.\text{com}.\,10 = m\,(2.3025850930),$$

und da $\log.\text{com}.\,10 = 1$ ist, so hat man sofort

$$m = \frac{1}{2.30258\ldots} = 0.43429\ \ldots,$$

wie zuvor.

§. 45. (Entwicklung der trigonometrischen Funktionen.) Ist die Funktion $u = \sin. x$ gegeben, so hat man (nach §. 33)

$$\frac{du}{dx} = \cos. x, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin. x, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = -\cos. x, \text{ u. f.}$$

also auch, nach Maclaurin's Theorie (§. 40):

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

und eben so erhält man auch

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

Man muß aber bey diesen und ähnlichen Ausdrücken bemerken, daß die Größe x in Secunden oder in Theilen des Kreisbogens, die Größe sin. x und cos. x aber in Theilen des Halbmessers gegeben, daß also diese beyden Arten von Größen heterogen sind, und daher auf dieselbe Einheit zurückgebracht werden müssen. Nennt man π die halbe Peripherie eines Kreises, deren Halbmesser die Einheit ist, wo die Größe π in Theilen dieses Halbmessers ausgedrückt ist, so hat man, da die halbe Peripherie $(180).60^2$ Secunden enthält, für den Theil x des Halbmessers, welcher der Länge eines Kreisbogens von einer Secunde entspricht,

$$180.60^2 : \pi = 1'' : x.$$

Es ist aber, wie wir bald sehen werden, $\pi = 3.14159265359\ldots$, also ist auch

$$x = \frac{\pi}{180.60^2} = 0.00000\,484814,$$

und für diese Zahl x wollen wir künftig der Kürze wegen das Zeichen sin. 1'' setzen, so daß man hat

$$\sin. 1'' = 0.00000\,484814 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin. 1''} = 206264''.806247.$$

Um daher eine Anzahl Secunden in Theile des Halbmessers zu verwandeln, wird man die ersten durch sin. 1'' multipliciren, und umgekehrt, um Theile des Halbmessers in Secunden zu verwandeln, wird man jene Theile des Halbmessers durch $\frac{1}{\sin. 1''}$ multipliciren, wo man hat

$$\log. \text{com.} \sin. 1'' = 4.6855749 \quad \text{und} \quad \log. \text{com.} \frac{1}{\sin. 1''} = 5.3144251.$$

Diesem gemäß sollten daher die vorhergehenden Ausdrücke vollständig so geschrieben werden:

$$\sin. x = (x \sin. 1'') - \frac{(x \sin. 1)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos. x = 1 - \frac{(x \sin. 1)^2}{1.2} + \frac{(x \sin. 1)^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

und dasselbe ist auch bey allen folgenden ähnlichen Ausdrücken zu bemerken.

I. Ist $u = f(x) = \sin. x$ und $u' = f(x+y) = \sin.(x+y)$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = \cos. x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\sin. x, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = -\cos. x, \text{ u. f.}$$

also auch nach dem Taylor'schen Theorem (§. 39):

$$\sin.(x+y) = \sin. x + y \cos. x - \frac{y^2}{1.2} \sin. x - \frac{y^3}{1.2.3} \cos. x + \frac{y^4}{1.2.3.4} \sin. x + \ldots,$$

und eben so erhält man auch

$$\cos.(x+y) = \cos. x - y \sin. x - \frac{y^2}{1.2} \cos. x + \frac{y^3}{1.2.3} \sin. x + \ldots$$

§. 46. (**Entwicklung der Kreisbogen durch trigonometrische Funktionen.**) Um auch umgekehrt den Bogen eines Kreises durch seinen Sinus auszudrücken, sey $u = \text{arc.} \sin. x$, also auch (§. 34)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}, \text{ u. f. w.}$$

Entwickelt man diese Differential-Coefficienten noch weiter, und setzt dann in ihnen die Größe $x = 0$, so erhält man nach Maclaurin's Theorie (§. 40)

$$U = 0, \quad U' = 1, \quad U'' = 0, \quad U''' = 1 \text{ u. f. w.},$$

und daher für arc. sin. x oder x den Ausdruck

$$x = \sin. x + \frac{\sin.^3 x}{2.3} + \frac{3 \sin.^5 x}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin.^7 x}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \sin.^9 x}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

I. Ist aber $u = \text{arc. tang.} x$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = (1+x^2)^{-1}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -2x(1+x)^{-2},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3} \text{ u. f.},$$

und wenn man $x = 0$ setzt:

$$U = U'' = U^{IV} \ldots \text{ gleich Null, und}$$
$$U' = 1, \; U''' = -2, \; U^{V} = 2 \cdot 3 \cdot 4, \text{ u. s. w.;}$$

also auch

$$u = \text{tang.}\, u - \tfrac{1}{3}\text{tang.}^3 u + \tfrac{1}{5}\text{tang.}^5 u - \tfrac{1}{7}\text{tang.}^7 u + \ldots$$

§. 47. (Bestimmung der Peripherie des Kreises.) Mittelst der zwey vorhergehenden Reihen wird der Kreisbogen durch seinen Sinus und durch seine Tangente bestimmt. Dieß gibt ein bequemes Mittel, den Umfang 2π eines Kreises, dessen Halbmesser gleich der Einheit ist, zu finden. Setzt man nämlich in der ersten Reihe $\sin. x = 1$ oder $x = \frac{1}{2}\pi = 90$ Grade, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \ldots$$

Mehr convergent wird die Reihe für π, wenn man $\sin. x = \frac{1}{2}$ oder $x = \frac{1}{6}\pi = 30$ Grade setzt, wodurch man erhält

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^4.3} + \frac{3}{2^6.4.5} + \frac{3.5}{2^8.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2^{10}.4.6.8.9} + \ldots$$

Eben so gibt die zweyte Reihe, wenn man in ihr $\text{tang.}\, u = 1$ oder $u = \frac{\pi}{4} = 45$ Grade setzt:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

Allein alle diese Reihen sind immer noch zu wenig convergent. Doch läßt sich die letzte für u (in §. 46, I.) gegebene Reihe zu der Bestimmung des Werthes von π vortheilhaft anwenden, wenn man den Bogen π in zwey Theile theilt, deren Tangenten bekannt und sehr klein sind. Machin fand, daß der Bogen $\frac{1}{4}\pi$ gleich ist dem Vierfachen des Bogens a, der $\frac{1}{5}$ zur Tangente hat, weniger dem Bogen b, der $\frac{1}{239}$ zur Tangente hat. Um sich davon zu überzeugen, so hat man

$$\text{tang.}\, a = \tfrac{1}{5} \text{ und } \text{tang.}\, 2a = \frac{2\,\text{tang.}\, a}{1 - \text{tang.}^2 a} = \tfrac{5}{12}, \text{ oder}$$

$$\text{tang.}\, 4a = \frac{2\,\text{tang.}\, 2a}{1 - \text{tang.}^2 2a} = \tfrac{120}{119}.$$

Da die letzte Zahl etwas größer ist als $1 = \text{tang.}\frac{\pi}{4}$, so ist auch $4a > \frac{1}{4}\pi$. Macht man also $4a = A$ und $\frac{1}{4}\pi = B$, so hat man für den Unterschied $4a - \frac{1}{4}\pi$ oder für $A - B$ die Gleichung

$$\text{tang.}\,(A - B) = \frac{\text{tang.}\, A - \text{tang.}\, B}{1 + \text{tang.}\, A\ \text{tang.}\, B} = \tfrac{1}{239}.$$

Setzt man nun $A - B = b$, so ist auch $4a - \frac{1}{4}\pi = b$ oder $\frac{1}{4}\pi = 4a - b$, wie oben gesagt wurde.

Nimmt man nun zuerst $\text{tang.}\, u = \frac{1}{5}$ und dann $\text{tang.}\, u = \frac{1}{239}$, und substituirt diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung

$$u = \text{tang.}\, u - \tfrac{1}{3}\text{tang.}^3 u + \tfrac{1}{5}\text{tang.}^5 u - \ldots,$$

so erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = \left\{\begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \ldots\right) \end{array}\right\},$$

und durch diese sehr convergente Reihe findet man ohne Mühe für π den folgenden Werth

$$\pi = 3.141592\ 653589\ 793238\ 462643\ \ldots$$

§. 48. (**Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel durch die Potenzen der einfachen.**) Sey die Funktion $u = \sin. x$, das heißt $x = \text{arc.} \sin. u$ gegeben: man suche $\cos. nx$ durch $\sin. x$, oder was dasselbe ist, $\cos.(n\ \text{arc.} \sin. u)$ durch u auszudrücken.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an

$$\cos.(n\ \text{arc.} \sin. u) = \alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \ldots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die zu bestimmenden Coefficienten bezeichnen. Allein man sieht schon ohne eigentliche Berechnung, daß erstens $\alpha = 1$ seyn muß, da für $u = 0$ der Ausdruck $\cos.(n\ \text{arc.} \sin. u) = 1$ wird, und daß zweytens diese Reihe keine ungeraden Potenzen von u enthalten kann, weil für $+u$ und $-u$ der Ausdruck $\cos.(n\ \text{arc.} \sin. u)$ auch in Hinsicht auf sein Zeichen derselbe bleibt. Diesem gemäß werden wir daher annehmen können:

$$\cos.(n\ \text{arc.} \sin. u) = 1 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + \ldots$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, so erhält man

$$-n \sin.(n\ \text{arc.} \sin. u) = (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \ldots)\sqrt{1 - u^2},$$

und differentiirt man diese Gleichung wieder, so ist

$$\begin{aligned} -n^2 \cos.(n\ \text{arc.} \sin. u) &= (2A + 12Bu^2 + 30Cu^4 + \ldots)(1 - u^2) \\ &\quad - (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \ldots).u. \end{aligned}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für $\cos.(n\ \text{arc.} \sin. u)$ den oben angenommenen Werth $1 + Au^2 + Bu^4 + \ldots$, so erhält man

$$\begin{aligned} -n^2(1 + Au^2 + Bu^4 + \ldots) - (2A + 12Bu^2 + 30Cu^4 + \ldots)(1 - u^2) \\ + (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \ldots)u = 0. \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke, da er für alle Werthe von u wahr seyn soll, die Coefficienten von u^0, u^2, u^4, . . . einzeln gleich Null, so hat man für die Bestimmung der Größen A, B, C, . . . die Bedingungsgleichungen

$$1.2A + n^2 = 0,$$
$$3.4B + (n^2 - 2^2)A = 0,$$
$$5.6C + (n^2 - 4^2)B = 0,$$
$$7.8D + (n^2 - 6^2)C = 0 \text{ u. s.},$$

woraus man daher erhält

$$A = -\frac{n^2}{1.2},$$
$$B = \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4},$$
$$C = -\frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5.6} \text{ u. s.},$$

so daß also unsere gesuchte Reihe die folgende ist:

$$\cos. nx = 1 - \frac{n^2}{1.2}\sin.^2 x + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4}\sin.^4 x - \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin.^6 x + \ldots$$

Auf dieselbe Weise erhält man auch

$$\sin. nx = n\sin. x - \frac{n(n^2 - 1^2)}{1.2.3}\sin.^3 x + \frac{n(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5}\sin.^5 x - \ldots$$

Diese beyden Ausdrücke für cos. n x und sin. n x gelten für jede ganze oder gebrochene Zahl n; aber die erste ist nur dann endlich oder bricht nur dann ab, wenn n eine ganze gerade Zahl, und die zweyte, wenn n eine ungerade Zahl ist. Differentiirt man sie aber, so erhält man folgende zwey Reihen:

$$\sin. nx = \cos. x . \left[n\sin. x - \frac{n(n^2 - 2^2)}{1.2.3}\sin.^3 x + \frac{n(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5}\sin.^5 x - \ldots\right],$$

$$\cos. nx = \cos. x . \left[1 - \frac{(n^2 - 1^2)}{1.2}\sin.^2 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1.2.3.4}\sin.^4 x - \ldots\right],$$

und diese beyden Reihen brechen eben in jenen Fällen ab, in welchen ihre vorhergehenden correspondirenden ohne Ende fortgehen.

Auf diese Weise erhält man nach einigen leichten Reductionen die folgenden Ausdrücke:

$$\cos. 2x = 2\cos.^2 x - 1,$$
$$\cos. 3x = 4\cos.^3 x - 3\cos. x,$$
$$\cos. 4x = 8\cos.^4 x - 8\cos.^2 x + 1,$$
$$\cos. 5x = 16\cos.^5 x - 20\cos.^3 x + 5\cos. x \text{ ꝛc.}$$

$$\sin. 2x = \sin. x(2\cos. x),$$
$$\sin. 3x = \sin. x(4\cos.^2 x - 1),$$
$$\sin. 4x = \sin. x(8\cos.^3 x - 4\cos. x),$$
$$\sin. 5x = \sin. x(16\cos.^4 x - 12\cos.^2 x + 1) \text{ ꝛc.}$$

§. 49. (**Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Winkel durch die der vielfachen.**) Sey die Funktion $u = \cos.^n x$ gegeben, so findet man durch Differentiation

$$du = -nu \,.\, dx \frac{\sin. x}{\cos. x} \text{ oder}$$

$$nu \sin. x + \frac{du}{dx} \cos. x = 0.$$

Da man aber bekanntlich hat

$$\cos.^2 x = \tfrac{1}{2}(\cos. 2x + 1),$$
$$\cos.^3 x = \tfrac{1}{4}(\cos. 3x + 3\cos. x),$$
$$\cos.^4 x = \tfrac{1}{8}(\cos. 4x + 4\cos. 2x + 3) \text{ u. f.,}$$

so wird man daraus durch Analogie schließen, daß $\cos.^n x$ in eine Reihe entwickelt werden kann, deren Glieder die Faktoren

$$\cos. nx, \quad \cos. (n-2)x, \quad \cos. (n-4)x, \ldots$$

haben werden. Nehmen wir daher für diese Reihe die Form an:

$$u = A\cos. nx + B\cos. (n-2)x + C\cos. (n-4)x + \ldots,$$

und suchen wir die Werthe der Coefficienten A, B, C, ... zu bestimmen.

Substituirt man diesen Ausdruck von u so wie sein Differential du in der vorhergehenden Differentialgleichung, so erhält man

$$n\sin. x\,[A\cos. nx + B\cos. (n-2)x + C\cos. (n-4)x + \ldots]$$
$$-\cos. x\,[nA\sin. nx + (n-2)\,B\sin. (n-2)x$$
$$+ (n-4)\,C\sin. (n-4)x + \ldots] = 0.$$

Man hat aber, wie bekannt (Einl. §. 19, VI.),

$$2\sin.x\cos.nx = \sin.(n+1)x - \sin.(n-1)x \quad \text{und}$$
$$2\cos.x\sin.nx = \sin.(n+1)x + \sin.(n-1)x.$$

Bringt man diese Umformung in der vorhergehenden Gleichung an, und setzt dann die Factoren der Sinus der vielfachen Bögen, jeden für sich, gleich Null, so erhält man

$$B - An = 0,$$
$$2C - B(n-1) = 0,$$
$$3D - C(n-2) = 0,$$
$$4E - D(n-3) = 0 \text{ u. f.},$$

also auch

$$B = nA,$$
$$C = \frac{n(n-1)}{1.2}A,$$
$$D = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A \text{ u. f.},$$

und daher für den gesuchten Ausdruck von n

$$\cos.^n x = A.\left[\cos.nx + \frac{n}{1}\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)x + \ldots\right].$$

In dieser Gleichung ist der Factor A noch unbestimmt. Setzt man aber darin $x=0$, so hat man

$$1 = A.\left[1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots\right],$$

und daraus erhält man (nach §. 41) den Ausdruck $1 = A.(1+1)^n$ oder $A = \frac{1}{2^n}$, so daß man daher hat

$$\cos.^n x = \frac{1}{2^n}.\left[\cos.nx + \frac{n}{1}\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6x) + \ldots\right].$$

I. Der gefundene Ausdruck von $\cos.^n x$ gilt für alle, auch gebrochene Zahlen n. Wenn aber n eine ganze Zahl ist, so muß man bemerken, daß man im Verfolge der Glieder dieser Reihe auf negative Winkel kommt, deren Cosinus von den ihnen gleichen positiven Winkeln nicht verschieden ist. So hat man für $n=3$

$$\cos.^3 x = \frac{1}{2^3}(\cos.3x + 3\cos.x + 3\cos.x + \cos.3x) \quad \text{oder}$$

$$\cos.^3 x = \frac{1}{2^{3-1}}(\cos.3x + 3\cos.x),$$

so daß man also, wenn n eine ganze, ungerade Zahl ist, jene Reihe doppelt nehmen muß, um den Werth von $\cos.^n x$ zu erhalten. Ist aber n eine ganze gerade Zahl, z. B. $n = 4$, so hat man

$$\cos.^4 x = \frac{1}{2^4}(\cos.4x + 4\cos.2x + 6 + 4\cos.2x + \cos.4x) \text{ oder}$$

$$\cos.^4 x = \frac{1}{2^{4-1}}(\cos.4x + 4\cos.2x + \tfrac{1}{2}.6),$$

so daß man also für gerade n zwar auch die Reihe doppelt nimmt, aber mit Ausnahme des mittleren Gliedes, dessen Factor $\cos.0$ ist. Drückt man daher die Reihe auf folgende Art aus:

$$\cos.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \Big[\cos.nx + \frac{n}{1}\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \ldots\Big],$$

so wird man diese Reihe nur bis zu jenem Gliede fortsetzen, dessen Cosinus den ersten negativen Winkel enthält, und wenn man, für gerade n, auf das Glied kömmt, dessen Factor $\cos.0$ ist, von diesem Gliede nur die Hälfte nehmen.

Auf diese Weise erhält man

$$2\cos.^2 x = \cos.2x + 1,$$
$$4\cos.^3 x = \cos.3x + 3\cos.x,$$
$$8\cos.^4 x = \cos.4x + 4\cos.2x + 3,$$
$$16\cos.^5 x = \cos.5x + 5\cos.3x + 10\cos.x \text{ etc.}$$

II. Um daraus die analogen Reihen für $\sin.^n x$ abzuleiten, setze man in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\cos.^n x$ statt x die Größe $\frac{1}{2}\pi - x$, so hat man

$$\sin.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \Big[\cos.n(\tfrac{1}{2}\pi - x) + n\cos.(n-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \ldots\Big].$$

Um diesen Ausdruck einfacher darzustellen, muß man die beyden Fälle unterscheiden, wo n gerade und ungerade ist. Sey also zuerst eine gerade, und zwar eine sogenannte doppelt gerade oder durch 4 theilbare Zahl, also $n = 4, 8, 12, \ldots$ Für solche Zahlen ist aber

$$\cos.n(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos.nx, \quad \cos.(n-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\cos.(n-2)x,$$
$$\cos.(n-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos.(n-4)x \text{ u. s. w.},$$

und daher

$$\sin.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} . \Big[\cos. n x - n \cos. (n-2) x + \frac{n . n-1}{1 . 2} \cos. (n-4) x - \ldots\Big].$$

Ist aber n nur eine einfach gerade oder durch 2 theilbare Zahl, wie 2, 6, 10, ..., so hat man

$$\cos. n (\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\cos. n x, \; \cos. (n-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos. (n-2) x,$$
$$\cos. (n-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\cos. (n-4) x \text{ u. f.},$$

und daher

$$\sin.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} . \Big[-\cos. n x + n \cos. (n-2) x - \frac{n . n-1}{1 . 2} \cos. (n-4) x + \ldots\Big].$$

Um daher beyde Fälle zusammen zu fassen, so hat man für jede gerade Zahl n

$$\pm 2^{n-1} . \sin.^n x = \Big[\cos. n x - n \cos. (n-2) x + \frac{n . n-1}{1 . 2} \cos. (n-4) x - \ldots\Big],$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn n doppelt oder einfach gerade ist, und wo man, wie zuvor, nur die positiven Winkel, und endlich von dem Factor des cos. o nur die Hälfte nimmt.

Ganz eben so findet man auch für jede ungerade Zahl n

$$\pm 2^{n-1} . \sin.^n x = \Big[\sin. n x - n \sin. (n-2) x + \frac{n . n-1}{1 . 2} \sin. (n-4) x - \ldots\Big],$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn n gleich 1, 5, 9, ... oder gleich 3, 7, 11, ... ist.

Auf diese Weise erhält man

$$2 \sin.^2 x = -\cos. 2x + 1,$$
$$4 \sin.^3 x = -\sin. 3x + 3 \sin. x,$$
$$8 \sin.^4 x = \cos. 4x - 4 \cos. 2x + 3,$$
$$16 \sin.^5 x = \sin. 5x - 5 \sin. 3x + 10 \sin. x \text{ etc.}$$

§. 50. (Entwicklung der Potenz eines Polynoms.) Sey das Polynom oder der vielgliedrige Ausdruck

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

gegeben, von welchem die Anzahl der Glieder desselben unbestimmt ist. Man entwickle die n^{te} Potenz desselben in eine Reihe, die nach den Potenzen der Stammgröße x dieses Polynoms fortgeht, d. h. man entwickle den Ausdruck

$$u = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$$

in eine Reihe der Form

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots,$$

wo also α, β, γ, ... die zu bestimmenden Größen sind.

Nimmt man von dem ersten Ausdrucke die logarithmischen Differentialien (nach §. 31), so hat man

$$\frac{du}{u} = \frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)dx}{a + bx + cx^2 + \ldots},$$

wo hier und im Folgenden immer die natürlichen Logarithmen gemeint sind, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird.

Eben so hat man, wenn man den zweyten Ausdruck von u differentiirt:

$$\frac{du}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots$$

Setzt man diese beyden Ausdrücke von $\frac{du}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$n(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)$$
$$- (a + bx + cx^2 + \ldots)(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots) = 0.$$

Führt man die beyden Multiplicationen dieses Ausdruckes aus, und ordnet die Produkte nach den Potenzen von x, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = & (a\beta - nb\alpha) \\ & + (2a\gamma + b\beta - nb\beta - 2nc\alpha)x \\ & + (3a\delta + 2b\gamma + c\beta - nb\gamma - 2nc\beta - 3nd\alpha)x^2 \\ & + (4a\varepsilon + 3b\delta + 2c\gamma + d\beta - nb\delta - 2nc\gamma - 3nd\beta - 4ne\alpha)x^3 + \ldots \end{aligned}$$

und da die Factoren von x^0, x^1, x^2, ... jeder für sich gleich Null seyn müssen, so hat man zur Bestimmung der unbekannten Größen α, β, γ, ... folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a\beta &= n \,.\, b\alpha, \\ 2a\gamma &= (n-1)b\beta + 2nc\alpha, \\ 3a\delta &= (n-2)b\gamma + (2n-1)c\beta + 3nd\alpha, \\ 4a\varepsilon &= (n-3)b\delta + (2n-2)c\gamma + (3n-1)d\beta + 4ne\alpha, \\ 5a\zeta &= (n-4)b\varepsilon + (2n-3)c\delta + (3n-2)d\gamma + (4n-1)e\beta + 5nf\alpha \end{aligned}$$

u. s. w.

wovon das Gesetz des Fortgangs deutlich ist. Dabey bleibt die erste Größe α unbestimmt. Es ist aber $\alpha = a^n$, wie man findet, wenn man in dem ersten Ausdrucke vor u die Größe $x = 0$ setzt.

Wenn die Anzahl der Glieder des gegebenen Polynoms endlich, und n eine ganze positive Zahl ist, so werden auch von den gesuchten Größen $\alpha \beta \gamma \ldots$, so bald eines derselben verschwindet, alle andern ebenfalls gleich Null seyn. Ist z. B. $d = e = f \ldots$ gleich Null, und $n = 3$, so hat man für die dritte Potenz des Trinoms

$$a + bx + cx^2, \text{ oder für}$$

$$(a + bx + cx^2)^3 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$$

wo die Werthe von α, β, $\gamma \ldots$ durch folgende Ausdrücke bestimmt werden:

$$\alpha = a^3, \quad \beta = 3a^2 b, \quad \gamma = 3ab^2 + 3a^2 c,$$

$$\delta = b^3 + 6abc, \quad \varepsilon = 3b^2 c + 3ac^2, \quad \zeta = 3bc^2, \quad \eta = c^3,$$

und wo alle übrigen Größen θ, ι, $\varkappa \ldots$ gleich Null sind.

§. 51. (Entwicklung des Logarithmus eines Polynoms).

Sey der Ausdruck

$$u = \log. (1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)$$

in einer Reihe der Form

$$u = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$$

zu entwickeln, so gibt das Differential des ersten Ausdrucks von u

$$(1 + ax + bx^2 + \ldots) \frac{du}{dx} = a + 2bx + 3cx^2 + \ldots$$

und das des zweyten Ausdrucks

$$\frac{du}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + \ldots$$

Setzt man diese beyden Werthe von $\frac{du}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = & (\alpha - a) \\ & + (2\beta + \alpha a - 2b) x \\ & + (3\gamma + 2\beta a + \alpha b - 3c) x^2 + \ldots \end{aligned}$$

und daraus folgt für die Bestimmung der Größen α, β, $\gamma \ldots$

$$\alpha = a,$$

$$\beta = -\tfrac{1}{2}\alpha a + b,$$

$$\gamma = -\tfrac{2}{3}\beta a - \tfrac{1}{3}\alpha b + c,$$

$$\delta = -\tfrac{3}{4}\gamma a - \tfrac{2}{4}\beta b - \tfrac{1}{4}\alpha c + d,$$

$$\varepsilon = -\tfrac{4}{5}\delta a - \tfrac{3}{5}\gamma b - \tfrac{2}{5}\beta c - \tfrac{1}{5}\alpha d + e \text{ etc.}$$

§. 52. (**Entwicklung einer polynomischen Exponentialgröße**). Ist eben so die Funktion

$$u = e^{ax + bx^2 + cx^3 + \dots}$$

gegeben, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, und setzt man

$$u = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

so hat man, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$\log. u = ax + bx^2 + cx^3 + \dots$$

und davon ist das Differential

$$\frac{du}{dx} = u(a + 2bx + 3cx^2 + \dots).$$

Eben so hat man aber auch

$$\frac{du}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + \dots$$

Setzt man daher beyde Werthe von $\frac{du}{dx}$ einander gleich, so erhält man, wie zuvor:

$$\alpha = a,$$
$$\beta = b + \tfrac{1}{2}\alpha a,$$
$$\gamma = c + \tfrac{2}{3}\alpha b + \tfrac{1}{3}\beta a,$$
$$\delta = d + \tfrac{3}{4}\alpha c + \tfrac{2}{4}\beta b + \tfrac{1}{4}\gamma a,$$
$$\varepsilon = e + \tfrac{4}{5}\alpha d + \tfrac{3}{5}\beta c + \tfrac{2}{5}\gamma b + \tfrac{1}{5}\delta a \quad \text{rc.}$$

wovon das Gesetz des Fortgangs deutlich ist.

V.

Differentiation der Funktionen von zwey und mehr veränderlichen Größen.

§. 53. (**Erweiterung von Taylor's Theorem auf Funktionen von zwey veränderlichen Größen**). Sey $u = f(x, y)$ eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y. Nimmt man zuerst an, daß bloß die Größe x sich ändere, und in $x + h$ übergehe, während y als constant betrachtet wird, so kann man, um die daraus fol-

gende Änderung von u, oder um die Größe f(x+h, y) zu finden, unmittelbar das Theorem Taylor's (§. 39) anwenden, so daß man hat

$$f(x+h, y) = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots$$

wo also die Ausdrücke $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \ldots$ die ersten und zweyten Differential-Coefficienten der Funktion $u = f(x, y)$, aber bloß in Beziehung auf die eine x der beyden veränderlichen Größen x und y bezeichnen.

Wollte man eben so bloß die Größe y ändern, und in y + k übergehen lassen, während x unverändert bleibt, so würde man auf dieselbe Weise erhalten:

$$f(x, y+k) = u + k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

wo wieder $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ die Differentialien der gegebenen Funktion $u = f(x, y)$, bloß in Beziehung auf die Größe y genommen, bezeichnen. Man nennt diese Größen $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \ldots$ die ersten und zweyten partiellen Differentialien der Größe u in Beziehung auf x, und schließt sie in Klammern ein, um sie von den vollständigen Differentialien der Größe u zu unterscheiden, in welchen letzten beyde Größen x und y als veränderlich vorausgesetzt werden. Diese sehr angemessene Bezeichnung wollen wir auch künftig beybehalten.

Um aber das vollständige Differential der Größe u, oder um den Ausdruck

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

zu erhalten, wird man, nur in jedem Gliede der bereits erhaltenen Entwicklung von f(x + h, y), in welcher bloß x veränderlich war, auch die Größe y in y + k übergehen lassen, wobey aber die Größe x als constant angesehen, und jedes dieser Glieder als eine bloße Funktion von y betrachtet werden muß.

Wir hatten aber bereits

$$f(x+h, y) = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \ldots$$

Sucht man daher von dem ersten Gliede u dieses Ausdruckes das Differential in Beziehung auf y, so hat man, nach demselben Taylor'schen Theorem, statt u die Größe

$$u + k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

und eben so wird man erhalten

$$\text{statt } \left(\frac{du}{dx}\right) \text{ die Größe } \left(\frac{du}{dx}\right) + k\left(\frac{d^2u}{dydx}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dy^2dx}\right) + \ldots$$

$$\text{»} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \text{ » » } \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + k\left(\frac{d^3u}{dydx^2}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\right) + \ldots$$

$$\text{»} \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \text{ » » } \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + k\left(\frac{d^4u}{dydx^3}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\right) + \ldots$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck von $f(x+h, y)$, so erhält man für das gesuchte vollständige Differential der Größe $u = f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - u = {} & k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \frac{k^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) + \ldots \\ & + h\left(\frac{du}{dx}\right) + kh\left(\frac{d^2u}{dydx}\right) + \frac{k^2h}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dy^2dx}\right) + \ldots \\ & + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{kh^2}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dydx^2}\right) + \ldots \\ & + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Das allgemeine Glied dieses Ausdrucks ist

$$\frac{h^m k^n}{1.2.3\ldots m.1.2.3.n}\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\right)$$

wo man z. B. um die vier Glieder der dritten vertikalen Reihe zu erhalten, $m+n=3$, also nach einander

m gleich 3 oder 2 oder 1 und 0

und n » 0 » 1 » 2 » 3

setzen wird.

I. Man hat diesen Ausdruck erhalten, indem man zuerst x in $x+h$ und dann y in $y+k$ verwandelt hat. Hätte man aber umgekehrt zuvor y und dann erst x sich verändern lassen, so würde man in

$$f(x, y+k) = u + k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

$$\text{statt } u \text{ die Größe } u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \ldots$$

$$\text{»} \left(\frac{du}{dy}\right) \text{ » » } \left(\frac{du}{dy}\right) + h\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right) + \ldots$$

$$\text{»} \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) \text{ » » } \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + h\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\right) + \ldots$$

setzen, und dadurch für das vollständige Differential von u erhalten:

$$f(x+h, y+k) - u = h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \ldots$$
$$+ k\left(\frac{du}{dy}\right) + hk\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

II. Da aber beyde Entwicklungen offenbar identisch seyn müssen, so hat man auch die Gleichungen

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right), \quad \left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right) = \left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right),$$

und überhaupt

$$\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n}u}{dy^n\,dx^m}\right),$$

woraus hervorgeht, daß bey diesen partiellen Differential-Coefficienten die Ordnung, in welcher man die Differentiation in Beziehung auf x und auf y vornimmt, ganz willkürlich ist.

Ist z. B. die Funktion $u = x^m y^n$ gegeben, so hat man, wenn man zuerst in Beziehung auf x differentiirt:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = m x^{m-1} y^n \quad \text{und dann} \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = m n x^{m-1} y^{n-1}.$$

Differentiirt man aber zuerst in Beziehung auf y, so hat man

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = n x^m y^{n-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = m n x^{m-1} y^{n-1},$$

wie zuvor.

§. 54. (**Differential einer Funktion von zwey und mehr veränderlichen Grössen**). Bleibt man endlich bey den ersten Differentialien stehen, so erhält man

$$d.f(x, y) = du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy,$$

so daß daher das vollständige Differential einer Funktion u von zwey veränderlichen Größen x und y gleich der Summe der beyden partiellen Differentialien dieser Funktion ist.

Ist z. B. $u = xy$ gegeben, so hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = y \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = x,$$

also ist auch das vollständige Differential von u, oder

$$du = y\,dx + x\,dy$$

übereinstimmend mit §. 27.

Ist aber $u = \text{arc. tang.} \frac{x}{y}$ gegeben, so hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

also ist auch

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

I. Dieselbe Bemerkung wird auch für Funktionen von drey und mehreren veränderlichen Größen gelten. Wäre z. B.

$$u = f(t, x, y, z)$$

eine Funktion von vier Größen, so wird das vollständige Differential derselben seyn:

$$du = \left(\frac{du}{dt}\right) dt + \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz.$$

II. Durch diese Bemerkung wird die Differentiation eines Ausdrucks von mehr veränderlichen Größen oft sehr erleichtert. Wir wollen dieß sogleich an einem Beyspiele aus der sphärischen Trigonometrie zeigen.

Nennt man A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreyecks, und $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$ die ihnen gegenüberstehenden Seiten, und nimmt man an, daß in diesem Dreyecke die Seite α um $d\alpha$, die Seite γ um $d\gamma$ und der Winkel B um dB geändert werde: wie groß wird dann die daraus folgende Änderung $d\beta$ der Seite β, und die Änderung dA des Winkels A seyn?

Diese Frage zu beantworten, wird man diejenigen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie zu Grunde legen, welche den Winkel A und die Seite β durch die drey Größen α, γ und B geben. Diese sind bekanntlich (§. 21, C.)

$$\text{cotang. } A = \frac{\text{cotang. } \alpha \text{ sin. } \gamma - \text{cos. } \gamma \text{ cos. } B}{\text{sin. } B} \quad \text{und}$$

$$\text{cos. } \beta = \text{cos. } \alpha \text{ cos. } \gamma + \text{sin. } \alpha \text{ sin. } \gamma \text{ cos. } B.$$

Differentiirt man diese Gleichungen in Beziehung auf alle in ihnen enthaltenen Größen, so wird man die unbekannten Größen dA und $d\beta$ durch die bekannten $d\alpha$, dB und $d\gamma$ ausgedrückt erhalten. Allein statt auf diese Weise sogleich die vollständigen Differentialien von A und β zu suchen, wird es bequemer seyn, vorerst die partiellen Differentialien dieser Größen in Beziehung auf α, B und γ zu bestimmen.

Sucht man demnach z. B. das partielle Differential $\left(\frac{d\beta}{dB}\right)$, in

dem man α und γ constant voraussetzt, so gibt die zweyte der angeführten Gleichungen

$$- d\beta \sin.\beta = - dB \sin.B \sin.\alpha \sin.\gamma \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dB}\right) = \frac{\sin.B \sin.\alpha \sin.\gamma}{\sin.\beta},$$

oder endlich, da $\frac{\sin.B \sin.\gamma}{\sin.\beta} = \sin.C$ ist:

$$\left(\frac{d\beta}{dB}\right) = \sin.C \sin.\alpha.$$

Eben so erhält man das partielle Differential

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) = \cos.C \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right) = \cos.A;$$

für den Winkel A aber erhält man auf dieselbe Weise

$$\left(\frac{dA}{dB}\right) = -\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}\cos.C,$$

$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right) = \frac{\sin.C}{\sin.\beta} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dA}{d\gamma}\right) = -\sin.A \operatorname{cotang}.\beta.$$

Da nun, dem Vorhergehenden zu Folge, das vollständige Differential gleich der Summe aller seiner partiellen Differentiale ist, so hat man für die gesuchte vollständige Änderung der beyden Größen β und A folgende Ausdrücke:

$$d\beta = d\alpha \cos.C + d\gamma \cos.A + dB \sin.\alpha \sin.C \quad \text{und}$$

$$dA = d\alpha \frac{\sin.C}{\sin.\beta} - d\gamma \operatorname{cotang}.\beta \sin.A - dB \frac{\sin.\alpha \cos.C}{\sin.\beta}.$$

Ist das gegebene Dreyeck ABC ein ebenes oder geradliniges, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken statt dem Sinus der Seiten, diese Seiten $\alpha\beta\gamma$ selbst setzen, und dadurch erhalten:

$$d\beta = d\alpha \cos.C + d\gamma \cos.A + dB \,.\, \alpha \sin.C,$$

$$dA = \frac{d\alpha}{\beta}\sin.C - \frac{d\gamma}{\beta}\sin.A - dB \,.\, \frac{\alpha}{\beta}\cos.C.$$

Ist endlich der Winkel C ursprünglich ein rechter Winkel, so hat man

$$d\beta = d\gamma \cos.A + \alpha \,.\, dB \quad \text{und}$$

$$dA = \frac{d\alpha - d\gamma \sin.A}{\beta}.$$

III. Wenn man auf die erwähnte Weise alle Fälle durchgeht, die

bey einem sphärischen Dreyecke Statt haben können, so erhält man, indem man immer zwey Seiten oder zwey Winkel, oder einen Winkel und eine Seite des Dreyecks constant annimmt, folgende Tabelle, die bey der Auflösung der Dreyecke sehr nützlich ist.

A. Wenn der Winkel A und die Seite γ constant ist.

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos. C, \quad \frac{d\beta}{dB} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. C}, \quad \frac{d\alpha}{dB} = \frac{\sin. \alpha}{\text{tang. } C},$$

$$\frac{d\beta}{dC} = -\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\sin. C}, \quad \frac{d\alpha}{dC} = -\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,C}, \quad \frac{dB}{dC} = -\frac{1}{\cos. \alpha}.$$

B. Wenn A und α constant ist.

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\cos. C}{\cos. B}, \quad \frac{dC}{dB} = -\frac{\cos. \gamma}{\cos. \beta}, \quad \frac{d\gamma}{dC} = \frac{\text{tang.}\,\gamma}{\text{tang.}\,C},$$

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\text{tang.}\,\beta}{\text{tang.}\,B}, \quad \frac{d\gamma}{dB} = -\frac{\text{tang.}\,\beta \cos. C}{\sin. B},$$

$$\frac{d\beta}{dC} = -\frac{\text{tang.}\,\gamma \cos. B}{\sin. C}.$$

C. Wenn β und γ constant ist.

$$\frac{dB}{dC} = \frac{\text{tang.}\,B}{\text{tang.}\,C}, \quad \frac{d\alpha}{dB} = -\frac{\sin. \alpha}{\text{cotang.}\,C}, \quad \frac{d\alpha}{dC} = -\frac{\sin. \alpha}{\text{cotang.}\,B},$$

$$\frac{d\alpha}{dA} = \sin. B \sin. \gamma, \quad \frac{dA}{dB} = -\frac{\sin. A}{\sin. B \cos. C},$$

$$\frac{dA}{dC} = -\frac{\sin. \alpha}{\sin. \gamma \cos. B}.$$

D. Wenn B und C constant ist.

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{\text{tang.}\,\beta}{\text{tang.}\,\gamma}, \quad \frac{dA}{d\beta} = \sin. A\, \text{tang.}\,\gamma, \quad \frac{dA}{d\gamma} = \sin. A\, \text{tang.}\,\beta,$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sin.\gamma \sin. B, \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta \cos. \gamma}, \quad \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \beta \sin. \gamma}.$$

§. 55. (**Höhere Differentiale einer Funktion von zwey veränderlichen Grössen**). Man kann die höheren Differentialien solcher Funktionen unmittelbar aus der oben (§. 53) gegebenen Entwicklung von $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ ableiten. Setzt man nämlich daselbst $h = dx$ und $k = dy$, so ist die erste vertikale Reihe jener Entwicklung, oder $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$ das erste vollständige Differential der Größe u, und eben so erhält man das zweyte, dritte, vierte Differential von u, wenn man die zweyte vertikale Reihe durch

1.2, die dritte durch 1.2.3, die vierte durch 1.2.3.4 multiplicirt u. s. w.

Allein man kann diese höheren Differentialien auch sehr leicht unmittelbar aus dem ersten ableiten. Das erste vollständige Differential der Funktion u ist nämlich

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy.$$

Nimmt man nun wieder die Differentiale der Großen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$, so erhält man, da diese Größen Funktionen von x sowohl, als auch von y sind, wenn man dx und dy als constant betrachtet (vergl. §. 38)

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) dy \quad \text{und}$$

$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy,$$

so daß man daher, da (nach §. 53, II.)

$$\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$$

ist, für das vollständige zweyte Differential der Funktion u hat:

$$d^2u = d\left(\frac{du}{dx}\right) dx + d\left(\frac{du}{dy}\right) dy \quad \text{oder}$$

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy^2.$$

Um daraus das dritte vollständige Differential d^3u zu erhalten, hat man auf dieselbe Weise

$$d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^3}\right) dx^3 + \left(\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right) dy,$$

$$d\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2\,dy}\right) dx + \left(\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}\right) dy,$$

$$d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) dx + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) dy,$$

und daher für das gesuchte dritte Differential

$$d^3u = \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) dx^3 + 3\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right) dx^2\,dy + 3\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) dx\,dy^2 + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) dy^3;$$

ein Verfahren, welches man leicht fortsetzen und dabey bemerken wird,

daß die Zahlen-Coefficienten 1, 2, 1 und 1, 3, 3, 1 und 1, 4, 6, 4, 1 u. s. mit jenen des Binomiums (§. 41) übereinstimmen.

§. 56. (**Erster specieller Fall der Entwicklung einer Funktion von zwey Größzen**). Sey

$$u = \sqrt[2]{x} \,.\, \sqrt[3]{y}$$

gegeben; man suche das dritte vollständige Differential $d^3 u$ dieser Funktion.

Differentiirt man diese Größe u dreymal nach einander in Beziehung auf x, so erhält man

$$\left(\frac{d^3 u}{d x^3}\right) = \tfrac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{3}}.$$

Eben so ist auch

$$\left(\frac{d^3 u}{d x^2 d y}\right) \text{ oder } \left(\frac{d^3 u}{d y d x^2}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d x d y d x}\right) = - \tfrac{1}{12} x^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{2}{3}} \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d x d y^2}\right) = - \tfrac{1}{9} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}}; \text{ so wie endlich}$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d y^3}\right) = \tfrac{10}{27} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{8}{3}}.$$

Substituirt man diese Werthe in der letzten Gleichung des §. 55, so erhält man für das gesuchte dritte Differential

$$d^3 u = - \frac{3 y^{\frac{1}{3}} d x^3}{8 x^{\frac{5}{2}}} - \frac{d x^2 d y}{4 x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3}}} - \frac{d x d y^2}{3 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{3}}} + \frac{10 x^{\frac{1}{2}} d y^3}{27 y^{\frac{8}{3}}}.$$

Zu demselben Resultate wird man auch gelangen, wenn man die gegebene Funktion

$$u = \sqrt[2]{x} \,.\, \sqrt[3]{y}$$

dreymal auf die gewöhnliche Weise differentiirt, wodurch man erhält:

$$d u = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} d x + \tfrac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}} d y,$$

$$d^2 u = - \tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{3}} d x^2 + \tfrac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}} d x d y - \tfrac{2}{9} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}} d y^2,$$

$$d^3 u = - \tfrac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{3}} d x^3 - \tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{2}{3}} d x^2 d y -$$

$$- \tfrac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}} d x d y^2 + \tfrac{10}{27} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{8}{3}} d y^3,$$

übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

§. 57. (**Weitere specielle Fälle aus der Trigonometrie**).
(I). In dem bereits oben (§. 54) angeführten sphärischen Dreyecke ABC seyen die Seiten β und γ constant, während der Winkel A sich ändert und in $A + dA$ übergeht. Dadurch wird also auch die dem Winkel A gegenüberstehende Seite α eine Änderung erleiden, und in $\alpha' = \alpha + d\alpha$ übergehen. Man suche den Werth von $d\alpha$.

Da hier in dem Dreyecke ABC nur zwey veränderliche Größen A und α betrachtet werden, so gehört das Problem unmittelbar in das Gebiet des Taylor'schen Lehrsatzes, nach welchem man hat, wenn man auch auf die höheren Differentialien Rücksicht nimmt:

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) dA + \left(\frac{d^2\alpha}{dA^2}\right)\frac{dA^2}{1.2} + \left(\frac{d^3\alpha}{dA^3}\right)\frac{dA^3}{1.2.3} + \ldots$$

Für die Werthe dieser partiellen Differential-Coefficienten findet man aber, aus den bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie (§. 20), wenn man der Kürze wegen

$$m = \frac{\sin.\beta \sin.\gamma}{\sin.\alpha} . \sin. A = \sin. B \sin. \gamma$$

annimmt:

$$\left(\frac{d\alpha}{dA}\right) = m,$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dA^2}\right) = m \text{ cotang. } A - m^2 \text{ cotang. } \alpha,$$

$$\left(\frac{d^3\alpha}{dA^3}\right) = m^3 (1 + 3 \text{ cotang.}^2 \alpha) - 3 m^2 \text{ cotang. } \alpha \text{ cotang. } A - m,$$

so daß man daher für den gesuchten Werth von α' erhält, wenn

$$n = m \text{ cotang. } A$$

gesetzt, und diese Differentiation weiter fortgesetzt wird:

$$\begin{aligned}\alpha' = \alpha &+ m\,dA + (n - m^2 \text{ cotang. } \alpha)\frac{dA^2}{1.2} \\ &+ (m^3 + 3 m^3 \text{ cotang.}^2 \alpha - 3 m n \text{ cotang. } \alpha - m)\frac{dA^3}{1.2.3} \\ &+ [6 m^2 n (1 + 3 \text{ cotang.}^2 \alpha) - 15 m^4 \text{ cotang.}^3 \alpha \\ &+ (4 m^2 - 3 n^2 - 9 m^4) \text{ cotang. } \alpha - n]\frac{dA^4}{1.2.3.4} + \ldots\end{aligned}$$

(II). In dem sphärischen Dreyecke ABC ändere sich nun der Winkel A um dA, und zugleich die Seite β um $d\beta$. Man suche die daraus entspringenden Änderungen dC und $d\alpha$ des Winkels C und der Seite α, die dadurch in $C' = C + dC$ und in $\alpha' = \alpha + d\alpha$ übergehen sollen.

Da hier der Winkel C, so wie die Seite α, als eine Funktion von zwey veränderlichen Größen A und β betrachtet wird, so hat man, nach §. 53,

$$C' = C + \left(\frac{dC}{dA}\right) dA + \left(\frac{dC}{d\beta}\right) d\beta$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2C}{dA^2}\right) dA^2 + \left(\frac{d^2C}{dA\,d\beta}\right) dA\,d\beta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2C}{d\beta^2}\right) d\beta^2 + \ldots$$

mit dem ähnlichen Ausdrucke für

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) dA + \ldots$$

Um diese partiellen Differential-Coefficienten zu finden, wollen wir zuerst bemerken, daß in dem gegebenen Dreyecke die Größen A und β sich ändern, während die Seite γ immer constant bleibt. Um also zuerst die Größen $\left(\frac{dC}{dA}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{dA}\right)$ zu finden, werden wir außer der immer constanten Größe γ auch die Seite β unveränderlich annehmen, wodurch man mittelst der bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie sofort erhält:

$$\left(\frac{dC}{dA}\right) = -\frac{\cos. B \sin. \gamma}{\sin. \alpha} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) = \sin. \gamma \sin. B.$$

Wollte man aber diese und alle folgenden Differential-Coefficienten bloß durch die gegebenen zwey Seiten α und β, und durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel C ausdrücken, so würde man erhalten:

$$\left(\frac{dC}{dA}\right) = \text{cotang.}\, \alpha \sin. \beta \cos. C - \cos. \beta \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dA}\right) = \sin. \beta \sin. C.$$

Um dann eben so die Größen $\left(\frac{dC}{d\beta}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)$ zu finden, wird man nebst der Seite γ auch den Winkel A constant annehmen, wodurch man sofort erhält:

$$\left(\frac{dC}{d\beta}\right) = -\sin. C\, \text{cotang.}\, \alpha \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) = \cos. C.$$

Weiter hat man, wenn wieder γ und β constant ist:

$$\left(\frac{d^2C}{dA^2}\right) = -\left(\frac{dC}{dA}\right) \sin. C\, \text{cotang.}\, \alpha \sin. \beta - \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) \frac{\cos. C \sin. \beta}{\sin.^2 \alpha},$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von $\left(\frac{dC}{dA}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{dA}\right)$

substituirt:

$$\left(\frac{d^2 C}{d A^2}\right) = - \sin.^2\beta \left[\tfrac{1}{2}\sin. 2C - \text{cotang.}\alpha\ \text{cotang.}\beta\ \sin. C + \text{cotang.}^2\alpha\ \sin. 2C\right].$$

Fährt man so fort, so erhält man endlich:

$$\begin{aligned} C' - C = & (\text{cotang.}\alpha \sin.\beta \cos. C - \cos.\beta)\, dA - \text{cotang.}\alpha \sin. C \,.\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\sin.^2\beta \left[\text{cotang.}\alpha\ \text{cotang.}\beta \sin. C - \text{cotang.}^2\alpha \sin. 2C - \tfrac{1}{2}\sin. 2C\right] . dA^2 \\ & + \sin.\beta \left[\sin.^2 C + \text{cotang.}\alpha\ \text{cotang.}\beta \cos. C - \text{cotang.}^2\alpha \cos. 2C\right] . dA\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\sin. 2C \left[\tfrac{1}{2} + \text{cotang.}^2\alpha\right] . d\beta^2, \end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = & \sin.\beta \sin. C \,.\, dA + \cos. C \,.\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\sin.^2\beta \cos. C \left[\text{cotang.}\alpha \cos. C - \text{cotang.}\beta\right] . dA^2 \\ & + \sin.\beta \sin. C \left[\text{cotang.}\beta - \text{cotang.}\alpha \cos. C\right] . dA\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\text{cotang.}\alpha \sin.^2 C \,.\, d\beta^2. \end{aligned}$$

Wenn die gegebenen Variationen dA und $d\beta$ nur sehr klein sind, so wird man sich mit den beyden ersten Gliedern dieser Ausdrücke von $C' - C$ und $\alpha' - \alpha$ begnügen, wie in §. 54, II.; sind sie aber größer, oder will man die gesuchten Variationen $C' - C$ und $\alpha' - \alpha$ mit besonderer Schärfe haben, so wird man auch die folgenden Glieder berücksichtigen.

§. 58. (Bedingungen der Vollständigkeit eines Differentials). Wir haben oben (§. 53, II.) gesehen, daß das erste Differential einer Funktion $u = f(x, y)$ von zwey veränderlichen Größen die Form habe:

$$du = P dx + Q dy,$$

wo $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$ und $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$ ist; d. h. wo P und Q die partiellen Differential-Coefficienten von u in Beziehung auf x und y bezeichnen, und daß überdieß

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = \left(\frac{d^2 y}{dy\, dx}\right), \quad \text{oder daß}$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \ldots (1)$$

seyn muß, wenn anders der Ausdruck $P dx + Q dy$ ein vollständiges Differential irgend einer Funktion $f(x, y)$ seyn soll.

Hätte man z. B. $du = ydx - xdy$, so ist $P = y$ und $Q = -x$, und da für diese Werthe von P und Q die Gleichung (I) nicht befriedigt wird, so ist auch $ydx - xdy$ kein vollständiges Differential, oder, mit andern Worten, es gibt keinen endlichen Ausdruck von x und y, dessen Differential durch die Größe $ydx - xdy$ ausgedrückt werden kann. — Hätte man im Gegentheile

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \text{ so ist}$$

$$P = -\frac{1}{y} \text{ und } Q = -\frac{x}{y^2}; \text{ also auch}$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{1}{y^2},$$

oder der Ausdruck $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ ist ein vollständiges Differential. In der That entsteht er, wie man weiß, durch die Differentiation des endlichen Ausdrucks $\frac{x}{y}$ (§. 28).

I. Setzt man das Verfahren des §. 53 auch auf eine Funktion $u = f(x, y, z)$ von drey veränderlichen Größen fort, so findet man eben so, daß das erste Differential dieser Funktion zum Ausdruck erhält:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz,$$

wo wieder $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$, $R = \left(\frac{du}{dz}\right)$ ist, und wo der Ausdruck $Pdx + Qdy + Rdz$ nur dann ein vollständiges Differential von irgend einer endlichen Funktion $u = f(x, y, z)$ von drey Größen seyn kann, wenn die folgenden drey Bedingungsgleichungen Statt haben:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dy}\right) &= \left(\frac{dQ}{dx}\right) \\ \left(\frac{dP}{dz}\right) &= \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) &= \left(\frac{dR}{dy}\right) \end{aligned}\right\} \ldots \text{(II)}.$$

VI.

Differentiation der Gleichungen.

---

§. 59. (**Erstes Differential einer gegebenen Gleichung $u=0$ zwischen x und y**). Bisher haben wir im Allgemeinen nur explicite oder solche Funktionen $y=f(x)$ betrachtet, in welchen die veränderlichen Größen x und y gesondert sind, wie z. B. die Gleichung $Y=X$, wo X bloß eine Funktion von x, und Y von y ist. Wenn aber beyde Größen x und y zugleich auf jeder Seite des Gleichheitszeichens vorkommen, so wird ein solcher Ausdruck eine implicite oder ungesonderte Funktion genannt, und diese Funktionen sind es, welche wir hier näher betrachten wollen.

Sey also

$$f(x, y) = 0$$

eine solche ungesonderte Funktion oder eine noch unentwickelte Gleichung zwischen x und y. Läßt man in ihr x um dx, und y um dy wachsen, so besteht auch noch die Gleichung

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = 0.$$

Setzt man aber in dem ähnlichen Ausdrucke des §. 53 statt h und k die Größe dx und dy, so hat man, wenn der Kürze wegen $f(x, y)$ durch u bezeichnet wird:

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy,$$

so daß man daher für das erste Differential der gegebenen Gleichung $u=0$ hat:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0 \quad . \; . \; . \quad (I).$$

Um daher das erste Differential einer solchen Gleichung $u=0$ zu finden, wird man von der Größe u die partiellen Differentialien $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ so nehmen, als ob die Größen x und y von einander unabhängig wären, wo dann der gesuchte erste Differential-Coefficient $\frac{dy}{dx}$ seyn wird:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) : \left(\frac{du}{dy}\right).$$

§. 60. (Zweytes und höheres Differential einer gegebenen Gleichung $u=0$ zwischen x und y). Auf dieselbe Weise, wie wir aus der gegebenen Gleichung $u=0$ ihre erste Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = 0$$

gefunden haben, werden wir nun auch von dieser letzten Gleichung das Differential ableiten, indem wir, durch Wiederholung des vorhergehenden Verfahrens, die partiellen Differentialien des letzten Ausdrucks suchen, und die Summe derselben wieder gleich Null setzen, wodurch wir demnach die zweyte Differentialgleichung der gegebenen Gleichung $u=0$ erhalten werden. Es ist aber das vollständige Differential des ersten Theils $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ des vorhergehenden Ausdrucks, da in ihm die Größe u eine Funktion von x und y ist, und da die Größen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ das Differential dy nicht enthalten:

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dy\right]dx.$$

Eben so ist auch das vollständige Differential des zweyten Theils $\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, in Beziehung auf x, y und dy genommen:

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dx + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy\right]dy + \left(\frac{du}{dy}\right)d^2y = 0;$$

so daß man daher für das gesuchte zweyte Differential der Gleichung $u=0$ hat:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)d^2y = 0 \ldots \text{(II)}.$$

Dividirt man diesen Ausdruck in allen seinen Gliedern durch dx^2, so erhält man

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

und substituirt man hierin den bereits oben (§. 59) erhaltenen Werth von $\frac{dy}{dx}$, so wird man aus dieser Gleichung den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, oder den zweyten Differential-Coefficienten von y finden, so wie man oben den ersten gefunden hat.

I. Behandelt man die Gleichung (II) auf dieselbe Weise, wie die Gleichung (I), so ist das Differential ihres ersten Theils

$$\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right) dx^3 + \left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right) dx^2 dy,$$

und das des zweyten Theils

$$2\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right) dx^2 dy + 2\left(\frac{d^3 u}{dx dy^2}\right) dx dy^2 + 2\left(\frac{d^2 u}{dx dy}\right) dx d^2 y,$$

und fährt man so fort, so findet man endlich für das dritte Differential der Gleichung $u = o$ den Ausdruck

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)dx^3 + 3\left(\frac{d^3 u}{dx^2dy}\right)dx^2dy + 3\left(\frac{d^2 u}{dxdy}\right)dxd^2y + \left(\frac{du}{dy}\right) d^3y$$
$$+ 3\left(\frac{d^3 u}{dxdy^2}\right)dxdy^2 + 3\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) dy d^2 y = o \ldots \text{(III)}$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch dx^3, und substituirt dann in ihm die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aus I. und II., so erhält man den gesuchten Werth des dritten Differential-Coefficienten $\frac{d^3 y}{dx^3}$, welcher der Gleichung $u = o$ entspricht. Man sieht, wie man dieses Verfahren ohne Mühe fortsetzen kann.

Ex. Sey die Gleichung $u = y^2 - 2axy + x^2 - b^2 = o$ gegeben, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2(x - ay) \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2(y - ax),$$

und daher die Gleichung (I)

$$(x - ay) dx + (y - ax) dy = o \quad \text{oder}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - ay}{ax - y},$$

oder wenn man den Werth von y in x aus der gegebenen Gleichung $u = o$ substituirt:

$$\frac{dy}{dx} = a \pm \frac{(a^2 - 1) x}{\sqrt{(a^2 - 1) x^2 + b^2}},$$

wo also der Differential-Coefficient $\frac{dy}{dx}$ zwey Werthe hat, weil auch y in der Gleichung $u = o$ einen doppelten Werth hat.

Weiter ist

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = 2, \ \left(\frac{d^2 u}{dx dy}\right) = -2a \ \text{und} \ \left(\frac{du}{dy}\right) = 2(y - ax),$$

also ist auch die Gleichung (II)

$$dx^2 - 2a dx dy + dy^2 + (y - ax) d^2 y = o \quad \text{oder}$$

$$1 - 2a\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 0,$$

woraus man den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält, der wieder doppelt seyn wird, weil schon $\frac{dy}{dx}$ zwey Werthe hat.

Fährt man auf diese Weise fort, so wird man auch die dritten und höheren Differentiale der Gleichung $u = 0$ erhalten.

II. Man sieht, daß man diese Differentialgleichungen in jedem gegebenen speciellen Falle durch eine einfache Differentiation aller Glieder der gegebenen Gleichung erhält, ohne erst zu dem allgemeinen Ausdrucke (I) und (II) zurückzugehen. So gibt der Ausdruck

$$u = y^2 - 2axy + x^2 - b^2 = 0,$$

wenn man die einzelnen Theile desselben nach den bisherigen Vorschriften differentiirt:

$$ydy - aydx - axdy + xdx = 0 \ldots (I')$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{x - ay}{ax - y}, \text{ wie zuvor.}$$

Verfährt man mit der Gleichung (I') eben so, so erhält man

$$dy^2 + yd^2y - 2adxdy - axd^2y + dx^2 = 0 \ldots (II')$$

$$\text{oder } 1 - 2a\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man endlich die gegebene Gleichung, ehe man zu ihrer Differentiation schreitet, gesondert, was in unserem Beyspiele sehr leicht ist, so würde man für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... dieselben Resultate erhalten. In der That, die gegebene Gleichung $u = 0$ gibt

$$y = -ax \pm \sqrt{(a^2 - 1)x^2 + b^2},$$

und von dieser expliciten Funktion ist das Differential, nach dem Vorhergehenden, gleich

$$\frac{dy}{dx} = -a \pm \frac{(a^2 - 1)x}{\sqrt{(a^2 - 1)x^2 + b^2}},$$

und denselben Ausdruck haben wir auch oben erhalten.

§. 61. **(Verschwindung der Constanten in den Differentialgleichungen.)** Wenn die gegebene Gleichung $u = 0$ zwischen x und y ein constantes Glied enthält, so fällt dieses durch die Differentiation weg. Ist z. B. $u = y^2 - ax - b = 0$ gegeben, so ist das

erste Differential dieser Gleichung

$$2ydy - adx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ein von b unabhängiger Ausdruck. Man kann diese erste Differentialgleichung aber auch von der andern Constante a unabhängig machen, wenn man in ihr statt a den Werth dieser Größe aus der Gleichung $u = 0$ substituirt, wodurch man erhält

$$(y^2 - b)dx - 2xydy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

und die Gleichung (2) ist eben sowohl die Differentialgleichung von $u = 0$, als es die Gleichung (1) ist.

Differentiirt man die gegebene Gleichung $y^2 - ax - b = 0$ zwey Mal, so erhält man die drey Gleichungen:

$$y^2 = ax + b,$$
$$2ydy = adx, \text{ und, wenn } dx \text{ constant ist,}$$
$$dy^2 + yd^2y = 0,$$

und diese letzte Differentialgleichung ist von a und b, und selbst von x unabhängig. Man kann sie aber, wenn man die zwey ersten Gleichungen zu Hülfe nimmt, von a oder von b, oder auch von a und b zugleich abhängig machen.

I. Man sieht, daß man durch fortgesetzte Differentiation immer mehr Constanten wegschaffen kann. Die bekannte Gleichung des Kreises ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

wo a und b die Coordinaten seines Mittelpunktes, und c seinen Halbmesser bezeichnet. Die Differentialien dieser Gleichung sind:

$$(x - a)dx + (y - b)dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$
$$dx^2 + dy^2 + (y - b)d^2y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (C),$$
$$3dyd^2y + (y - b)d^3y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D).$$

Aus den drey ersten dieser vier Gleichungen folgt, wenn man der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$x - a = \frac{ds^2 \cdot dy}{dx \cdot d^2y},$$

$$y - b = - \frac{ds^2}{d^2y} \quad \text{und}$$

$$c^2 = \frac{ds^3}{dxd^2y}.$$

Substituirt man den Werth $y - b = - \frac{ds^2}{d^2y}$ in der Gleichung (D), so geht sie in folgende über:

$$3dyd^2y^2 - ds^2d^3y = 0 \quad \ldots \quad (E).$$

Demnach enthält die Gleichung (A) drey, (B) zwey, (C) nur eine Constante, und die Gleichung (E) endlich enthält gar keine weitere Constante mehr. Demungeachtet sind sie alle als Gleichungen des Kreises zu betrachten. Die erste (A) ist die Gleichung eines in Beziehung auf seine Größe und Lage vollständig bestimmten Kreises. Die Gleichung (B) bestimmt nur die Lage des Mittelpunktes durch die Größe a und b, und läßt dafür seinen Halbmesser ganz willkürlich. Die Gleichung (C), welche nur mehr die Größe b enthält, sagt bloß, daß der Mittelpunkt irgendwo in einer geraden Linie liegt, die mit der Axe der x in der Entfernung b von ihr parallel gezogen wird, und sie läßt die Entfernung dieses Mittelpunktes von der Axe der y sowohl, als auch dem Halbmesser des Kreises, ganz unbestimmt. Die Gleichung (E) endlich sagt bloß aus, daß die krumme Linie, welche durch sie vorgestellt wird, einen Kreis ausdrücke, ohne über die Lage und Größe desselben weiter etwas festzusetzen. Man sieht aus diesen Bemerkungen, daß die Differentialgleichungen, besonders die höheren, eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als die ihnen zu Grunde liegenden endlichen Gleichungen, aus welchen sie durch Differentiation entspringen.

II. Man kann noch bemerken, daß, wenn die zu eliminirende Constante in der gegebenen Gleichung $u = 0$ in verschiedenen Graden vorkömmt, die durch die Elimination derselben entstehende erste Differentialgleichung höhere Potenzen von dx und dy enthält, und demnach auch zu den Differentialgleichungen höherer Ordnungen gehört. Ist z. B. die Gleichung

$$u = x^2 + y^2 - 2ax - a^2 = 0$$

gegeben, so ist ihr erstes Differential

$$xdx + ydy - adx = 0 \quad \text{oder} \quad a = \frac{xdx + ydy}{dx}.$$

Wird dieser Werth von a in der gegebenen Gleichung $u = 0$ substituirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 - 2x\frac{(xdx + ydy)}{dx} - \left(\frac{xdx + ydy}{dx}\right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{4x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{2x - y^2}{y^2} = 0.$$

Endlich lassen sich durch dieses Verfahren aus den gegebenen Gleichungen auch die transcendenten Größen wegschaffen, wie wir schon oben bey den Problemen des §. 51 und 52 gesehen haben.

VII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Reihen.

§. 62. (Erfindung summirbarer Reihen.) Da die Gegenstände, welche den Inhalt dieses Abschnittes bilden, zu reich und mannigfaltig sind, um sie hier alle umständlich aufzuführen, so wird es genügen, nur die vorzüglichsten derselben kurz anzuzeigen.

Wenn man eine Reihe hat, deren Summe gegeben ist, so lassen sich daraus sofort viele andere Reihen ableiten, deren Summe ebenfalls bekannt ist. So hat man z. B., wenn x kleiner als die Einheit ist, für die convergente Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

die Summe $\frac{1}{1-x}$. Multiplicirt man beyde Ausdrücke durch x^m und differentiirt sie dann, so erhält man sofort

$$\frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + (m+3)x^3 + \dots,$$

so daß also auch die Summe von dieser Reihe bekannt ist. Multiplicirt man auch diese wieder durch x^n und differentiirt, so erhält man

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \dots,$$

so daß also auch die Summe von dieser Reihe bekannt ist. Man sieht, wie man dieses Verfahren fortsetzen und auch auf jede andere Reihe, deren Summe gegeben ist, anwenden kann.

I. Ist z. B. die Reihe

$$S = a + bx + cx^2 + \dots$$

gegeben, deren Summe S bekannt ist, so hat man, wenn man diesen Ausdruck durch x^m multiplicirt und dann differentiirt:

$$mS + x \cdot \frac{dS}{dx} = ma + (m+1)bx + (m+2)cx^2 + \dots$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck wieder durch x^n und diffe-

rentiirt, so erhält man

$$mnS + (m+n+1)x \cdot \frac{dS}{dx} + x^2 \cdot \frac{d^2S}{dx^2}$$
$$= mna + (m+1)(n+1)bx + (m+2)(n+2)cx^2 + \ldots$$

II. Man sieht daraus, daß, wenn die Summe S einer Reihe

$$S = a + bx + cx^2 + \ldots$$

bekannt ist, und wenn A, B, C, D, ... eine Reihe bilden, deren wiederholte Differenzen einmal sämmtlich gleich Null werden, daß sich dann auch die Summe der Reihe

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + \ldots$$

angeben lassen wird.

Diese Summe wird nämlich, wie man aus I. schließen kann, die Form haben:

$$\alpha S + \beta x \cdot \frac{dS}{dx} + \gamma x^2 \cdot \frac{d^2S}{1.2dx^2} + \delta x^3 \cdot \frac{d^3S}{1.2.3dx^3} + \ldots$$

Um aber die Werthe dieser Größen α, β, γ, ... zu finden, hat man

$$\alpha S = \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 +$$
$$\beta x\frac{dS}{dx} = \beta bx + 2\beta cx^2 +$$
$$\gamma x^2\frac{d^2S}{2dx^2} = \gamma cx^2 + \text{etc.}$$

Vergleicht man die Summe dieser Glieder mit dem ihr gleichgeltenden Ausdruck

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + \ldots,$$

so findet man

$$\alpha = A,$$
$$\beta = B - A,$$
$$\gamma = C - 2B + A,$$
$$\delta = D - 3C + 3B - A,$$
$$\epsilon = E - 4D + 6C - 4B + A \text{ etc.},$$

wovon das Gesetz des Fortganges klar ist, da die numerischen Factoren die des Binoms sind.

Diesem gemäß wird man also für die Summe Z der gesuchten Reihe $Aa + Bbx + Ccx^2 + \ldots$ den Ausdruck haben

$$Z = AS + \Delta A \cdot \frac{xdS}{dx} + \Delta^2 A \cdot \frac{x^2d^2S}{1.2dx^2} + \Delta^3 A \cdot \frac{x^3d^3S}{1.2.3dx^3} + \text{etc.},$$

wo der Kürze wegen die, auch später noch oft vorkommenden, Größen

$B - A = \Delta A$, $C - 2B + A = \Delta^2 A$, $D - 3C + 3B - A = \Delta^3 A$ ic. gesetzt worden sind.

Ex. Sey die Summe Z der Reihe zu suchen:

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Da bekanntlich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

ist, so hat man

$$A = 2, \quad B = 5, \quad C = 10, \quad D = 17 \text{ u. f.},$$

also auch

$$\Delta A = 3, \quad \Delta^2 A = 2 \quad \text{und} \quad \Delta^3 A, \quad \Delta^4 A, \ldots$$

so wie alle folgenden Factoren $\Delta^5 A$, $\Delta^6 A$, ... gleich Null. Also ist die gesuchte Summe der gegebenen Reihe gleich

$$Z = e^x(2 + 3x + x^2) = e^x(1 + x)(2 + x).$$

Wenn aber auch die folgenden Factoren ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, ... nicht eben gleich Null, wenn sie nur immer kleiner werden, so sieht man, daß dann der Ausdruck von Z zwar auch wieder eine ohne Ende fortgehende, aber doch zugleich eine schnell convergirende Reihe ist, die in vielen Fällen mit Vortheil angewendet werden kann. Daß sich dasselbe Verfahren auch auf Reihen anwenden lasse, deren Glieder in ihren Zeichen wechseln, ist für sich klar.

§. 63. (Transformation der Reihen.) Sey die Reihe gegeben

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

deren Summe S bekannt oder unbekannt seyn mag. Setzt man darin $x = \frac{y}{1+y}$, so erhält man

$$x = y - y^2 + y^3 - \ldots$$
$$x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - \ldots$$
$$x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - \ldots$$

Substituirt man diese Werthe von x, x^2, x^3, ... in der gegebenen Reihe, und behält man die Bedeutung der Ausdrücke ΔA, $\Delta^2 A$, ... aus §. 62 bey, so findet man, da $y = \frac{x}{1-x}$ ist:

$$S = A \cdot \frac{x}{1-x} + \Delta A \cdot \frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 A \cdot \frac{x^3}{(1-x)^3} + \Delta^3 A \cdot \frac{x^4}{(1-x)^4} + \ldots$$

Ist daher die Reihe der Größen A, B, C, D, ... so beschaffen, daß ihre auf einander folgenden Differenzen ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, ... endlich gleich Null werden, so kann man dadurch die Summe der ersten gegebenen Reihe bestimmen.

So hat man für die Reihe

$$S = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$$

$A = 1$ und $\Delta A = 2$, also ist auch die Summe dieser Reihe

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^2}.$$

Eben so findet man für die Summe der Reihe

$$S = x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \ldots,$$

$A = 1$, $\Delta A = 3$, $\Delta^2 A = 2$, und daher

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3}.$$

I. Ist eben so die Reihe mit abwechselnden Zeichen

$$S = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + \ldots$$

gegeben, so findet man wie zuvor

$$S = A \cdot \frac{x}{1+x} - \Delta A \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 A \cdot \frac{x^3}{(1+x)^3} - \ldots$$

So hat man für die Reihe

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots$$

$A = 1$, $\Delta A = 1$, also $S = \frac{1}{4}$; und eben so findet man

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots = 0,$$
$$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \ldots = \frac{1}{8},$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots = 0 \text{ u. f.}$$

Wenn man auf diese Weise auch nicht immer einen geschlossenen Ausdruck für die Summe der gegebenen Reihe finden kann, so läßt sie sich doch meistens in eine andere, mehr convergirende Reihe verwandeln. So hat man für die geometrische Reihe

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots$$

$A = \Delta A = \Delta^2 A = \Delta^3 A \ldots = 1$, also ist auch jene Reihe

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \ldots,$$

wovon die Summe gleich $\frac{1}{3}$ ist, da sie aus der Entwicklung des Bruches $\frac{1}{2+x}$ entsteht, wenn man $x = 1$ setzt.

Eben so hat man für

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

$\Delta A = -\frac{1}{2}$, $\Delta^2 A = \frac{1}{3}$, $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$, $\Delta^4 A = \frac{1}{5}$ u. s., also ist auch

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \ldots,$$

und man weiß aus dem Vorhergehenden (§. 42), daß der Werth von S in diesem Beyspiele gleich log. 2 ist.

Ist endlich die Reihe $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ gegeben, so hat man

$$\Delta A = -\frac{2}{1.3},\quad \Delta^2 A = \frac{2.4}{1.3.5},\quad \Delta^3 A = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7}\ \text{u. s.},$$

also ist auch

$$2S = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots,$$

und in diesem Beyspiele ist $S = \text{arc. tang. } 45^0 = \frac{1}{4}\pi$ (vergl. §. 47).

§. 64. (Berechnung der Sinus und Cosinus.) Wir haben oben (§. 45) die beyden Ausdrücke erhalten:

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Setzt man in ihnen $x = m . \frac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$\sin. m.\tfrac{1}{2}\pi = (\tfrac{1}{2}m\pi) - \frac{1}{1.2.3}(\tfrac{1}{2}m\pi)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}(\tfrac{1}{2}m\pi)^5 - ..$$

$$\cos. m.\tfrac{1}{2}\pi = 1 - \frac{1}{1.2}(\tfrac{1}{2}m\pi)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}(\tfrac{1}{2}m\pi)^4 - \ldots$$

Es ist aber

$\frac{1}{2}\pi = 1.5707963$, $\frac{1}{8}\pi^2 = 1.2337005$, $\frac{1}{48}\pi^3 = 0.6459641$ rc.,

so daß also die vorhergehenden Reihen in folgende übergehen:

$$\begin{aligned}\sin.(m.90^0) = {} & 1.57080\,m\\ & - 0.64596\,m^3\\ & + 0.07969\,m^5\\ & - 0.00468\,m^7\\ & + 0.00016\,m^9\end{aligned}$$ und

$$\cos.(m.90^\circ) = 1 - 1.23370\,m^2 + 0.25367\,m^4 - 0.02086\,m^6 + 0.00092\,m^8 - 0.00002\,m^{10}.$$

Um nach diesen Ausdrücken z. B. sin. 9° zu finden, ist $m.90 =$ also $m = \frac{1}{10}$, und daher

$$\begin{aligned}\sin.9^\circ &= 0.157080\\ &- 0.000646\\ &+ 0.000001\\ \hline &\;\; 0.156435.\end{aligned}$$

Wenn man die numerischen Factoren der beyden Ausdrücke von sin. $(m.90^\circ)$ und cos. $(m.90^\circ)$ auf mehr Decimalstellen entwickelt, so wird man dadurch die Tafeln der Sinus und Cosinus für alle Grade und Minuten genau berechnen können.

§. 65. (Ausdruck der Sinus und Cosinus durch Produkte unendlich vieler Factoren.) Da die Reihe

$$\sin.x = x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \dots\right)$$

gleich Null wird, wenn x die Werthe $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ oder die Werthe $-\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ erhält, so kann man diese Werthe als die Wurzeln der Gleichung

$$0 = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} = \dots$$

betrachten. Setzt man aber $x = \frac{1}{y}$, so geht diese Gleichung über in

$$0 = y^n - \frac{y^{n-2}}{1.2.3} + \frac{y^{n-4}}{1.2.3.4} - \dots,$$

und von dieser letzten Gleichung sind daher die Wurzeln

$$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \dots \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\pi},\ -\frac{1}{2\pi},\ -\frac{1}{3\pi},\ \dots,$$

so daß man also hat

$$y^n - \frac{y^{n-2}}{1.2.3} + \frac{y^{n-4}}{1.2.3.4.5} - \dots$$
$$= \left(y - \frac{1}{\pi}\right)\left(y + \frac{1}{\pi}\right)\left(y - \frac{1}{2\pi}\right)\left(y + \frac{1}{2\pi}\right)\dots,$$

oder wenn man diese Gleichung durch y^n dividirt:

$$1 - \frac{1}{1.2.3y^2} + \frac{1}{1.2.3.4.5y^4} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\pi^2 y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4\pi^2 y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9\pi^2 y^2}\right)\ldots;$$

oder endlich, wenn man den Werth von x wieder herstellt:

$$1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Diesem gemäß hat man also

$$\sin.x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

und auf dieselbe Weise erhält man auch

$$\cos.x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots,$$

welche Ausdrücke sehr geschickt sind, für jeden Werth von x die Logarithmen der sin. x und cos. x auf dieselbe Art zu berechnen, wie wir in §. 64 dieß für die Sinus und Cosinus selbst gezeigt haben.

§. 66. (Zurückführung der Reihen auf Differentialgleichungen.) Öfters lassen sich Reihen, deren Summe man nicht kennt, auf Differentialgleichungen bringen, deren weitere Behandlung dann auch die Samme jener Reihen kennen lehrt. Um z. B. die Summe der Reihe

$$S = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

zu finden, sey

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

das heißt also, es ist

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy}{1+y}$$

die gesuchte Differentialgleichung, und da diese aus der Differentiation der Gleichung

$$x = \log.(1+y) \quad \text{oder} \quad e^x = 1 + y$$

entsteht, so ist auch, wenn man $x = 1$ setzt, die gesuchte Summe $S = e - 1$.

Sey eben so die Reihe

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1.2)^2} + \frac{1}{(1.2.3)^2} + \frac{1}{(1.2.3.4)^2} + \ldots$$

gegeben. Setzt man wieder

$$y = x + \frac{y^2}{(1.2)^2} + \frac{y^3}{(1.2.3)^2} + \ldots,$$

so erhält man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2^2.3} + \frac{x^3}{2^2.3^2.4} + \ldots$$

Multiplicirt man aber diesen Ausdruck durch x, und nimmt dann von ihm wieder das Differential, so ist

$$\frac{x d^2 y + dy dx}{dx^2} = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^2.3^2} + \ldots,$$

woraus daher folgt

$$\frac{x d^2 y + dy dx}{dx^2} = 1 + y \quad \text{oder}$$

$$x d^2 y + dy dx - x y dx^2 - dx^2 = 0,$$

und diese Differentialgleichung der zweyten Ordnung wird die Summe der vorhergehenden Reihe angeben, wenn man die endliche Gleichung finden kann, aus welcher diese, durch eine zweymalige Differentiation, entstanden ist.

I. Es ist nach dem Vorhergehenden (§. 42)

$$\log.\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdruckes durch dx, so erhält man

$$dx \log.\frac{1}{1-x} = x dx + \frac{x^2 dx}{2} + \frac{x^3 dx}{3} + \ldots$$

Von den Differentialausdrücken rechts dem Gleichheitszeichen lassen sich, nach dem Vorhergehenden, die endlichen Ausdrücke, aus welchen sie durch Differentiation entstanden sind, sehr leicht angeben. Diese sind nämlich

$$\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{2.3}, \frac{x^4}{3.4}, \text{ u. s.}$$

Aber auch von $dx \log. \frac{1}{1-x}$ findet man jenen endlichen Ausdruck, wie man sich leicht durch die Differentiation desselben überzeugen kann, gleich

$$x + (1-x) \log.(1-x),$$

so daß man daher hat

$$x + (1-x) \log.(1-x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots$$

und dadurch ist also auch die Summe der letzten Reihe bekannt.

Multiplicirt man auch diesen Ausdruck wieder durch dx, so erhält man

$$x\,dx + (1-x)\,dx \,.\, \log.(1-x)$$
$$= \frac{x^2}{1.2}dx + \frac{x^3}{2.3}dx + \frac{x^4}{3.4}dx + \ldots,$$

und davon geben die Glieder rechts des Gleichheitszeichens zu ihrem ursprünglichen endlichen Ausdrucke

$$\frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{2.3.4}, \frac{x^5}{3.4.5}, \ldots$$

und das erste Glied gibt eben so

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-x)^2 \,.\, [\tfrac{1}{2} - \log.(1-x)],$$

so daß man daher diesen letzten Ausdruck als die Summe der Reihe

$$\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \ldots$$

zu betrachten hat. Für $x = 1$ erhält man aus den beyden vorhergehenden Reihen

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{ und}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots$$

II. Sucht man eben so die Summe s der Reihe

$$s = 1.x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - \ldots,$$

so hat man, wenn man sie durch x multiplicirt und differentiirt:

$$\frac{d.(sx)}{dx} = 1.2x - 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 - \ldots,$$

und wenn man auch diesen Ausdruck wieder durch x multiplicirt:

$$\frac{x\,d.(sx)}{dx} = 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4,$$

das heißt

$$\frac{x\,d.(s\,x)}{d\,x} = x - s \quad \text{oder} \quad d\,s + \frac{s(x+1)}{x^2}\,d\,x = \frac{d\,x}{x},$$

und davon ist, wie man weiter unten (§. 205) sehen wird, der ursprüngliche endliche Ausdruck leicht zu finden.

Man sieht, wie sich dieses Verfahren fortsetzen und auch auf andere Reihen vortheilhaft anwenden läßt.

§. 67. (**Entwicklung der Differentialgleichungen in Reihen.**) Dieses Verfahren, welches gleichsam das Umgekehrte von dem im §. 66 Vorgetragenen ist, kann oft mit Nutzen angewendet werden, um den Werth von transcendenten oder andern verwickelten Größen, die durch eine Gleichung gegeben sind, mittelst einer Reihe zu finden.

Sey z. B. die Gleichung gegeben

$$u\,.\,\sin.^3 y = 2\,y - \sin.\,2\,y,$$

und daraus der Werth von u durch y ausgedrückt zu bestimmen. Zu dieser Absicht differentiire man diese Gleichung, wodurch man erhält

$$3\,u\,\cos.y\,\sin.^2 y + \frac{d\,u}{d\,y}\,.\,\sin.^3 y = 4\,\sin.^2 y.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $x = \sin.^2 \frac{1}{2}y$, also auch $\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{1}{2}\sin.y$, so erhält man

$$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{8 - 6\,u\,\cos.y}{\sin.^2 y} = \frac{4 - 3\,u\,(1 - 2\,x)}{2\,x\,(1 - x)} \quad \text{oder}$$

$$2\,x\,(1 - x)\,\frac{d\,u}{d\,x} - 4 + (3 - 6\,x)\,.\,u = 0.$$

Es sey nun

$$u = \tfrac{4}{3}(1 + \alpha\,x + \beta\,x^2 + \gamma\,x^3 + \ldots),$$

wo die Factoren α, β, γ, ... noch zu bestimmen sind.

Substituirt man diesen Werth von u und sein Differential in der vorhergehenden Gleichung, und setzt dann die Factoren der gleichen Potenzen von x, jeden für sich, gleich Null, so findet man

$$\alpha = \frac{6}{5},\quad \beta = \frac{8\,\alpha}{7},\quad \gamma = \frac{10\,\beta}{9},\quad \delta = \frac{12\,\gamma}{11},\; \ldots,$$

und dadurch erhält man den gesuchten Ausdruck

$$u = \frac{4}{3} + \frac{4\,.\,6}{3\,.\,5}\,x + \frac{4\,.\,6\,.\,8}{3\,.\,5\,.\,7}\,x^2 + \frac{4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}\,x^3 + \ldots$$

§. 68. (Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit den Exponentialgrößen und den Logarithmen.) Wenn man die Reihen, welche wir oben (§. 44 und 45) für e^x und sin. x, cos. x erhalten haben:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

unter sich vergleicht, so bemerkt man sofort, daß, wenn man $x\sqrt{-1}$ statt x in diesen Ausdrücken setzt, die Gleichung erhalten wird

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1}\,.\,\sin. x,$$

also auch, da x ganz willkürlich ist, und daher auch gleich $-x$ gesetzt werden kann:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sqrt{-1}\,.\,\sin. x,$$

und diese beyden Gleichungen geben sofort auch die folgenden, in welchen wir der Kürze wegen k statt $\sqrt{-1}$ gesetzt haben:

$$\sin. x = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k}, \quad \cos. x = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2},$$

$$e^{2kx} = \frac{1 + k\,.\,\text{tang.}\,x}{1 - k\,.\,\text{tang.}\,x},$$

wo $k^2 = -1$, $k^3 = -k$, $k^4 = +1$, u. s. w.

Auf diese Weise stehen daher die trigonometrischen Funktionen mit den Exponentialgrößen in Verbindung.

I. Wenn man in der vorhergehenden Gleichung

$$e^{kx} = \cos. x + k \sin. x$$

die Größe $\cos. x + k \sin. x = y$ setzt, und dann die Logarithmen nimmt, so erhält man

$$kx = \log. y.$$

Allein die angenommene Gleichung

$$k \sin. x - y = \sqrt{1 - \sin.^2 x}$$

gibt, wenn man sie quadrirt,

$$y^2 - 2ky \sin. x = 1 \quad \text{oder}$$

$$x = \text{arc. sin.} \frac{k(1 - y^2)}{2y}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von x in der Gleichung $kx = \log. y$,

so erhält man

$$\log. y = k . \text{arc. sin.} \frac{k(1-y^2)}{2y} = k \text{ arc. cos.} \frac{1+y^2}{2y},$$

und eben so findet man auch

$$\log. y = 2k . \text{arc. tang.} \frac{k(1-y)}{1+y} = k . \text{arc. sec.} \frac{2y}{1+y^2}$$

$$= k . \text{arc. sin. vers.} \frac{(1-y)^2}{-2y},$$

und auf diese Weise hängen daher die Logarithmen von den Kreisbogen ab.

II. Nimmt man in dem gefundenen Ausdrucke

$$\cos. y = 2k . \text{arc. tang.} \frac{k(1-y)}{1+y}$$

die Größe $y = 1$, so wird $\log. 1 = 2k . \text{arc. tang.} 0$, also auch, wenn n eine ganze, positive oder negative Zahl ist:

$$\log. 1 = 2n\pi\sqrt{-1}.$$

Ist aber $y = -1$, so ist $\log.(-1) = 2k \text{ arc. tang.} \frac{2}{0}$, und daher

$$\log.(-1) = (2n+1)\pi . \sqrt{-1},$$

oder der Logarithmus jeder positiven und jeder negativen Zahl hat unendlich viele Werthe, die aber alle imaginär sind, einen einzigen bey den positiven Zahlen ausgenommen, für welchen $n = 0$ ist, da man für jede positive Zahl a hat

$$\log. a = \log.(a . 1) = \log. a + \log. 1 = \log. a + 2n\pi\sqrt{-1}.$$

III. Der vorhergehende Ausdruck

$$e^{2kx} = \frac{1 + k \text{ tang.} x}{1 - k \text{ tang.} x}$$

gibt, wenn man $x = \frac{1}{6}\pi = 30°$, also $\text{tang.} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ setzt:

$$\pi = \frac{3}{k} . \log. \frac{\sqrt{3}+k}{\sqrt{3}-k}.$$

Wenn man aber $x = \frac{1}{n}\pi$ und $\text{tang.} x = y$ setzt, so hat man

$$\pi = \frac{n}{2k} \log. \frac{1+ky}{1-ky}.$$

Setzt man beyde Werthe von π einander gleich, so erhält man

$$y = \frac{1}{k} . \frac{(\sqrt{3}+k)^{\frac{6}{n}} - (\sqrt{3}-k)^{\frac{6}{n}}}{(\sqrt{3}+k)^{\frac{6}{n}} + (\sqrt{3}-k)^{\frac{6}{n}}},$$

und $2y$ ist die Seite eines regelmäßigen, um den Kreis des Halbmessers 1 beschriebenen Polygons von n Seiten.

Bezeichnet $2z$ die Seite des ähnlichen um den Kreis beschriebenen Polygons, so ist

$$2z = \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}},$$

also auch, wenn man den vorhergehenden Werth von y substituirt:

$$2z = \frac{(\sqrt{3} + k)^{\frac{6}{n}} - (\sqrt{3} - k)^{\frac{6}{n}}}{k \cdot \sqrt{4}^{\frac{6}{n}}}.$$

Für $n = 6$ oder für das regelmäßige Sechseck findet man durch diese Ausdrücke $2y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und $2z = 1$. Für $n = 4$ oder für das regelmäßige Viereck ist $2y = 2$ und $2z = \sqrt{2}$ u. s. f.

§. 69. (**Moivre's Binomialformel**). Setzt man in der vorhergehenden Gleichung

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} \,.\, \sin. x$$

statt x die Größe nx, so hat man:

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos. nx + \sqrt{-1} \,.\, \sin. nx.$$

Erhebt man aber beyde Theile derselben Gleichung auf die Potenz n, so ist

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos. x + \sqrt{-1} \,.\, \sin. x)^n,$$

so daß man daher hat

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \,.\, \sin. x)^n = \cos. nx + \sqrt{-1} \,.\, \sin. nx;$$

oder auch, wenn r eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet, und statt x die Größe $x + 2r\pi$ gesetzt wird, da jeder Quadratwurzel ein doppeltes Zeichen zukommt:

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin. x)^n = \cos. n(x + 2r\pi) \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin. n(x + 2r\pi),$$

und dieser Ausdruck heißt, nach seinem Erfinder, die Moivre'sche Formel.

§. 70. (**Vielfältigkeit der Werthe der Wurzelgrößen**). Wenn man in der letzten Gleichung die Größe x gleich 0 und gleich π setzt, so erhält man

$$(+1)^n = \cos. 2rn\pi + \sqrt{-1} \,.\, \sin. 2rn\pi \quad \text{und}$$
$$(-1)^n = \cos. (2r+1)n\pi + \sqrt{-1} \,.\, \sin. (2r+1)n\pi.$$

Da man aber für jede ganze Zahl n hat:

$$\sin. 2rn\pi = \sin. (2r+1)n\pi = 0, \quad \cos. 2rn\pi = 1,$$

und endlich

$$\cos. (2r+1)n\pi = \pm 1$$

das obere oder untere Zeichen, wenn n gerade oder ungerade ist, so ist auch für jede ganze Zahl n

$$(+1)^n = 1, \quad (-1)^{2n} = 1 \quad \text{und} \quad (-1)^{2n+1} = -1,$$

wie bekannt.

Allein wenn n keine ganze Zahl ist, so müssen diese Potenzen der Einheit, da die willkürliche Zahl r von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen kann, im Allgemeinen unendlich viele Werthe anzunehmen fähig seyn. Doch kann es sich ereignen, daß bey den Sinus und Cosinus der Bogen $2rn\pi$ und $(2r+1)n\pi$ eine periodische Wiederkehr eintritt, und daß daher auch die Werthe von $(+1)^n$ und $(-1)^n$ sich periodisch wiederholen. Um dieß zu untersuchen, wollen wir bemerken, daß zwey Kreisbogen nur dann durchaus gleiche trigonometrische Funktionen haben, wenn sie um ein Vielfaches der ganzen Peripherie 2π von einander verschieden sind, oder wenn man die beyden Bedingungsgleichungen hat:

$$2rn\pi - 2r'n\pi = 2h\pi \quad \text{und}$$
$$(2r+1)n\pi - (2r'+1)n\pi = 2h\pi,$$

wo h irgend eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

Diese beyden Gleichungen lassen sich aber, wie man sieht, auf die einzige

$$(r - r')n = h \quad \text{oder} \quad n = \frac{h}{r - r'}$$

zurückführen, und aus dieser Gleichung folgt, daß bey den Potenzen $(+1)^n$ und $(-1)^n$ eine periodische Rückkehr derselben Werthe dann Statt haben werde, wenn n ein rationaler Bruch ist. Ist also n eine irrationale Zahl, so ist die Anzahl jener unter sich verschiedenen Werthe in der That unendlich groß.

Sey also, um jenen Fall näher zu untersuchen, n irgend ein rationaler Bruch $\frac{k}{m}$, wo k und m die kleinstmöglichen ganzen Zahlen bezeichnen, deren Division diesen Bruch $\frac{k}{m}$ gibt. Dieß vorausgesetzt, ist nach dem Vorhergehenden

$$(+1)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{1^k} = \sqrt[m]{1} \quad \text{und}$$

$$(-1)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{(-1)^k} = \sqrt[m]{(\pm 1)}$$

das obere oder untere Zeichen, wenn k gerade oder ungerade ist. Daraus folgt, daß die Anzahl der Werthe der Potenzen

$$(+1)^{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad (-1)^{\frac{k}{m}}$$

bloß von dem Nenner m abhängen, den wir stets als positiv annehmen wollen, und daß wir daher nur die Werthe der Ausdrücke

$$\sqrt[m]{(+1)} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{(-1)}$$

hier näher zu untersuchen haben.

Es ist aber, nach dem Vorhergehenden, $\sqrt[m]{(+1)}$ oder

$$(+1)^{\frac{1}{m}} = \cos.\frac{2r\pi}{m} + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin.\frac{2r\pi}{m} \quad \text{und}$$

$$(-1)^{\frac{1}{m}} = \cos.\frac{2r+1}{m}\pi + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin.\frac{2r+1}{m}\pi.$$

Bey diesen Werthen tritt demnach, wie man aus der obigen Gleichung $(r-r')\,n = h$ sieht, die hier in

$$r - r' = hm$$

übergeht, eine periodische Wiederkehr ein, so oft zwey Zahlen r und r′ um ein Vielfaches des Wurzelexponenten m verschieden sind. Die Anzahl dieser verschiedenen Werthe ist gleich m, und man findet diese Werthe, wenn man aus der Reihe der von $-\infty$ bis $+\infty$ fortgehenden ganzen Zahlen, eine Anzahl m nach einander folgenden, am einfachsten die m kleinsten positiven Zahlen 0, 1, 2, 3 ... m − 1 statt r setzt. Sollen überdieß, was immer wünschenswerth bleibt, die Zahlenwerthe der Bogen $\frac{2r\pi}{m}$ und $\frac{(2r+1)\pi}{m}$ so klein, als möglich, ausfallen, so wird man die eine Hälfte der Werthe von r aus der positiven und die andere Hälfte aus den kleinsten negativen Zahlen wählen, folglich alle zwischen $-\frac{1}{2}m$ und $+\frac{1}{2}m$ liegenden ganzen Zahlen nehmen.

Von allen diesen Werthen werden übrigens nur diejenigen reell seyn, für welche $\sin.\frac{2r\pi}{m} = 0$ und $\sin.\frac{(2r+1)\pi}{m} = 0$ ist.

Auf diese Weise findet man für $\sqrt{(+1)}$ die Werthe

$$\cos. 0 + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin. 0 = +1 \quad \text{und}$$
$$\cos. \pi + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin. \pi = + 1.$$

Für $\sqrt[3]{(+1)}$ aber hat man

$$\cos.\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin.\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{(-3)}),$$
$$\cos. 0 + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin. 0 = +1,$$
$$\cos.\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin.\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{(-3)}).$$

Für $\sqrt[3]{(-1)}$ endlich findet man

$$\cos.\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin.\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{(-3)}),$$
$$\cos. \pi + \sqrt{(-1)} \sin. n = -1,$$
$$\cos.\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin.\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{(-3)}).$$

§. 71. (Auflösung der reinen algebraischen Gleichungen). So nennt man nämlich die Gleichungen der Form

$$x^n \mp A = 0,$$

wo A eine an sich positive Größe darstellt, für welche wir hier a^n setzen wollen.

Diese Gleichung gibt sofort

$$x = (\pm A)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A} \,.\, \sqrt[n]{(\pm 1)} = a\sqrt[n]{(\pm 1)}.$$

Da wir aber bereits die Werthe von $\sqrt[n]{(\pm 1)}$ in §. 70 gefunden haben, so sind auch dadurch die Wurzeln der Gleichungen

$$x^n \mp a^n = 0$$

für alle Werthe von n bekannt. So sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + a^n = 0$$

alle in der allgemeinen Form enthalten:

$$x = a\left[\cos. \frac{2r+1}{n}\pi + \sqrt{(-1)} \,.\, \sin. \frac{2r+1}{n}\pi\right],$$

und die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - a^n = 0$$

werden sämmtlich die Gestalt haben:

$$x = a\left[\cos.\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\ .\ \sin.\frac{2r\pi}{n}\right],$$

wo r alle zwischen $-\frac{1}{2}n$ und $+\frac{1}{2}n$ liegende ganze Zahlen bezeichnet.

Ex. I. Für $x^2 + a^2 = o$ hat man

$$x = a\ (\cos.\tfrac{1}{2}\pi + \sqrt{(-1)}\ \sin.\tfrac{1}{2}\pi) \quad \text{und}$$
$$x = a\ (\cos.\tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{(-1)}\ \sin.\tfrac{1}{2}\pi,$$

also ist auch

$$x^2 + a^2 = (x - a\sqrt{(-1)})\ .\ (x + a\sqrt{(-1)}).$$

Ex. II. Für $x^5 - a^5 = o$ erhält man:

$$x = a\ (\cos.\,o + \sqrt{(-1)}\ \sin.\,o) \quad \text{oder} \quad x = a,$$
$$x = a\ (\cos.\tfrac{2}{5}\pi \pm \sqrt{(-1)}\ \sin.\tfrac{2}{5}\pi), \quad \text{und}$$
$$x = -\tfrac{1}{4}a\left[1 - \sqrt{5} \mp \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\,.\,\sqrt{(-1)}\right] \quad \text{und}$$
$$x = a\ (\cos.\tfrac{4}{5}\pi \pm \sqrt{(-1)}\ \sin.\tfrac{4}{5}\pi), \quad \text{und endlich}$$
$$x = -\tfrac{1}{4}a\left[1 + \sqrt{5} \mp \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\,.\,\sqrt{(-1)}\right],$$

weil nämlich

$$\sin.\tfrac{2}{5}\pi = \sin.\,72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \quad \text{und}$$
$$\sin.\tfrac{4}{5}\pi = \sin.\,36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

ist; so daß man daher die Gleichung $x^5 - a^5 = o$ auch durch die angeführten fünf zweynamigen Faktoren, oder auch durch einen zwey und zwey dreynamigen Faktoren, nämlich durch das Produkt

$$x^5 - a^5 = (x - a)\left[x^2 + \frac{ax}{2}\sqrt{(1 - \sqrt{5})} + a^2\right] \times \left[x^2 + \frac{ax}{2}\sqrt{(1 + \sqrt{5})} + a^2\right]$$

darstellen kann.

§. 72. (Entwicklung der Exponentialgrößen und der Logarithmen aus dem Binom). Da die drey Reihen, welche wir oben (§. 41—43) für diese drey Funktionen gegeben haben, durch das gesammte Gebiet der höheren Analyse von der größten Wichtigkeit sind, so wird es nicht unangemessen seyn, ihre innige Verbindung unter einander hier näher zu zeigen.

Sey also $u = a^x$, so ist auch sofort, was auch n für einen Werth haben mag:

$$u = [(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach dem Binom (§. 41), so müssen, da die Größe n auf den Werth von u keinen Einfluß haben kann,

alle diejenigen Glieder, welche n enthalten, sich gegenseitig aufheben. Es ist aber zuerst, wenn $(1+(a-1))^n$ nach dem Binom entwickelt wird:

$$(1+(a-1))^n = 1 + n(a-1) + \frac{n.n-1}{1.2}(a-1)^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(a-1)^3 + \ldots$$

Ordnet man diese Reihe nach den Potenzen von n, und nennt die Coefficienten α, β, γ, δ..., so hat man

$$(1+a-1)^n = 1 + \alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3 + \ldots$$

Zu unserem Zwecke ist es aber nur nothwendig, den ersten dieser Coefficienten oder α zu kennen, und man hat, wie man sieht:

$$\alpha = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$$

Entwickelt man dann das Binom

$$u = [1 + (\alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3 + \ldots)]^{\frac{x}{n}},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$P = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \ldots$$

setzt, das Binom

$$u = (1 + Pn)^{\frac{x}{n}},$$

so erhält man

$$u = 1 + \frac{x}{n}.Pn + \frac{x.x-n}{n.2n}.P^2n^2 + \frac{x.x-n.x-2n}{n.2n.3n}.P^3n^3 + \ldots$$

oder

$$u = 1 + x.P + \frac{x.x-n}{1.2}.P^2 + \frac{x.x-n.x-2n}{1.2.3}.P^3 + \ldots$$

Da sich aber in diesem Ausdrucke alles, was die willkürliche Zahl n enthält, aufheben muß, so bleiben von dem Coefficienten bloß die Theile x, $\frac{x^2}{1.2}$, $\frac{x^3}{1.2.3}$... und von P bleibt bloß der Theil α, so daß man daher hat:

$$u = a^x = 1 + \frac{\alpha}{1}.x + \frac{\alpha^2}{1.2}.x^2 + \frac{\alpha^3}{1.2.3}.x^3 + \ldots$$

welches die erste der gesuchten Reihen ist; dieselbe, die wir oben (§. 43) gefunden haben, da sich die Größe α leicht bestimmen läßt, die bekanntlich gleich log. nat. a ist.

I. Aus derselben ursprünglichen Gleichung $a^x = u$ folgt aber auch

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + u - 1)^n.$$

Entwickelt man beyde Binome, so erhält man, wie zuvor:

$$(1+(a-1))^{nx} = 1 + nx(a-1) + \frac{nx.nx-1}{1.2}(a-1)^2 + \ldots$$

und

$$(1+(u-1))^{n} = 1 + n(u-1) + \frac{n.n-1}{1.2}(u-1)^2 + \ldots$$

Setzt man beyde Reihen einander gleich, so ist

$$x(a-1) + \frac{x.nx-1}{1.2}(a-1)^2 + \ldots = (u-1) + \frac{n-1}{1.2}(u-1)^2 + \ldots$$

oder da sich hier wieder alle in n multiplicirten Glieder aufheben müssen:

$$x[(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots] = (u-1) - \tfrac{1}{2}(u-1)^2 + \ldots$$

Wir haben aber bereits oben erhalten:

$$\alpha = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots,$$

also ist auch

$$x = \frac{1}{\alpha}[(u-1) - \tfrac{1}{2}(u-1)^2 + \ldots].$$

Da aber $a^x = u$ war, so ist auch in demjenigen System, dessen Basis a ist,

$$x = \log. u;$$

und daher ist

$$\log. u = \frac{1}{\alpha}[(u-1) - \tfrac{1}{2}(u-1)^2 + \tfrac{1}{3}(u-1)^3 - \ldots]$$

übereinstimmend mit §. 42.

II. Um die Gränze zu bestimmen, welcher sich der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ immer mehr nähert, je kleiner x wird, sey $x = \frac{1}{\omega}$, so hat man:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{2}{\omega}\right) + \ldots$$

Da aber die Glieder dieses Ausdrucks, welche die Größe ω enthalten, alle positiv sind, und an Werth und Anzahl mit ω zugleich wachsen, so muß auch diese Größe $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ mit der Größe ω zugleich wachsen, doch so, daß sie immer zwischen den beyden Gränzen

$$1 + \tfrac{1}{1} \quad \text{und}$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

enthalten bleibt. Da aber

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

für $z = \frac{1}{2}$ gibt:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots,$$

so sind jene beyden Gränzen, zwischen welchen die Größe $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$, wenn ω immer wächst, oder die Größe $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, wenn x immer abnimmt, enthalten ist, gleich

2 und 3,

und der Werth, dem sich diese, immer zwischen 2 und 3 enthaltene Größe, stets mehr und mehr nähert, wird desto genauer gefunden werden, eine je größere Zahl man für ω in dem Ausdrucke $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ annimmt. Ist z. B. $\omega = 10000$, so findet man mit Hülfe der bekannten Logarithmen-Tafeln für die Gränze dieser Größe

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega = \left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} = 2.7183 \ldots$$

oder diese Gränze ist die Basis e der natürlichen Logarithmen (§. 44).

III. Sey $a^x = 1 + kx$ und x eine immer kleiner werdende Größe, also auch

$$\frac{a^x - 1}{x} = k.$$

Setzt man aber $a = 1 + b$, so geht die Gleichung

$$a^x = 1 + kx \quad \text{über in}$$
$$(1 + b)^x = 1 + kx,$$

und wenn man $(1 + b)^x$ nach dem Binom entwickelt, so hat man

$$1 + x.b + \frac{x.x-1}{1.2}.b^2 + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}.b^3 + \ldots = 1 + kx,$$

oder, wenn man durch x dividirt:

$$b + \frac{x-1}{1.2}.b^2 + \frac{x-1.x-2}{1.2.3}.b^3 + \ldots = k,$$

oder endlich, wenn $x = 0$ gesetzt wird, so hat man für den Gränzwerth von k

$$k = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \ldots$$

Diese Reihe ist aber (nach §. 43) gleich log. nat. (1 + b), also ist auch

$$\frac{a^x - 1}{x} = \log. a,$$

vorausgesetzt, daß x unendlich klein ist.

IV. Sey ferner $x = \frac{y}{\theta}$, wo x wieder unendlich klein, und θ unendlich groß vorausgesetzt wird. Dadurch geht die vorhergehende Gleichung $a^x = 1 + kx$ in folgende über:

$$a^{\frac{y}{\theta}} = 1 + kx \quad \text{oder} \quad a^y = (1 + kx)^\theta.$$

Entwickelt man $(1 + kx)^\theta$ nach dem Binom, so hat man

$$a^y = 1 + \theta . kx + \frac{\theta . \theta - 1}{1 . 2} . k^2 x^2 + \frac{\theta . \theta - 1 . \theta - 2}{1 . 2 . 3} . k^3 x^3 + \ldots$$

oder da $\theta = \infty$, $x = 0$ und $\theta x = y$ ist

$$a^y = 1 + ky + \frac{k^2 y^2}{1 . 2} + \frac{k^3 y^3}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

übereinstimmend mit der Reihe in §. 43, wenn $k = \log. nat. a$ gesetzt wird.

Es ist daher

$(1 + x \log. nat. a)^\theta$ desto näher gleich $a^{x\theta}$,

je kleiner x und je größer θ ist, also auch

$(1 + x)^\theta$ oder $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ desto näher gleich e,

je kleiner die Größe x ist, wie zuvor.

V. Man kann noch bemerken, daß man hat

$$\sqrt[x]{(1 + x)} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{(1 - x)}{1 . 2} + \frac{(1 - x)(1 - 2x)}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

Setzt man aber in diesem Ausdrucke x gleich Null, so hat man

$$\sqrt[0]{1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{1 . 2 . 3} + \ldots,$$

und da (nach §. 44, I.) diese letzte Reihe gleich e ist, so hat man auch

$$e = \sqrt[0]{1} \quad \text{oder} \quad e = 1^{\frac{1}{x}},$$

wenn x unendlich klein ist, wie zuvor.

§. 73. (Ableitung des Binoms, der Logarithmen und der Exponentialgrößen aus einer ihnen allen gemeinschaftlichen Reihe). Sey die unendliche Reihe gegeben:

$$1 + ax + a(a+k)\frac{x^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Da diese Reihe offenbar von der Größe a auf irgend eine Weise abhängt, so wollen wir sie, als eine Funktion von a, durch fa bezeichnen.

Verwandelt man a in b, so wird man eben so haben:

$$1 + bx + b(b+k)\frac{x^2}{1.2} + b(b+k)(b+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = fb.$$

Wenn man diese beyden Reihen durch einander multiplicirt, so erhält man, nach einigen einfachen Reduktionen:

$$1 + (a+b)x + (a+b)(a+b+k)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ (a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und da dieser Ausdruck völlig dieselbe Form hat, wie die beyden vorhergehenden, so wird man ihn, unserer angenommenen Bezeichnung gemäß, durch $f(a+b)$ ausdrücken können.

Daraus folgt also, daß unsere eingeführte Funktion die Eigenschaft hat, daß für sie immer die Gleichung besteht:

$$fa\,.\,fb = f(a+b)\;\ldots\;(I),$$

und man sieht zugleich, daß, nach der angenommenen Bezeichnung, immer $f(0) = 1$ seyn muß.

I. Setzt man in der Gleichung (I) statt b die Größe $b+c$, so hat man

$$fa\,.\,f(b+c) = f(a+b+c),$$

oder, da bereits $f(b+c) = fb\,.\,fc$ war:

$$fa\,.\,fb\,.\,fc = f(a+b+c);$$

und eben so findet man auch

$$fa\,.\,fb\,.\,fc\,.\,fd = f(a+b+c+d) \quad \text{u. s. f.}$$

Nimmt man aber in diesen Ausdrücken $a = b = c \ldots$, und setzt die Anzahl dieser Buchstaben gleich n, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$(fa)^n = f(na)\;\ldots\;(II),$$

oder die vorhergehende Reihe fa auf die n^{te} Potenz erhoben, ist gleich dieser Reihe fa, wenn man in ihr statt a die Größe na setzt.

Setzt man aber in der Gleichung (I) oder in $fb.fc = f(b+c)$ die Größe c gleich $a-b$, so erhält man

$$\frac{fa}{fb} = f(a-b) \;...\; (III),$$

oder die beyden vorhergehenden, durch fa und fb bezeichneten Reihen, geben, wenn man sie durch einander dividirt, die Reihe fa wieder, wenn man in der letzten a in $a-b$ verwandelt.

Endlich gibt die Gleichung (II), oder $(fb)^n = f(nb)$, wenn man in ihr $nb = a$ setzt:

$$\left(f\frac{a}{n}\right)^n = fa \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[n]{fa} = f\frac{a}{n} \;...\; (IV),$$

oder die n^{te} Wurzel der vorhergehenden Reihe fa ist gleich dieser Reihe fa, vorausgesetzt, daß man in derselben $\frac{a}{n}$ statt a setzt.

II. Drücken wir nun die Gleichung (II) oder $(fa)^n = fna$ umständlich durch die ihr entsprechenden Reihen aus, so hat man

$$\left(1 + a.x + a(a+k)\frac{x^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + ...\right)^n$$
$$= 1 + na.x + na(na+k)\frac{x^2}{1.2} + na(na+k)(na+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + ...$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $a = 1$ und $k = -1$, so erhält man sofort

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + ...,$$

welches das bekannte Newton'sche Binom ist (§. 41).

III. Setzt man aber in demselben Ausdrucke $k = 0$, $a = x = 1$ und $n = hx$, so erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ...\right)^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3} + ...$$

Von dieser Gleichung ist aber das erste Glied (nach §. 44, I.) gleich e^{hx}, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet; also ist auch

$$e^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3} + ...,$$

IV. Setzt man aber $a = e^h$ oder $h = \log. nat. a$, so hat man

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}(\log.nat.a) + \frac{x^2}{1.2}(\log.nat.a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(\log.nat.a)^3 + \ldots$$

und denselben Ausdruck für die Exponentialgröße a^x haben wir auch oben (§. 43) gefunden.

V. Setzt man endlich in dem letzten Ausdrucke (Nr. IV.) die Größe $x = n$ und $a = 1 + x$, so hat man, wenn wieder log. statt log. nat. gesetzt wird:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1}\log.(1 + x) + \frac{n^2}{1.2}\log.^2(1 + x)^2 + \ldots.$$

Da aber bereits oben (Nr. II.) erhalten wurde

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \ldots,$$

so hat man, wenn man beyde Ausdrücke einander gleich setzt:

$$\log.(1 + x) + \frac{n}{1.2}\log.^2(1 + x) + \frac{n^2}{1.2.3}\log.^3(1 + x) + \ldots$$
$$= x + (n - 1)\frac{x^2}{1.2} + (n - 1)(n - 2)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrucke $n = 0$ setzt:

$$\log.(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

wie auch bereits oben (§. 42) gefunden worden ist.

§. 74. (**Erweiterung von Maclaurin's Theorem**). Bezeichnet zuerst u irgend eine Funktion von x, die man in Beziehung auf die Potenzen von x entwickeln will, so wird diese Entwicklung im Allgemeinen die Form haben:

$$u = U + xq_1 + x^2q_2 + x^3q_3 + \ldots + x^nq_n + \ldots,$$

wo $U\, q_1\, q_2\, q_3 \ldots$ von x unabhängige Größen bezeichnen.

Es ist klar, daß M der Werth von u für $x = 0$ ist. Differentiirt man aber den gegebenen Ausdruck von u mehrmal nach einander, so erhält man:

$$\frac{du}{dx} = q_1 + 2xq_2 + 3x^2q_3 + \ldots,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 + 2.3xq_3 + 3.4x^2q_4 + \ldots,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 2.3q_3 + 2.3.4xq_5 + \ldots,$$

und man sieht, daß man für jede ganze positive Zahl n erhält:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = 1.2.3\ldots n q_n + 1.2.3\ldots(n+1)\,x\,q_{n+1} + 1.2.3\ldots(n+2)\,x^2 q_{n+2} + \ldots$$

Setzt man also in diesem Ausdrucke $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$, nach der Differentiation, die Größe $x = 0$, so erhält man

$$q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

und darin besteht das bereits oben (§. 40) angeführte Theorem Maclaurin's, wenn u bloß eine Funktion von einer einzigen Größe x ist.

I. Ist aber u eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und x′, und will man u in Beziehung auf die Potenzen von x und x′ entwickeln, so kann man diese Entwicklung so darstellen:

$$\begin{aligned} u = U &+ x q_{1.0} + x^2 q_{2.0} + x^3 q_{3.0} + \ldots \\ &+ x' q_{0.1} + x x' q_{1.1} + x^2 x' q_{2.1} + \ldots \\ &\qquad\qquad + x'^2 q_{0.2} + x x'^2 q_{1.2} + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + x'^3 q_{0.3} + \ldots \end{aligned}$$

und man findet auf dieselbe Weise den Coefficienten $q_{n.n'}$ des Produkts $x^n x'^{n'}$ durch den Ausdruck

$$q_{n.n'} = \frac{1}{1.2.3\ldots n \,.\, 1.2.3\ldots n'}\left(\frac{d^{n+n'} u}{dx^n\, dx'^{n'}}\right),$$

wo wieder, nach vollendeter Differentiation, x und x′ gleich Null gesetzt werden soll. Um z. B. die dritte der vorhergehenden senkrechten Columnen zu erhalten, wird man $n + n' = 3$ setzen, und dann für n und n′ alle ganze und positive Zahlen nehmen, deren Summe gleich 3 ist, also

n	gleich	3	2	1	0	und
n′	»	0	1	2	3	

setzen.

Ex. Sey die Funktion

$$u = (x + h)^m \,.\, (x' + k)^n$$

gegeben, so hat man:

$$U = h^m k^n,$$

$$q_{1.0} = \left(\frac{du}{dx}\right) = m h^{m-1} k^n,$$

$$q_{0.1} = \left(\frac{du}{dx'}\right) = n h^m k^{n-1} \quad \text{und}$$

$$q_{2.0} = \frac{m.m-1}{1.2} h^{m-2} k^n,$$

$$q_{1.1} = \frac{m.n}{1.1} h^{m-1} k^{n-1},$$

$$q_{0.2} = \frac{n.n-1}{1.2} h^m k^{n-2} \quad \text{u. s. w.},$$

und daher die gesuchte Entwicklung der Funktion $u = (x+h)^m . (x'+h)^n$ gleich

$$h^m k^n + m h^{m-1} k^n . x + \frac{m.m-1}{1.2} h^{m-2} k^n . x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} h^{m-3} k^n . x^3 + \ldots$$

$$+ n k^{n-1} h^m . x' + \frac{m n}{1.1} h^{m-1} k^{n-1} . x x' + \frac{m.m-1.n}{1.2.1} h^{m-2} k^{n-1} . x^2 x' + \ldots$$

$$+ \frac{n.n-1}{1.2} h^m k^{n-2} . x'^2 + \frac{m.n.n-1}{1.1.2} h^{m-1} k^{n-2} . x x'^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} h^m k^{n-3} . x'^3 + \ldots$$

II. Ist überhaupt $u = f(x, x', x'' \ldots)$ eine Funktion von mehreren veränderlichen Größen $x, x', x'', \ldots$, und will man sie in eine nach den Potenzen und Produkten von $x, x', x'' \ldots$ geordnete Reihe entwickeln, und bezeichnet man durch

$$x^n . x'^{n'} . x''^{n''} \ldots q_{n.n'.n''\ldots}$$

dasjenige Glied dieser Reihe, welches das Produkt $x^n . x'^{n'} . x''^{n''} \ldots$ zum Factor hat, so erhält man

$$q_{n.n'.n''\ldots} = \frac{1}{1.2.3\ldots n . 1.2.3 . n' . 1.2.3 \ldots n''} . \left(\frac{d^{n+n'+n''\ldots} u}{d x^n . d x'^{n'} . d x''^{n''} \ldots}\right),$$

wo man wieder, nach der Differentiation, die Größen $x, x', x'' \ldots$ gleich Null setzen wird.

§. 75. (Erweiterung des Taylor'schen Theorems). Auf ganz analoge Weise läßt sich auch das oben (§. 39) gegebene Theorem Taylor's auf mehrere veränderliche Größen fortsetzen.

Ist zuerst $u = f(x)$, und sucht man $u' = f(x + dx)$, so kann man annehmen:

$$u' = u + q_1 dx + q_2 dx^2 + q_3 dx^3 + \ldots,$$

und wenn man diese Reihe mit dem ähnlichen Ausdrucke für u' in §. 39 vergleicht, so hat man sofort für das allgemeine Glied derselben

$$q_n \, . \, dx^n$$

den Faktor

$$q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

und dieß ist der bekannte Taylor'sche Lehrsatz in seiner größten Einfachheit.

I. Ist aber $u = f(x, x')$ eine Funktion von zwey veränderlichen Größen, und sucht man

$$u' = f(x + dx, x' + dx'),$$

in eine nach den Potenzen und Produkten von dx und dx' fortgehende Reihe zu entwickeln, so kann man annehmen:

$$\begin{aligned} u' = u &+ q_{1.0} dx + q_{2.0} dx^2 + \ldots \\ &+ q_{0.1} dx' + q_{1.1} dx dx' + \ldots \\ &\qquad\qquad + q_{0.2} dx'^2 \ldots \end{aligned}$$

Setzt man das allgemeine Glied einer jeden vertikalen Columne dieses Ausdrucks gleich

$$q_{n.n'} \, . \, dx^n dx'^{n'},$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit dem bereits oben (§. 53) erhaltenen analogen Werthe von u', so hat man für den Factor $q_{n.n'}$ dieses allgemeinen Gliedes

$$q_{n.n'} = \frac{1}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'}\left(\frac{d^{n+n'} u}{dx^n dx'^{n'}}\right).$$

II. Ist endlich überhaupt

$$u = f(x, x', x'' \ldots)$$

eine Funktion mehrerer veränderlichen Größen, und sucht man den Werth

$$u' = f(x + dx, x' + dx', x'' + dx'' \ldots)$$

dieser Funktion, so wird, analog mit dem Vorhergehenden, von der

gesuchten Entwicklung der Funktion u das allgemeine Glied

$$q_{n,n',n''}\ldots \cdot dx^n \cdot dx'^{n'} \cdot dx''^{n''} \ldots$$

seyn, wo man für den Faktor $q_{n,n',n''}\ldots$ desselben haben wird:

$$q_{n,n',n''}\ldots = \frac{1}{1.2.3\ldots n \,.\, 1.2.3\ldots n' \,.\, 1.2.3\ldots n''\ldots} \cdot \left(\frac{d^{n+n'+n''\ldots}u}{dx^n \cdot dx'^{n'} \cdot dx''^{n''}\ldots}\right).$$

So findet man z. B. wenn $u = f(x, x', x'')$ eine Funktion von drey veränderlichen Größen ist:

$$\begin{aligned} u' = u &+ \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{du}{dx'}\right) dx' + \left(\frac{d^2u}{dx'^2}\right)\frac{dx'^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{du}{dx''}\right) dx'' + \left(\frac{d^2u}{dx''^2}\right)\frac{dx''^2}{1.2} + \ldots \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{d^2u}{dx\,dx'}\right) dx\,dx' + \ldots \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{d^2u}{dx\,dx''}\right) dx\,dx'' + \ldots \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{d^2u}{dx'\,dx''}\right) dx'\,dx'' + \ldots \end{aligned}$$

§. 76. (**Allgemeines Reversionstheorem.**) Die Betrachtung der Differentialien einer Funktion u von mehreren veränderlichen Größen, bloß in Beziehung auf eine derselben genommen, die uns in der Folge zu sehr wichtigen und allgemeinen Resultaten führen wird, bietet jetzt schon ein Mittel dar, eine gegebene Funktion $u = \psi(y)$ nach den Potenzen einer anderen veränderlichen Größe x zu entwickeln, deren Abhängigkeit von y durch eine ganz allgemeine Gleichung gegeben ist.

Sey diese Gleichung

$$y = F[\omega + x\varphi(y)],$$

wo F und φ wieder andere Funktionen bezeichnen sollen.

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x und auf ω, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left[\varphi(y) + x\varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dx}\right] \cdot F'(\omega + x\varphi(y)) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) = \left[1 + x\varphi'(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}\right] \cdot F'(\omega + x\varphi(y)),$$

wo F' und φ' die Differential-Coefficienten bezeichnen, die, wie in

§. 39, von beyden Gleichungen identisch sind. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $F'(\omega + x\varphi(y))$, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}.$$

Da aber u oder $\psi(y)$ bloß von y abhängt, so hat man

$$\frac{du}{dx} = \psi'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{du}{d\omega} = \psi'(y) \cdot \frac{dy}{d\omega},$$

woraus man, durch die Elimination von $\psi'(y)$, erhält

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{d\omega} = \frac{du}{d\omega} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Setzt man aber statt $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth $\varphi(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}$, und nimmt der Kürze wegen $\varphi(y) = z$, so erhält man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = z \cdot \frac{du}{d\omega}.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d \cdot z\frac{du}{d\omega}}{dx}.$$

Allein die Größe $z \cdot \frac{du}{d\omega}$ ist nichts anderes, als $\varphi(y) \cdot \psi'(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}$, das heißt also, eine Funktion von y multiplicirt durch $\frac{dy}{d\omega}$, daher kann man sie als den Differential-Coefficienten einer neuen Funktion von y ansehen, die wir durch u' bezeichnen wollen, so daß man hat

$$\frac{du'}{d\omega} = z \cdot \frac{du}{d\omega} \quad \text{und} \quad \frac{d \cdot z\frac{du}{d\omega}}{dx} = \frac{d^2u'}{dx\,d\omega}.$$

Kehrt man die Ordnung der Differentiation um, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u'}{d\omega\,dx} = \frac{d \cdot \frac{du'}{dx}}{d\omega}.$$

Man muß aber bemerken, daß die Relation $\frac{du}{dx} = z \cdot \frac{du}{d\omega}$ auch in Beziehung auf u' Statt hat, und daß daher auch ist

$$\frac{du'}{dx} = z \cdot \frac{du'}{d\omega},$$

wie man daraus sieht, daß u' auch eine Funktion von y ist, und daß man daher, so wie früher für u, auch haben muß

$$\frac{du'}{dx}\cdot\frac{dy}{d\omega}=\frac{du'}{d\omega}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Setzt man also in dem Ausdrucke von $\frac{d^2u}{dx^2}$ statt $\frac{du'}{dx}$ seinen Werth $z.\frac{du'}{d\omega}$, und ferner auch statt $\frac{du'}{d\omega}$ seinen Werth $z.\frac{du}{d\omega}$, so findet man

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\frac{d.z\frac{du'}{d\omega}}{d\omega}=\frac{d.z^2\frac{du}{d\omega}}{d\omega}.$$

Differentiirt man dann diese Gleichung in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2.z^2\frac{du}{d\omega}}{dx\,d\omega}.$$

Macht man aber wieder, der Kürze wegen, $\frac{du''}{d\omega}=z^2\frac{du}{d\omega}$, und kehrt man die Ordnung der Differentiation um, so erhält man

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^3u''}{d\omega^2dx}=\frac{d^2.\frac{du''}{dx}}{d\omega^2}.$$

Da man aber ebenfalls $\frac{du''}{dx}=z\frac{du''}{d\omega}$, also auch $\frac{du''}{dx}=z^3.\frac{du}{d\omega}$ hat, so ist auch

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=\frac{d^2.z^3\frac{du}{d\omega}}{d\omega^2}.$$

Wir haben demnach die Gleichungen erhalten:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=z\frac{du}{d\omega},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\frac{d.\left(z^2\frac{du}{d\omega}\right)}{d\omega},$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=\frac{d^2.\left(z^3\frac{du}{d\omega}\right)}{d\omega^2}\text{ u. s.,}$$

also ist auch allgemein

$$\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)=\frac{d^{n-1}.\left(z^n\frac{du}{d\omega}\right)}{d\omega^{n-1}}.$$

Da nun, wie in Maclaurin's Theorem, die nach den Potenzen von x zu entwickelnde Größe u die Form hat (§. 73)

$$u = U + x q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3 + \ldots + x^n q_n + \ldots,$$

wo $q_n = \left(\frac{d^n u}{d x^n}\right)$ ist, wenn nach der Differentiation die Größe $x = 0$ gesetzt wird, so wird von dem allgemeinen Gliede

$$x^n . q_n$$

dieser Entwicklung der Factor q_n seyn

$$q_n = \left(\frac{d^n u}{d x^n}\right) = \frac{d^{n-1} . \left(z^n \frac{d u}{d \omega}\right)}{d \omega^{n-1}},$$

oder man wird für die gesuchte Entwicklung der Funktion u nach den Potenzen von x den Ausdruck haben

$$u = U + \frac{x}{1} . \left(\frac{z\, d u}{d \omega}\right) + \frac{x^2}{1 . 2} \frac{d . \left(z^2 \frac{d u}{d \omega}\right)}{d \omega} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} \frac{d^2 . \left(z^3 \frac{d u}{d \omega}\right)}{d \omega^2} + \ldots,$$

wo U den Werth von u für $x = 0$ bezeichnet. Dieselbe Voraussetzung läßt die Gleichung $y = F(\omega + x \varphi(y))$ in die einfachere $y = F(\omega)$, und den vorhergehenden Werth von $\frac{d y}{d \omega}$ in $F'(\omega)$ übergehen, so daß man also in der letzten Reihe

statt $z = \varphi(y)$ die Größe $z = \varphi . [F(\omega)]$,

und statt $\frac{d u}{d \omega}$ die Größe $\frac{d u}{d \omega} = F'(\omega)$

setzen wird. Hat man also die Gleichungen gegeben:

$$u = \psi(y) \quad \text{und} \quad y = F(\omega + x z),$$

wo $z = \varphi(y)$ wieder eine Funktion von y ist, und will man u in eine nach den Potenzen von x fortgehende Reihe entwickeln, so wird diese Reihe seyn

$$u = U + \frac{x}{1} . \left(Z \frac{d U}{d \omega}\right) + \frac{x^2}{1 . 2} \frac{d . \left(Z^2 \frac{d U}{d \omega}\right)}{d \omega} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} \frac{d^2 . \left(Z^3 \frac{d U}{d \omega}\right)}{d \omega^2} + \ldots,$$

wobey vorausgesetzt wird, daß $x=o$ gebe $y=F(\omega)$, und daß dieser Werth von $y=F(\omega)$, in z und u substituirt, Z und U geben soll.

Dieses sehr allgemeine und wichtige Theorem ist von Lagrange gefunden, und später von Laplace in der hier vorgetragenen Gestalt dargestellt worden.

§. 77. (Specielle Fälle des vorhergehenden allgemeinen Theorems.) I. Ist die Gleichung $y=\omega+x\varphi(y)$ gegeben, und sucht man $u=\psi(y)$ in eine nach den Potenzen von x fortgehende Reihe zu entwickeln, so ist hier $z=\varphi(y)$, und unter der Voraussetzung $x=o$ hat man

$$y=\omega,\quad \text{also auch}\quad Z=\varphi(\omega)\quad \text{und}\quad U=\psi(\omega),$$

so daß daher die gesuchte Reihe ist

$$\psi(y)=\psi(\omega)+x\left(\varphi\omega.\frac{d\psi\omega}{d\omega}\right)+\frac{x^2}{1.2}d.\left(\frac{(\varphi\omega)^2.\frac{d\psi\omega}{d\omega}}{d\omega}\right)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}d^2.\left(\frac{(\varphi\omega)^3.\frac{d\psi\omega}{d\omega}}{d\omega^2}\right)+\ldots,$$

und auf diese Weise wurde die Reihe zuerst von Lagrange gegeben.

II. Ist die Gleichung $x=(y-\omega)\varphi y$ gegeben, und sucht man $u=\psi y$, so hat man auch $y=\omega+\frac{x}{\varphi y}$, und daher ist $z=\frac{1}{\varphi y}$.

Für $x=o$ aber erhält man

$$y=\omega,\quad Z=(\varphi\omega)^{-1}\quad \text{und}\quad U=\psi\omega,$$

so daß man daher hat

$$\psi y=\psi\omega+x\left((\varphi\omega)^{-1}.\frac{d\psi\omega}{d\omega}\right)$$
$$+\frac{x^2}{1.2}d.\left(\frac{(\varphi\omega)^{-2}.\frac{d\psi\omega}{d\omega}}{d\omega}\right)+\ldots,$$

und so fort für mehrere andere Formen, die man der ursprünglichen Gleichung $y=F(\omega+x\varphi y)$ geben kann.

Wir wollen nun das Vorhergehende auf einige specielle Beyspiele anwenden.

(A.) Sey zuerst die Gleichung $\omega-y+y^n=o$ gegeben. Man suche den natürlichen Logarithmus von y.

Vergleicht man dieß mit der Gleichung $\omega-y+x\varphi y=o$ in §. 77, I., so erhält man

$$x = 1, \quad \text{also auch} \quad \varphi\omega = \omega^n,$$
$$\varphi y = y^n, \quad » \quad » \quad \psi\omega = \log.\omega \quad \text{und}$$
$$\psi y = \log. y, \quad » \quad » \quad \frac{d.\psi\omega}{d\omega} = \frac{1}{\omega},$$

so daß man also hat

$$\log. y = \log.\omega + \omega^{n-1} + \frac{2n-1}{1.2}\omega^{2(n-1)} + \frac{3n-1.3n-2}{1.2.3}\omega^{3(n-1)}$$
$$+ \frac{4n-1.4n-2.4n-3}{1.2.3}\omega^{4(n-1)} + \ldots$$

Für $n = 0$ hat man $\omega - y + 1 = 0$, also auch

$$\log. y = \log.\omega + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{3\omega^3} - \ldots \quad \text{oder}$$
$$\log.\frac{y}{\omega} = \log.\frac{\omega+1}{\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{3\omega^3} - \ldots$$

(B). Ist die Gleichung $y = \omega + a y^m$ gegeben und y^n zu suchen, so hat man, wenn dieser Ausdruck mit $y = \omega + x\varphi y$ verglichen wird:

$$x = a, \quad \text{also auch} \quad \varphi\omega = \omega^m,$$
$$\varphi y = y^m, \quad » \quad » \quad \psi\omega = \omega^n,$$
$$\psi y = y^n, \quad » \quad » \quad \frac{d.\psi\omega}{d\omega} = n\omega^{n-1},$$

und die gesuchte Reihe für y^n wird seyn

$$y^n = \omega^n + a.n\omega^{m+n-1}$$
$$+ \frac{a^2}{1.2} n(2m+n-1)\omega^{2m+n-2}$$
$$+ \frac{a^3}{1.2.3} n(3m+n-1)(3m+n-2)\omega^{3m+n-3} + \ldots$$

(C). Ist die quadratische Gleichung $a - y + by^2 = 0$ gegeben, so kann man, durch Hülfe des vorhergehenden Theorems, jede Funktion der Wurzeln dieser Gleichung finden. Ist z. B. $\psi y = y^m$, so hat man

$$y^m = a^m + m a^{m+1} b + \frac{m.m+3}{1.2} a^{m+2} b^2$$
$$+ \frac{m.m+4.m+5}{1.2.3} a^{m+3} b^3$$
$$+ \frac{m.m+5.m+6.m+7}{1.2.3.4} a^{m+4} b^4 + \ldots$$

Ist aber $\psi y = \log. nat. y$, so findet man

$$\log. y = \log. a + ab + \frac{3}{2}(ab)^2 + \frac{4.5}{2.3}(ab)^3$$
$$+ \frac{5.6.7}{2.3.4}(ab)^4 + \ldots$$

(D). Ist die Gleichung $x = y - a \sin. y$ gegeben, und sucht man $\psi y = y$, so erhält man

$$y = x + a \sin. x + \frac{a^2}{1.2.2} . 2 \sin. 2x$$
$$+ \frac{a^3}{1.2.3.2^2} (3^2 \sin. 3x - 3 \sin. x)$$
$$+ \frac{a^4}{1.2.3.4.2^3} (4^3 \sin. 4x - 4.2^3 \sin. 2x) + \ldots$$

(E). Ist die Gleichung gegeben

$$z = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \ldots,$$

und sucht man $\psi y = y^n$, so hat man auch

$$z - y - y^2 (\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots) = 0,$$

und diese Gleichung mit der vorhergehenden $\omega - y + x \varphi y = 0$ verglichen, gibt

$$\omega = z,$$
$$x = -1,$$
$$\varphi y = y^2 (\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots),$$

also auch

$$\varphi \omega = z^2 (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots),$$
$$\psi \omega = z^n \text{ und}$$
$$\frac{d . \psi \omega}{d \omega} = n z^{n-1}.$$

Man hat daher, wenn man der Kürze wegen $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots$ setzt:

$$y^n = z^n - n z^{n+1} . Z + \frac{n}{1.2} d . \left(\frac{z^{n+3} . Z}{dz}\right)$$
$$- \frac{n}{1.2.3} d^2 . \left(\frac{z^n + 5 . Z}{dz^2}\right) + \ldots,$$

und dieser Satz enthält die sogenannte Reversion der Reihen.

Setzt man

$$z = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \ldots,$$

und sucht man daraus $\psi y = y$, so wird man in dem vorhergehenden Ausdrucke bloß die Größe $n = 1$ setzen. Entwickelt man dann die dort angezeigten Differentialien, so erhält man

$$y = z + a z^2 + b z^3 + c z^4 + d z^5 + \ldots,$$

wo man für die Factoren a, b, c, ... folgende Ausdrücke findet:

$$a = -\alpha,$$
$$b = 2\alpha^2 - \beta,$$
$$c = 5\alpha\beta - \gamma - 5\alpha^3,$$
$$d = 14\alpha^4 - 21\alpha^2\beta + 6\alpha\gamma + 3\beta^2 - \delta,$$
$$e = -42\alpha^5 + 84\alpha^3\beta - 28\alpha^2\gamma - 28\alpha\beta^2 + 7\alpha\delta + 7\beta\gamma - \varepsilon,$$

u. s. w.

VIII.

Untersuchung unbestimmter analytischer Ausdrucke.

§. 78. (**Bestimmung dieser Werthe durch Taylor's Theorem**). Funktionen von einer oder von mehreren veränderlichen Größen nehmen zuweilen, für gegebene Werthe dieser Größen, die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. So geht z. B. die Funktion

$$u = \frac{(x-a)^m \cdot b^x}{(x-a)^n \cdot \log. x}$$

für den besondern Fall, wo $x = a$ ist, in $u = \frac{0}{0}$ über. Allein der Werth von u für diesen Fall ist demungeachtet ein bestimmter Werth, da offenbar u für $x = a$ entweder gleich Null, oder unendlich groß, oder gleich der endlichen Größe $\frac{b^a}{\log. a}$ seyn wird, je nachdem $m > n$, oder $m < n$, oder $m = n$ ist. Man kann diese bloß scheinbare Unbestimmtheit sogleich entfernen, wenn man die vorhergehende Gleichung auf folgende Weise ausdrückt:

$$u = (x-a)^{m-n} \cdot \frac{b^x}{\log. x}.$$

Allein nicht immer liegen die Factoren des Zählers und Nenners, welche diese Erscheinung hervorbringen, so offen da, und man muß daher zu andern Mitteln übergehen, die wahren Werthe der Funktionen in solchen Fällen zu bestimmen. Der Taylor'sche Lehrsatz ist zu diesem Zwecke in den meisten Fällen sehr geeignet. Sey

$$u = \frac{X}{X'},$$

wo X sowohl als X′ Funktionen von x bezeichnen. Geht in diesem Ausdrucke die Größe x in x+h über, so hat man, nach Taylor's Theorem:

$$u' = \frac{X + \frac{dX}{dx} \cdot h + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots}{X' + \frac{dX'}{dx} \cdot h + \frac{d^2X'}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots},$$

wo $u' = u$ für $h = o$ ist. Ist nun die gegebene Funktion $u = \frac{X}{X'}$ so beschaffen, daß sie für den besondern Werth von $x = o$ in $u = \frac{o}{o}$ übergeht, so erhält man

$$u' = \frac{\frac{dX}{dx} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{h}{1 \cdot 2}}{\frac{dX'}{dx} + \frac{d^2X'}{dx^2} \cdot \frac{h}{1 \cdot 2}};$$

und da auch hier wieder $u' = u$ für $h = o$ wird, so hat man für den gesuchten Werth von

$$u = \frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}.$$

Sollte aber auch dieser Ausdruck $\frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}$ für $x = o$ wieder $o : o$ geben, so wird man auf dieselbe Weise

$$u = \frac{d^2X}{dx^2} : \frac{d^2X'}{dx^2}$$

finden, u. s. w., so daß man daher von einem solchen Bruche, der für einen bestimmten Werth von x die Gestalt $\frac{o}{o}$ annimmt, den wahren Werth desselben finden wird, wenn man das erste oder überhaupt das n^{te} Differential des Zählers durch das n^{te} Differential des Nenners dividirt.

Ex. I. Sey $u = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ gegeben. Um den Werth dieses Ausdrucks für den besondern Fall $x = 1$ zu suchen, hat man schon nach einer ersten Differentiation $u = \frac{n x^{n-1} dx}{dx}$, oder der gesuchte Werth ist $u = n x^{n-1} = n$.

Ex. II. Eben so gibt $u = \frac{a x^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ für $x = c$ nach der ersten Differentiation

$$u = \frac{ax - ac}{bx - bc},$$

und da auch dieser Ausdruck für $x = c$ noch gleich $\frac{o}{o}$ wird, so erhält

man durch eine zweyte Differentiation den gesuchten wahren Werth von

$$u = \frac{a\,dx}{b\,dx} = \frac{a}{b}.$$

Auf dieselbe Weise findet man für den besondern Fall $x = 0$ folgende Werthe:

$$\frac{\sin. x}{x} = 1, \quad \frac{\sin.^2 x}{x} = 0, \quad \frac{\sin. x}{x^2} = \infty, \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{x - \sin. x}{x^3} = \tfrac{1}{6},$$

$$\frac{\log.(1+x)}{x} = 1, \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2a}, \quad \frac{(1+x)\log. x}{(1-x)^2} = \infty,$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin. x} = 2;$$

und eben so ist für den Fall $x = 1$:

$$\frac{\log. x}{x - 1} = 1, \quad \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{x - 1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}.$$

§. 79. (**Fälle, wo sich der Taylor'sche Lehrsatz nicht anwenden läßt.**) Wenn der im Zähler und Nenner für einen bestimmten Fall verschwindende Factor einen gebrochenen Exponenten hat, so läßt sich die vorhergehende Methode nicht mehr anwenden, weil die Differentiation, wenn sie auch noch so weit fortgesetzt wird, diesen Factor immer wieder erzeugt, wie dieß z. B. bey der Funktion

$$u = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

fur $x = 1$ der Fall ist.

Wenn aber irgend eine Funktion u von x für einen besondern Werth $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält, so wird man in ihr statt x den Ausdruck $a + h$ substituiren, wo h eine sehr kleine Größe ist, und dann den Ausdruck u nach den Potenzen von h entwickeln, wo man gewöhnlich schon bey den ersten Gliedern der Entwicklung stehen bleiben kann, und wo man sodann den gesuchten Werth von u erhält, wenn man in dieser Entwicklung die Größe $h = 0$ setzt.

In unserem vorhergehenden Beyspiele erhält man, wenn man $x = 1 + h$ setzt:

$$u = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{2h + h^2}} = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2 + h}} = 0 \quad \text{für} \quad x = 1,$$

so daß also $u = 0$ der gesuchte Werth ist.

Eben so gibt $u = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^3 - 3}{x^2 - 1}}$, wenn man $x = 1 + h$ setzt:

$$u = \sqrt{\frac{10 + 12h + 6h^2 + h^3}{2 + h}} = \sqrt{5} \quad \text{für} \quad x = 1.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x - a)^{\frac{1}{2}}} = (2a)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad x = a, \text{ u. s. w.}$$

Man sieht, daß dieses Verfahren ganz allgemein ist, und selbst da oft mit Vortheil angewendet werden kann, wo auch die beschränktere Methode des §. 78 noch anwendbar ist. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$u = \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 2 - 2\sqrt{2x - 1}}{x^2 - 2x - 1 + 2\sqrt{2x - x^2}}$$

für $x = 1$ zu suchen, so würde nach §. 78 erst eine viermalige Differentiation zum Zwecke führen. Setzt man aber in ihm $1 + h$ statt x, so erhält man

$$u = \frac{2 + 2h - h^2 + h^3 - 2\sqrt{1 + 2h}}{-2 + h^2 + 2\sqrt{1 - h^2}}.$$

Allein

$$\sqrt{1 + 2h} = 1 + h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{2}h^3 - \tfrac{5}{8}h^4 + \ldots$$

$$\text{und} \quad \sqrt{1 - h^2} = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{8}h^4,$$

also ist auch der gesuchte Werth von

$$u = -5 \quad \text{für} \quad x = 1.$$

§. 80. (**Andere unbestimmt scheinende Formen.**) Zuweilen kann eine Funktion für einen bestimmten Werth ihrer Stammgröße eine Form der Art $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 . \infty$ oder $\infty - \infty$ u. s. f. annehmen, die sich aber immer, durch eine angemessene Verwandlung, auf die bisher betrachtete Gestalt $\frac{0}{0}$ zurückführen läßt. Wird z. B. von dem Bruche $u = \frac{X}{X'}$ für $x = a$ der Zähler sowohl als auch der Nenner gleich ∞, so kann man diesen Bruch auch so ausdrücken:

$$u = \frac{1}{X'} : \frac{1}{X},$$

wo er dann für $x = a$ die Form $u = \frac{0}{0}$ annehmen wird. Wird in dem

Ausdrucke $u = X . X'$ für $x = a$ der Factor $X = 0$ und $X' = \infty$, so kann man dafür nehmen

$$u = X : \frac{1}{X'},$$

wo dann für $x = a$ die Größe u wieder gleich $\frac{0}{0}$ wird, u. s. w.

Ist z. B. $u = (1 - x) \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\pi x$ für $x = 1$ zu suchen, so hat man auch $u = \frac{1 - x}{\operatorname{cotang.} \frac{1}{2}\pi x}$, und dieß gibt

$$u = \frac{2}{\pi} \text{ für } x = 1.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\frac{\sec. x}{\operatorname{tang.} x} = 1 \text{ für } x = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \frac{\log. \frac{1}{x}}{\operatorname{cotang.} x} = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$\frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ für } x = \infty, \quad e^{-x}. \log. x = 0 \text{ für } x = \infty,$$

$$(1 - x) \sec. \tfrac{1}{2}\pi x = \tfrac{1}{2}\pi \text{ für } x = 1, \quad x \log. x = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ für } x = \infty, \quad x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \text{ für } x = 1.$$

Die Funktion endlich

$$u = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\log. x} \text{ gibt } u = \infty - \infty \text{ für } x = 1.$$

Wenn man aber diese beyden Brüche auf einerley Nenner bringt, so hat man $u = \frac{\log. x - x + 1}{(x - 1) \log. x}$, was $u = \frac{0}{0}$ für $x = 1$ gibt. Eine zweymalige Differentiation des letzten Ausdrucks gibt dann $u = -\frac{1}{2}$ für $x = 1$, u. s. w.

§. 81. (Anwendung des Vorhergehenden auf Differentialgleichungen.) Wenn $u = 0$ eine Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y ausdrückt, so hat das erste Differential dieser Gleichung, nach §. 59, die Form

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0,$$

wo $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ die partiellen Differentialien von u in Beziehung auf x und auf y bezeichnen. Wenn nun für einen besondern Werth der Größen x und y diese partiellen Differential-Coefficienten beyde verschwinden, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Um aber in diesem Falle den wahren Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, wird man die vorhergehende Gleichung, die man auch so darstellen kann:

$$M dx + N dy = 0,$$

noch einmal differentiiren, wodurch man, nach §. 60, Gleichung (II), einen Ausdruck der Form erhält:

$$P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 + N d^2 y = 0.$$

Da der Factor N in beyden Gleichungen derselbe bleibt, so geht der letzte Ausdruck in folgenden über:

$$P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

und daraus wird man den gesuchten Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden, der, wie man sieht, doppelt ist. Sollte auch m noch die Form $\frac{0}{0}$ haben, so wird man zu einer dritten Differentiation übergehen, u. s. f.

Ex. Ist $u = y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$ gegeben, so erhält man daraus

$$y^3 dy - 48 y dy = x^3 dx - 50 x dx;$$

und für $x = 0$, wo auch $y = 0$ ist, hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Differentiirt man aber die letzte Gleichung noch ein Mal, und setzt $d^2 y = 0$, so hat man

$$3y^2 dy^2 - 48 dy^2 = 3x^2 dx^2 - 50 dx^2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{3x^2 - 50}{3y^2 - 48}},$$

und dieser Ausdruck gibt für $x = 0$ den gesuchten Werth

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{25}{24}}.$$

§. 82. (Ueber die Ergänzung der Taylor'schen Reihe.)

Wenn man der Kürze wegen

$$f'x = \frac{d.fx}{dx},\quad f''x = \frac{d^2.fx}{dx^2},\quad f'''x = \frac{d^3.fx}{dx^3},\ \text{u. s. f.}$$

setzt, so hat die oben (§. 39) gegebene Taylor'sche Reihe folgende einfache Gestalt:

$$f(x+dx) = fx + f'x.dx + \frac{1}{2}f''x.dx^2 + \frac{1}{1.2.3}f'''x.dx^3 + \ldots,$$

so daß demnach die Größe

$$\frac{f(x+dx) - fx}{dx}$$

aus zwey wesentlich von einander verschiedenen Theilen besteht, wovon der eine $f'x$ von dx ganz unabhängig ist, während der zweyte, den wir durch ωdx bezeichnen wollen, bey dem unendlichen Abnehmen von dx selbst unendlich klein wird. Wir können daher annehmen

$$\frac{f(x+dx) - fx}{dx} = f'x + \omega dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x.dx}{dx^2} = \omega.$$

Ist aber dx unendlich klein, so wird in dem letzten Ausdrucke der Zähler sowohl als auch der Nenner gleich Null, oder man erhält den unbestimmten Ausdruck $\omega = \frac{0}{0}$. Um den wahren Werth von ω zu erhalten, wird man also, nach §. 78, das Differential dieses Zählers durch das Differential des Nenners dividiren, wodurch man erhält

$$\omega = \frac{f'(x+dx) - f'x}{2dx};$$

und da auch dieser Ausdruck, für ein unendlich kleines dx, noch $\omega = \frac{0}{0}$ gibt, so wird man dasselbe Verfahren auch auf ihn wieder anwenden, und in dem so erhaltenen Resultate $\frac{1}{2}f''(x+dx)$ die Größe $dx = 0$ setzen, wodurch man also

$$\omega = \frac{1}{2}f''x$$

als den gesuchten Werth von ω für $dx = 0$ erhält, so daß man daher hat:

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x.dx}{dx^2} = \frac{1}{2}f''x.$$

Diesem gemäß werden wir also, wie zuvor, setzen können

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x.dx}{dx^2} = \frac{1}{2}f''x + \omega_1.dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x.dx - \frac{1}{2}f''x.dx^2}{dx^3} = \omega_1.$$

Der letzte Ausdruck nimmt aber für $dx = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ an, und er thut dieß auch, wenn man den Zähler und Nenner desselben noch zwey Mal differentiirt. Erst die dritte Differentiation gibt

$$\omega_1 = \frac{1}{2.3}f'''x$$

als den gesuchten Werth von ω_1 für $dx = 0$, so daß man daher hat

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x \cdot dx - \frac{1}{2}f''x \cdot dx^2}{dx^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''x + \omega_2 \cdot dx.$$

Fährt man so fort, so findet man allgemein

$$f(x+dx) = fx + f'x \cdot dx + \frac{1}{1 \cdot 2} f''x \cdot dx^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x \cdot dx^3 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n x \cdot dx^n + \omega_{n-1} dx^{n+1},$$

und dieß ist der vollständige Ausdruck des Taylor'schen Theorems. Wenn das letzte Glied $\omega_{n-1} dx^{n+1}$ für ein unendlich großes n verschwindet, so geht diese Reihe in die oben (§. 39) gegebene über. Wenn dieß aber nicht der Fall ist, so ist es, wie man sieht, von großer Wichtigkeit, den Werth dieser Ergänzung für jeden besondern Fall bestimmen zu können.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß die Größe fx, wenn x allmählich in $x + dx$ übergeht, immer wächst oder immer abnimmt, je nachdem $f'x$, innerhalb derselben Gränzen von x und $x + dx$, stets positiv oder stets negativ ist, wie dieß schon unmittelbar aus dem Ausdrucke folgt

$$\frac{f(x+dx) - fx}{dx} = f'x.$$

Betrachten wir nun die Funktion $\varphi z = f(x+z) - a \cdot z^n$, wo a eine Constante und n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Die n auf einander folgenden Differentialien dieses Ausdrucks in Beziehung auf z sind:

$$\varphi' z = f'(x+z) - n a z^{n-1},$$
$$\varphi'' z = f''(x+z) - (n-1) n a z^{n-2},$$
$$\varphi''' z = f'''(x+z) - (n-2)(n-1) n a z^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{n-1} z = f^{n-1}(x+z) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) n a z,$$
$$\varphi^n z = f^n(x+z) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) n a.$$

Ist nun der Ausdruck fx der Art, daß die Differential-Coefficienten $f'x$, $f''x$, ... bis $f^{n-1}x$ für einen bestimmten Werth von $x = x_0$ verschwinden, so werden auch alle diese Größen $\varphi' z$, $\varphi'' z$, ... bis $\varphi^{n-1} z$ verschwinden, wenn man in ihnen $x = x_0$ und $z = 0$ setzt.

Dieß vorausgesetzt, sey nun a der kleinste Werth, dessen der Quotient $\frac{f^n x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ fähig ist, während die Größe x durch alle Zwi-

schenwerthe von x_0 bis $x_0 + dx_0$ übergeht, so sieht man leicht, daß die Größe

$$\frac{f(x_0 + dx_0) - fx_0}{dx_0^n} - a$$

innerhalb denselben Gränzen immer positiv seyn muß, so wie sie im Gegentheile, wenn a den größten Werth des Quotienten $\frac{f^n x}{1.2.3\ldots n}$ bezeichnet, immer negativ seyn wird, woraus folgt, daß der Werth des Ausdrucks

$$\frac{f(x_0 + dx_0) - fx_0}{dx_0^n}$$

immer zwischen den größten und kleinsten Werth fallen muß, den $\frac{f^n x}{1.2.3\ldots n}$ von $x = x_0$ bis $x = x_0 + dx_0$ erhält, und daß man daher die Gleichung hat

$$\frac{f(x_0 + dx_0) - fx_0}{dx_0^n} = \frac{f^n(x_0 + \theta . dx_0)}{1.2.3\ldots n},$$

wo θ irgend ein zwischen o und 1 enthaltener Bruch ist, immer vorausgesetzt, daß die Größen $f'x_0 = f''x_0 = f'''x_0 \ldots f^{n-1}x_0$ sämmtlich gleich Null sind.

Wendet man dieß auf die vorhergehende Taylor'sche Reihe an, so sieht man, daß dieselbe, vollständig ausgedrückt, folgende Form hat:

$$f(x+dx) = fx + f'x.dx + \tfrac{1}{2}f''x.dx^2 + \frac{1}{1.2.3}f'''x.dx^3 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{n-1}x.dx^{n-1} + \frac{1}{1.2.3\ldots n}f^n(x+\theta dx).dx^n \ldots (I)$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man auch für die oben (§. 40) gegebene Reihe Maclaurin's, wenn man in dem vorhergehenden $x = o$, und dann, der Einfachheit wegen, x statt dx setzt, so daß man hat

$$fx = fo + x.f'o + \frac{x^2}{1.2}.f''o + \frac{x^3}{1.2.3}.f'''o + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}.f^{n-1}o + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.f^n(\theta x) \ldots (II),$$

wo die Ausdrücke $f'o$, $f''o$, ... anzeigen, daß man, nach der Differentiation, die Größe x gleich Null setzen soll. Setzt man in dem letzten Ausdrucke nach der Ordnung $n = 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man

$$fx = fo + xf'(\theta x),$$

$$fx = fo + xf'o + \frac{x^2}{1.2} f''(\theta x),$$

$$fx = fo + xf'o + \frac{x^2}{1.2} f''o + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(\theta x), \text{ u. s. f.}$$

I. Wir wollen nun das Vorhergehende auf einige besondere Fälle anwenden. Nehmen wir nach der Reihe für die Funktion fx folgende Ausdrücke:

$$e^x, \quad \cos. x, \quad \sin. x, \quad (1+x)^m \quad \text{und} \quad \log.(1+x).$$

Diese Größen geben für $f^n x$ in derselben Ordnung

$$e^x, \quad \cos.(x + \tfrac{1}{2} n \pi), \quad \sin.(x + \tfrac{1}{2} n \pi),$$

und ferner

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$\text{und} \quad (-1)^{n-1} . \frac{1.2.3 \ldots (n-1)}{(1+x)^n}.$$

Eben so geben sie für $f^n o$ die Ausdrücke

$$1, \quad \cos. \tfrac{1}{2} n \pi, \quad \sin. \tfrac{1}{2} n \pi,$$

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1) \text{ und } (-1)^{n-1} . 1.2.3 \ldots (n-1).$$

Diesem gemäß erhält man daher aus der Gleichung (II):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} + \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} e^{\theta x},$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} \cos. \tfrac{1}{2}(n-1)\pi + \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} \cos.(\theta x + \tfrac{1}{2} n \pi),$$

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} \sin. \tfrac{1}{2}(n-1)\pi + \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} \sin.(\theta x + \tfrac{1}{2} n \pi),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1) \ldots (m-n+2)}{1.2.3 \ldots (n-1)} x^{n-1} + \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{1.2.3 \ldots n} x^n (1+\theta x)^{m-n},$$

$$\log.(1+x) = x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 - \ldots$$

$$\pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Ist in der zweyten und dritten dieser Reihen n eine gerade Zahl, so sind die beyden letzten Glieder

von cos. x ... $\pm \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos.\theta x$,

von sin. x ... $\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin.\theta x$.

Ist aber n eine ungerade Zahl, so sind diese Glieder

von cos. x ... $\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin.\theta x$,

von sin. x ... $\pm \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos.\theta x$.

Demnach erhält man für n = 1

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{\theta x}, \quad \frac{1-\cos.x}{x} = \sin.\theta x, \quad \frac{\sin.x}{x} = \cos.\theta x,$$

$$\frac{(1+x)^m - 1}{mx} = (1+\theta x)^{m-1}, \quad \frac{1}{x}\log.(1+x) = \frac{1}{1+\theta x}.$$

Für n = 2 aber ist

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 . e^{\theta x}, \quad \cos.x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 \cos.\theta x,$$

$$\sin.x = x - \tfrac{1}{2}x^2 \sin.\theta x,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \tfrac{1}{2}m(m-1)x^2(1+\theta x)^{m-2}$$ und

$$\log.(1+x) = x - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^2.$$

IX.

Größte und kleinste Werthe der Funktionen.

---

§. 83. (*Für Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe*). Ist u = fx und geht x über in x + h, so erhält man (§. 39)

$$u' - u = h . \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} . \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} . \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots,$$

und eben so, wenn x in x − h übergeht:

$$u' - u = -h . \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} . \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^3}{1.2.3} . \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots$$

Wenn nun für einen bestimmten Werth von x, z. B. für x = a, die Funktion u, die wir für diesen Fall durch (u) bezeichnen wollen, größer oder kleiner ist, als die ihr zunächst vorhergehenden und ihr

zunächst folgenden Werthe von u, so sagt man, daß für $x = a$ der Werth (u) in jenem Falle ein größter, und in diesem ein kleinster ist.

Bemerken wir noch, daß in den beyden vorhergehenden Reihen die Größe h immer so klein angenommen werden kann, daß das erste Glied $h \cdot \frac{du}{dx}$ die Summe aller übrigen Glieder übertrifft. Denn wenn in einem Ausdrucke der Form

$$A h^{\alpha} + B h^{\beta} + C h^{\gamma} + \ldots$$

die Exponenten alle positiv und steigend sind, so daß $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$ u. s., so kann man diesem Ausdrucke auch die Gestalt geben:

$$h^{\alpha} (A + B h^{\beta - \alpha} + C h^{\gamma - \alpha} + \ldots);$$

und da hier die Exponenten $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha \ldots$ alle positiv seyn müssen, so wird man offenbar die Größe h so klein annehmen können, daß das erste von h unabhängige Glied A größer wird, als die Summe

$$B h^{\beta - \alpha} + C h^{\gamma - \alpha} + \ldots$$

aller folgenden Glieder. Man wird also auch in den beyden Reihen für $u' - u$ die Größe h so klein nehmen können, daß schon das erste Glied $h \cdot \frac{du}{dx}$ dieser Reihe entscheidet, ob $u' - u$ positiv oder negativ ist.

Dieß vorausgesetzt, hat man also für diese beyden Werthe

$$u' - u = \pm h \cdot \frac{du}{dx},$$

d. h. die dem für $x = a$ zunächst vorhergehenden oder zunächst folgenden Werthe von u werden, die einen größer und die andern kleiner seyn, als das zu $x = a$ gehörende (a). Demnach wird (u) nur dann ein Größtes oder ein Kleinstes seyn können, wenn dieß erste Glied $h \cdot \frac{du}{dx}$ ganz verschwindet, d. h. wenn $\frac{du}{dx} = 0$ ist.

In diesem Falle ist aber, für positive und zugleich für negative Werthe von h, der Ausdruck von

$$u' - u = + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}$$

immer positiv, wenn $\frac{d^2 u}{dx^2}$ positiv ist, oder negativ, wenn $\frac{d^2 u}{dx^2}$ negativ ist. In dem ersten Falle ist aber (u) kleiner und im zweyten größer, als alle ihm nächstliegenden Werthe von u, das heißt also, (u) ist, der vorhergehenden Erklärung zu Folge, im ersten Falle ein Kleinstes und im zweyten ein Größtes.

Daraus folgt demnach: Die Größe u kann nur dann ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, wenn $\frac{du}{dx} = 0$ ist. Sucht man dann aus dieser Bedingungsgleichung den Werth von x, und substituirt ihn in $\frac{d^2u}{dx^2}$, so wird u, für diesen Werth von x, ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, wenn $\frac{d^2u}{dx^2}$ negativ oder positiv ist.

Ist aber dieser Werth von $\frac{d^2u}{dx^2}$ ebenfalls, so wie $\frac{du}{dx}$, gleich Null, so hat man, wenn man wieder zu den ersten Gleichungen zuruckgeht:

$$u' - u = \pm \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{h^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4u}{dx^4} \pm \ldots,$$

und man wird, wie zuvor, finden, daß nur dann ein solcher Werth von u Statt haben kann, wenn auch noch $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$ ist, und daß, in diesem Falle, der gefundene Werth von u wieder ein Größtes oder Kleinstes seyn wird, wenn $\frac{d^4u}{dx^4}$ negativ oder positiv ist. Ist aber auch $\frac{d^4u}{dx^4}$ gleich Null, so muß für die Existenz eines solchen Werthes von u auch $\frac{d^5u}{dx^5}$ gleich Null seyn, und dann wird der positive Werth von $\frac{d^6u}{dx^6}$ ein Kleinstes, der negative aber ein Größtes geben u. s. w.

Ex. I. Sey $u = x^2 + 4x + 2$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4 = 0,$$

und da aus dieser Gleichung $x + 2 = 0$ ein bestimmter Werth von x, nämlich $x = -2$ folgt, so ist es möglich, daß u für diesen Werth von x ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Differentiirt man aber die gegebene Gleichung noch einmal, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2;$$

und da der Werth von $\frac{d^2u}{dx^2}$ positiv ist, so wird die gegebene Funktion u für $x = -2$ ein Kleinstes, nämlich $u = -2$.

Ex. II. Sey $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

und

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 4\,(3x^2 - 12x + 11).$$

Aber $\frac{du}{dx} = 0$ gibt $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, und von dieser Gleichung sind die Wurzeln $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$.

Für $x = 1$ hat man $\frac{d^2u}{dx^2} = 8$, also u ein Kleinstes für $x = 1$.

Für $x = 2$ hat man $\frac{d^2u}{dx^2} = -4$, also u ein Größtes für $x = 2$.

Für $x = 3$ hat man $\frac{d^2u}{dx^2} = 8$, also u wieder ein Kleinstes für $x = 3$.

Ex. III. Sey $u = a + b\,(x - c)^4$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 4b\,(x - c)^3 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad x = c.$$

Allein für $x = c$ findet man auch $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$, und endlich $\frac{d^4u}{dx^4} = 24b$; also ist, für $x = c$, der Werth von u ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn b negativ oder positiv ist.

Ex. IV. Ist $u = a + b\,(x - c)^3$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 3b\,(x - c)^2 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad x = c.$$

Aber $x = c$ gibt $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^3u}{dx^3} = 6b$; also hat dieser Ausdruck von u keinen größten oder kleinsten Werth.

I. Es ist bereits oben (§. 40, I.) bemerkt worden, daß sich die Entwicklung der Funktionen, für besondere Werthe der Größe x, nach dem Taylor'schen Lehrsatze nicht immer vornehmen läßt. Dieß trifft nämlich dann ein, wenn diese Entwicklung der Funktion u, nachdem man in ihr $x + h$ statt x gesetzt hat, ihrer Natur nach auch gebrochene oder negative Exponenten von h enthalten muß. Allein die vorhergehenden Schlüsse werden auch dann noch anwendbar seyn, wenn auch die Entwicklung von u die Form

$$u' - u = Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + \ldots$$

haben sollte, wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gebrochene oder negative Exponenten sind, in welchem Falle aber dann die Differential-Coefficienten $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2} \ldots$ auch unendlich groß werden können.

Diesem gemäß kann man daher zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen auch folgende Vorschrift aufstellen, die

selbst noch allgemeiner ist, als die vorhergehende, da sie nicht nur auf die eben erwähnten besonderen Fälle, sondern überhaupt auf alle möglichen anwendbar ist.

Man setze $\frac{du}{dx}$ gleich o oder auch gleich ∞. Aus dieser Bedingungsgleichung findet man einen bestimmten Werth von x, z. B. $x = a$. Setzt man dann $x = a \pm h$, wo h unendlich klein ist, in der vorhergehenden Bedingungsgleichung, und ändert dabey $\frac{du}{dx}$ sein Zeichen [indem z. B. $\frac{du}{dx}$ für $x = a + h$ positiv und für $x = a - h$ negativ wird], so kann die Funktion u für $x = a$ ein Größtes oder ein Kleinstes seyn. Um dieß zu entscheiden, setze man auch in der gegebenen Funktion u statt x die Größe $a \pm h$, wodurch also u einen doppelten Werth erhält, den wir durch u' bezeichnen wollen. Dieß vorausgesetzt, hat für $x = a$ ein Größtes Statt, wenn beyde Werthe von u' kleiner als u sind, und ein Kleinstes, wenn beyde Werthe von u' größer als u sind.

So war in dem vorhergehenden Beyspiele

$$u = a + b\,(x - c)^4.$$

Setzt man $\frac{du}{dx} = o$, so findet man

$$\frac{du}{dx} = 4b\,(x - c)^3 = o,$$

also auch $x = c$. Setzt man aber in dieser Gleichung

$$4b\,(x - c)^3 = o,$$

statt x die Größe $c \pm h$, so findet man

$$\frac{du}{dx} = 4b\,(\pm h)^3,$$

und da sonach $\frac{du}{dx}$ sein Zeichen ändert, so kann die Funktion u für $x = c$ einen größten oder kleinsten Werth haben.

Setzt man nun auch $x = c \pm h$ in der ursprünglichen Gleichung

$$u = a + b\,(x - c)^4,$$

so erhält man

$$u' = a + b\,(\pm h)^4.$$

Ist daher b eine an sich positive Größe, so ist in beyden Fällen $u' > u$, oder $x = c$ gibt einen kleinsten Werth von u. Ist aber b eine negative Größe, so ist $u' < u$, oder $x = c$ gibt einen größten Werth von u, wie zuvor.

Eben so hat man für die Funktion

$$u = a + b(x - c)^{\frac{2}{3}},$$

wenn man $\frac{du}{dx} = \infty$ setzt, $x = c$. Aber $x = c \pm h$ in $\frac{du}{dx}$ substituirt, gibt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{2b}{3(\pm h)^{\frac{1}{3}}},$$

oder $\frac{du}{dx}$ ändert sein Zeichen. Setzt man aber auch $x = c \pm h$ in dem ursprünglichen Ausdrucke von u, so erhält man

$$u' = a + b(\pm h)^{\frac{2}{3}};$$

also auch, wenn b eine an sich positive Größe ist, in beyden Fällen $u' > u$, oder $x = c$ gibt einen kleinsten Werth für u.

Endlich gibt die Gleichung $u = \frac{x}{1 + x^2}$, wenn man ihr Differential gleich Null setzt, $x^2 = 1$; also entweder $x = 1$ oder $x = -1$.

Für beyde Werthe von x ändert $\frac{du}{dx}$ sein Zeichen. Überdieß gibt $x = 1 \pm h$ die ursprüngliche Funktion $u' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h^2$, also $u' < u$; und eben so gibt $x = -1 \pm h$ diese Funktion $u' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h^2$, also auch $u' > u$. Daher ist die gegebene Funktion u für $x = 1$ ein Größtes, und für $x = -1$ ein Kleinstes.

Auf dieselbe Weise wird man auch finden, daß

$u = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$ für $x = 0$ ein Größtes und für $x = 2$ ein Kleinstes gibt, und daß

$u = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}$ für $x = \sqrt{2}$ einen kleinsten und für $x = -\sqrt{2}$ einen größten Werth hat.

Die beyden Ausdrücke $u = \frac{\text{log. nat. } x}{x}$ und $u = x^{\frac{1}{x}}$ geben jeder für $x = e$ einen größten Werth, wenn e, wie oben, die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Eben so gibt

$u = \frac{a^x}{x}$ für $x = \frac{1}{\log. a}$ das Minimum $u = e \log. a$ und

$u = x^a \cdot e^{-x}$ gibt für $x = a$ das Maximum $u = a^a \cdot e^{-a}$,

$u = e^x + e^{-x} - 2\cos. x$ gibt für $x = 0$ das Minimum $u = 0$,

$u = e^x + e^{-x} + 2\cos. x$ gibt für $x = 0$ das Minimum $u = 4$.

II. Noch ist der Fall zu betrachten übrig, wenn die beyden Größen u, x oder y, x durch eine noch unentwickelte Gleichung gegeben sind. Um das hier zu beobachtende Verfahren sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, sey die gegebene Gleichung

$$y^2 - 2axy + x^2 - b^2 = 0.$$

Das Differential derselben ist

$$(y - ax)\,dy = (ay - x)\,dx.$$

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = 0$, so hat man $ay - x = 0$.

Verbindet man aber diese letzte Gleichung mit der ursprünglich gegebenen, so findet man

$$x = \frac{ab}{\sqrt{1 - a^2}} \text{ und } y = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Um zu sehen, ob dieser letzte Werth von y ein größter oder kleinster ist, so hat man für das zweyte Differential der gegebenen Gleichung

$$(y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

oder da bereits $\frac{dy}{dx} = 0$ ist:

$$(y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0;$$

oder endlich, wenn man in diesem Ausdrucke für x und y die oben gefundenen Werthe substituirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{b\sqrt{1 - a^2}}.$$

Ist daher b eine an sich positive Größe, und nimmt man auch von der Wurzelgröße $\sqrt{1 - a^2}$ das positive Zeichen, so ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine negative Größe, und daher der oben gefundene Werth $y = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2}}$ ein Größtes.

Die Gleichung

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

gibt eben so

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad ay - x^2 = 0,$$

woraus folgt, daß

$$x = a\sqrt[3]{2} \text{ für } y \text{ das Maximum } y = a\sqrt[3]{4} \text{ gibt.}$$

§. 84. (Für Funktionen von zwey veränderlichen Grössen).
Ist $u = f(x, y)$ eine Funktion von x und y, und läßt man x in $x + h$ und y in $y + k$ übergehen, so erhält man, nach dem Vorhergehenden,

$$u' - u = \left(\frac{du}{dx}\right)h + \left(\frac{du}{dy}\right)k$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)hk + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)k^2\right] + \ldots,$$

und man wird, wie in §. 83, zeigen, daß die Funktion u nur dann einen größten oder kleinsten Werth haben kann, wenn die in h und k multiplicirten Glieder, jedes für sich, gleich Null sind. Man wird daher die beyden Bedingungsgleichungen haben

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

und aus ihnen einen bestimmten Werth von x und y, z. B. $x = a$ und $y = b$ ableiten, für welchen die gegebene Funktion u ein Größtes oder Kleinstes seyn kann. Ob aber dieses in der That der Fall ist, und ob dann die Funktion u für $x = a$ und $y = b$ ein Größtes oder aber ein Kleinstes ist, wird von dem Zeichen des zweyten Gliedes von $u' - u$ abhängen.

Setzt man der Kürze wegen die Größen $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ und $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$, nachdem man in ihnen $x = a$ und $y = b$ gemacht hat, gleich P, Q und R, so hat man, da bereits $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ ist,

$$u' - u = \frac{1}{2}(Ph^2 + 2Qhk + Rk^2);$$

oder, wenn man zu diesem Ausdrucke die Größe $\frac{Q^2k^2}{2P}$ addirt und subtrahirt:

$$u' - u = \frac{1}{2}P\left(h + \frac{Qk}{P}\right)^2 + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{PR - Q^2}{P}\right) \quad \ldots \text{(I)};$$

oder auch, wenn man P und R, so wie h und k mit einander verwechselt, was offenbar erlaubt ist:

$$u' - u = \frac{1}{2}R\left(k + \frac{Qh}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{PR - Q^2}{R}\right) \quad \ldots \text{(II)}.$$

Dieß vorausgesetzt, wird man Folgendes bemerken, wo wir der Kürze wegen $PR - Q^2 = S$ setzen wollen.

Ist P und S positiv, so ist $u' - u$ in (I) positiv und
ist R und S positiv, so ist $u' - u$ in (II) positiv,
also in beyden Fällen der gesuchte Werth von u ein Kleinstes.

Ist aber P negativ und S positiv, so ist $u' - u$ in (I) negativ, und ist R negativ und S positiv, so ist $u' - u$ in (II) negativ, also in beyden Fällen der gesuchte Werth von u ein Grosstes; und man sieht, daß in allen diesen Fällen das Resultat dasselbe bleibt, wenn man, statt S positiv oder negativ, $S = o$ setzt.

Sind also P und R zugleich positiv, und ist überdieß $PR - Q^2$ Null oder positiv, so ist u, für die Werthe $x = a$ und $y = b$, ein Kleinstes. Sind aber P und R zugleich negativ, und ist überdieß $PR - Q^2$ Null oder positiv, so ist u, für jene Werthe von x und y, ein Größtes.

Ex. I. Um eine Zahl a in drey Theile x, y und $a - x - y$ so zu theilen, daß das Produkt dieser drey Theile ein Größtes werde, so hat man

$$u = xy(a - x - y).$$

Die zwey Gleichungen

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = o \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = o$$

geben sofort die zwey bestimmten Werthe

$$x = \frac{a}{3} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{3}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -2y,$$
$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = a - 2x - 2y,$$
$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = -2x,$$

so erhält man

$$P = -\frac{2a}{3}, \quad Q = -\frac{a}{3}, \quad R = -\frac{2a}{3};$$

also auch

$$S = PR - Q^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Da also P und R negativ, und S positiv ist, so ist u ein Größtes, wenn man $x = y = \frac{a}{3}$, d. h. wenn man die drey Theile der Größe a unter sich gleich nimmt.

Ex. II. Wäre eben so die Gleichung gegeben

$$u = x^3 . y^2 (a - x - y),$$

so geben die zwey Gleichungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 0$$

sofort die zwey bestimmten Werthe

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{3}.$$

Substituirt man diese Werthe in

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = xy^2(6a - 12x - 6y),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = x^2y(6a - 8x - 9y),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = x^3(2a - 2x - 6y),$$

so erhält man

$$P = -\frac{a^4}{9}, \quad Q = -\frac{a^4}{12}, \quad R = -\frac{a^4}{8},$$

also auch

$$S = PR - Q^2 = \frac{a^8}{144};$$

mithin ist auch das Produkt

$$u = x^3y^2(a - x - y) \quad \text{für}$$

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{3} \quad \text{ein Größtes.}$$

X.

Verwechslung des constanten Differentials.

---

§. 85. (Verwandlung der höheren Differentialausdrücke in solche, die kein erstes Differential als constant voraussetzen). Es ist bereits oben (§. 38) gesagt worden, daß in jedem Ausdrucke, in welchem zweyte oder noch höhere Differentialien vorkommen, irgend ein erstes Differential als constant angenommen werden muß. Gewöhnlich wählt man dazu das Differential von x, so daß $dx = \text{const.}$, also auch d^2x, d^3x u. s. gleich Null vorausgesetzt wird. Allein man kann auch irgend ein anderes erstes Differential, z. B. dy, oder auch

irgend einen aus ersten Differentialien zusammengesetzten Ausdruck, z. B. $y\,dx$ oder $\sqrt{dx^2+dy^2}$ u. s. als constant annehmen; und unsere Absicht ist es nun, zu zeigen, wie man einen Differentialausdruck, in welchem $dx = \text{const.}$ angenommen worden ist, zu verändern habe, wenn irgend ein anderes Differential als beständig vorausgesetzt wird.

Zu diesem Zwecke wird es am einfachsten seyn, dasjenige Verfahren zu suchen, welches man anzuwenden hat, um einen Differentialausdruck, in welchem, wie gewöhnlich, $dx = \text{const.}$ ist, in einen andern zu verwandeln, in welchem überhaupt gar kein erstes Differential beständig ist. Denn obschon ein jeder Ausdruck der letzten Art, wie bereits a. a. O. gesagt wurde, keine bestimmte Bedeutung hat, so wird es doch, wenn man ihn einmal erhalten hat, sehr leicht seyn, denselben so umzugestalten, daß dabey irgend ein anderes Differential constant angenommen wird.

Sey der Kürze wegen $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ u. s., also auch, wenn dx constant ist:

$$q = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad r = \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{u. s.},$$

wo, wie gewöhnlich, y als eine Funktion der unbestimmten oder unabhängigen Größe x betrachtet wird.

Sieht man aber y sowohl, als auch x als eine Funktion einer dritten Größe t an, und betrachtet man t als die unabhängige oder als diejenige Größe, deren erstes Differential dt constant ist, so hat man, wie in §. 30,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right); \quad \text{also auch}$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad p = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Differentiirt man aber diesen Ausdruck von p, indem man das erste Differential von t als constant betrachtet, nach §. 28, so hat man

$$dp = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt}\right)}{\frac{dx^2}{dt^2}};$$

also auch, wenn man im Zähler und Nenner die Größe dt^2 wegläßt,

$$\frac{dp}{dx} \quad \text{oder} \quad q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck wieder nach §. 28, so erhält man

$dq = r dx$ oder

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy d^2x^2 - dx dy d^3x}{dx^5} \text{ u. s. w.}$$

Da nun $q \cdot dx^2 = d^2y$ und $r \cdot dx^3 = d^3y$ u. s. ist, so sieht man, daß man in einem Ausdrucke, in welchem dx constant ist, für d^2y, d^3y ... folgende Werthe substituiren muß, um einen andern Ausdruck zu erhalten, in welchem kein erstes Differential constant ist.

Für d^2y wird man nämlich setzen:

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx} = dx \cdot d\left[\frac{dy}{dx}\right],$$

und für d^3y wird man annehmen:

$$d^3y - \frac{3d^2x d^2y}{dx} + \frac{3dy d^2x^2}{dx^2} - \frac{dy d^3x}{dx} = dx^2 \cdot d\left[\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right]$$

u. s. w.

Ex. Sey

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y}.$$

Vorausgesetzt, daß in diesem Ausdrucke dx constant angenommen worden ist. Will man ihn in einen andern Ausdruck verwandeln, in welchem kein erstes Differential constant ist, so hat man sofort, wenn man der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$\gamma = \frac{ds^3}{dx\left(d^2y - \frac{dy d^2x}{dx}\right)} \text{ oder}$$

$$\gamma = \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x} \quad . \ . \ . \quad (1),$$

und in diesem Ausdrucke ist kein Differential constant. Setzt man daher in ihm $dx = \text{const.}$, so erhält man $\gamma = \frac{ds^3}{dx d^2y}$, wie zuvor.

Setzt man aber dy constant, so ist $\gamma = -\frac{ds^3}{dy d^2x}$. Setzt man ds constant, also auch

$$d.\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0 \quad \text{oder} \quad dx d^2x + dy d^2y = 0,$$

so hat man, wenn man mittelst der letzten Gleichung aus (1) die Größe d^2x eliminirt:

$$\gamma = \frac{ds dx}{d^2y} \quad . \ . \ . \quad (2),$$

oder, wenn man $d^2 y$ eliminirt:

$$\gamma = -\frac{ds\,dy}{d^2 x} \quad . \; . \; . \quad (b),$$

oder endlich, wie aus (a) folgt:

$$\gamma = \frac{dx(dx^2 + dy^2)}{d^2 y\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{ds^2}{d^2 y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}};$$

und da, nach der vorhergehenden Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{d^2 x}{d^2 y}$ ist,

$$\gamma = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2}} \quad . \; . \; . \quad (c),$$

und jede der drey Gleichungen a, b, c setzt das Differential ds als constant voraus.

§. 86. (Analoge Aenderungen anderer Differentialausdrücke). Bisher haben wir vorausgesetzt, daß der gegebene Ausdruck das erste Differential von x, oder dx als constant voraussetzt, wie dieß auch in der That gewöhnlich der Fall ist. Allein zuweilen hat man auch Differentialausdrücke, in welchen irgend ein anderes, zusammengesetztes erstes Differential als constant angenommen worden ist, und es ist daher noch übrig, zu zeigen, wie man auch diese in solche verwandeln kann, die kein Differential constant voraussetzen.

Nehmen wir z. B. an, daß der gegebene Differentialausdruck die vorhergehende Größe $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als constant voraussetze, so hat man, wenn man wieder die vorhergehende Bedeutung von p, q, r ... annimmt:

$$dx\sqrt{1 + p^2} = \text{const.},$$

also auch, wenn man diesen Ausdruck differentiirt:

$$d^2 x\sqrt{1 + p^2} + \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{1 + p^2}} = 0 \quad \text{oder}$$

$$d^2 x = -\frac{pq\,dx^2}{1 + p^2}.$$

Da ferner $dy = p\,dx$ ist, so ist auch

$$d^2 y = q\,dx^2 + p\,d^2 x \quad \text{oder}$$

$$d^2 y = \frac{q\,dx^2}{1 + p^2}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken von $d^2 x$ und $d^2 y$ für p und q die bereits in §. 85 erhaltenen Werthe

XI.

Tangenten, Normalen u. s. der ebenen Curven.

---

§. 87. (**Bedeutung der Differentialien in der Geometrie.**) Jede Funktion $y = fx$ einer veränderlichen Größe x kann als die Ordinate BM, CN ... (Fig. 31) einer ebenen krummen Linie MNP ... dargestellt werden, deren Abscisse AB, AC ... jene veränderliche Größe x ist.

Wenn man die Abscisse $AB = x$ nach einander um dieselbe Größe $h = BC = CD = DE$ ... wachsen läßt, so daß $AB = x$, $AC = x + h$, $AD = x + 2h$ ... ist, und wenn man die Endpunkte M, N, P ... der diesen Abscissen entsprechenden Ordinaten BM, CN, DP ... durch die geradlinigen Sehnen MN, NP, PQ ... verbindet, so entsteht dadurch das Polygon MNPQ ..., welches sich um so weniger von der gegebenen krummen Linie MNPQ ... unterscheiden wird, je mehr sich die Punkte M, N, P, Q ... einander nähern. Diese krumme Linie wird die Gränze aller jener Polygone seyn, und was von dieser äußersten Gränze der Polygone gesagt werden kann, wird auch von der krummen Linie selbst gelten.

Man ziehe nun die Linien Ma, Nb, Pc ... mit der Abscissenaxe AX parallel, und verlängere die erste geradlinige Sehne MN, so wie die zweyte NP, bis jene die Ordinate DP in p, und diese die Ordinate EQ in q schneidet, so daß also $aN = bp$ und $bP = cq$ ist.

Dieß vorausgesetzt, hat man, nach Taylor's Theorem:

$$BM = y,$$

$$CN = y + h\frac{dv}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots,$$

$$DP = y + (2h)\frac{dy}{dx} + \frac{(2h)^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ u. f.},$$

also auch für die Differenzen dieser Ordinaten:

$$Na = h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots,$$

$$Pb = h\frac{dy}{dx} + \frac{3h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ u. f.},$$

und für die Differenz dieser Differenzen

$$Pb - Na = Pp = h^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ u. f.}$$

Verwandelt man also in diesen Ausdrücken die Größe h in dx, und nimmt dx unendlich klein an, so wird man, indem man die höheren Potenzen der Größe h oder dx gegen die niederen (nach §. 25) wegläßt, erhalten:

$$Na = dy, \quad Pp = d^2y \quad \text{u. s. w.}$$

Sey überhaupt $BM = y$, $CN = y'$, $DP = y''$, $EQ = y'''$ u. f. Bezeichnet man dann die Differenz von je zwey nächsten dieser Ordinaten durch Δy, so daß man hat $\Delta y = y' - y$, $\Delta y' = y'' - y'$, $\Delta y'' = y''' - y''$ u. f., und bezeichnet man eben so die Differenz von je zwey nächsten dieser Differenzen durch $\Delta^2 y$, so daß man hat $\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y$, $\Delta^2 y' = \Delta y'' - \Delta y'$, $\Delta^2 y'' = \Delta y''' - \Delta y''$ u. f., und fährt man so fort, so kann man diese Größen zur bequemeren Übersicht in folgende Tafel ordnen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
y & & y' & & y'' & & y''' & & y^{IV} \text{ u. f.} \\
& y' - y & & y'' - y' & & y''' - y'' & & y^{IV} - y''' & \\
& \Delta y & & \Delta y' & & \Delta y'' & & \Delta y''' & \\
& & y'' - 2y' + y & & y''' - 2y'' + y' & & y^{IV} - 2y''' + y'' & & \\
& & \Delta^2 y & & \Delta^2 y' & & \Delta^2 y'' & & \\
& & & y''' - 3y'' + 3y' - y & & y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' & & & \\
& & & \Delta^3 y & & \Delta^3 y' & & & \\
& & & & y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y & & & & \\
& & & & \Delta^4 y. & & & &
\end{array}$$

Daraus sieht man, daß man hat

$$\begin{aligned}
\Delta y &= y' - y = Na, \\
\Delta y' &= y'' - y' = Pb, \\
\Delta y'' &= y''' - y'' = Qc \quad \text{u. f.}
\end{aligned}$$

und daß eben so ist

$$\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y = Pb - Na = Pp, \text{ oder } = y'' - 2y' + y$$
$$\Delta^2 y' = \Delta y'' - \Delta y' = Qc - Pb = Qz, \text{ oder } = y''' - 2y'' + y'$$

und auf dieselbe Weise

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y = Qq - Pp \text{ oder } = (Qc - Pb) - (Pb - Na)$$
$$= Qc - 2Pb + Na$$
$$= y''' - 3y'' + 3y' - y$$
u. s. w.

wodurch daher die geometrische Bedeutung der Größen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots$, oder, wenn man die Intervalle h zwischen den Ordinaten unendlich klein annimmt, die Bedeutung der Größen dy, d^2y, $d^3y \ldots$ vollständig erläutert wird (vgl. §. 62). Zugleich sieht man aus dieser Darstellung, warum man die Größen BC, CD, DE... oder die ersten Differentialien der Abscissen einander gleich oder constant angenommen hat, weil sonst, wenn diese Größen unter sich willkürlich verschieden wären, die Werthe von dy, d^2y, $d^3y \ldots$ keine bestimmte Bedeutung mehr haben, und zur Untersuchung der Eigenschaften der krummen Linien nicht mehr geeignet seyn würden; so wie zugleich klar ist, daß man auch die Größen Na, Pb, Qc..., oder die Größen MN, NP, PQ... u. s. w., als unter sich gleich hätte annehmen können, um dieselbe Absicht zu erreichen, daß nämlich in jedem höheren Differentialausdruck irgend ein erstes Differential als constant angenommen werden muß, wenn dieser Ausdruck selbst eine bestimmte Bedeutung haben, und eine Anwendung zulassen soll (vergl. §. 38 und 85).

Vergleicht man endlich die auf einander folgenden Ausdrücke

$$dy = y' - y,$$
$$d^2y = y'' - 2y' + y,$$
$$d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y \quad \text{u. s.}$$

und

$$y' = y + dy,$$
$$y'' = y + 2dy + d^2y,$$
$$y''' = y + 3dy + 3d^2y + d^3y \quad \text{u. s.,}$$

so sieht man, daß man die Differentialien aller Ordnungen dy, d^2y, $d^3y \ldots$ durch die ursprünglichen Größen y, y', $y'' \ldots$, und daß man eben so diese ursprünglichen Größen y', y'', $y''' \ldots$ durch die Differenzialien aller Ordnungen, verbunden mit der ersten Größe y, ausdrücken kann, und daß der allgemeine Ausdruck in beyden Fällen nach dem bekannten Gesetze des Binomiums fortgeht, indem man hat

$$d^n y = y^n - n y^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} y^{n-2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} y^{n-3} + \ldots$$

und

$$y^n = y + n dy + \frac{n.n-1}{1.2} d^2y + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} d^3y + \ldots$$

In dem Vorhergehenden wurde die krumme Linie gegen die Abscissenaxe AX erhoben oder convex angenommen. Es ist leicht, dieselben Ausdrücke auch für eine gegen diese Axe concave Curve zu finden.

§. 88. (**Differential des Bogens einer krummen Linie.**) Da wir die krummen Linien als Polygone von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachten, so folgt daraus sofort, daß die geradlinige Sehne eines unendlich kleinen Bogens diesem Bogen selbst gleich ist.

In der That ist der Bogen ABCD (Fig. 32) unendlich klein, und zieht man die Sehnen AB, BC, CD, von welchen die erste und die letzte verlängert, sich in dem Punkte M begegnen, so ist offenbar die zweyte Sehne BC kleiner als ihr Bogen BC, und dieser Bogen BC ist wieder kleiner als die gebrochene Linie BMC. Es ist daher nur nöthig, zu zeigen, daß diese gebrochene Linie BMC und diese geradlinige Sehne BC eines unendlich kleinen Bogens nur mehr durch eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschieden sind, und daß daher das Verhältniß dieser beyden Größen gleich der Einheit ist, woraus dann von selbst folgt, daß noch viel mehr das Verhältniß des Bogens zu seiner Sehne der Einheit gleich seyn muß.

Da nun die Winkel, welche die unendlich kleinen Sehnen in den Punkten B und C unter sich bilden, im Allgemeinen von zwey rechten Winkeln nur unendlich wenig verschieden seyn können, so wird der Winkel TMD, als Supplement des Winkels AMD, unendlich klein seyn. Sey dieser Winkel $TMD = \omega$, und überdieß $BM = a$, $MC = b$ und $BC = c$. Dieß vorausgesetzt, gibt das ebene Dreyeck BMC

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos. \omega, \quad \text{oder auch}$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 4ab \sin.^2 \tfrac{1}{2}\omega.$$

Wir haben daher für das Quadrat des Verhältnisses der Sehne BC zu der gebrochenen Linie BMC

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin.^2 \tfrac{1}{2}\omega;$$

oder da (§. 33) für einen unendlich kleinen Bogen $\frac{\sin.\omega}{\omega} = 1$ ist

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \left[1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right] \cdot \frac{\omega^2}{4}.$$

Da aber in diesem Ausdrucke der Coefficient von $\frac{\omega^2}{4}$, oder die

Größe

$$1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

nie unendlich groß werden kann, sondern vielmehr immer kleiner als Eins seyn muß, so ist die Größe

$$\left[1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right] \cdot \frac{\omega^2}{4}$$

immer wenigstens ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, und daher $\frac{c^2}{(a+b)^2}$; also auch $\frac{c}{a+b}$ gleich der Einheit.

Ist daher der Bogen M N (Fig. 33) unendlich klein, so wird man dafür seine geradlinige Sehne M N substituiren können. Da aber

$$Ma = BC = dx \quad \text{und} \quad Na = dy$$

war, so ist in dem bey a rechtwinkligen Dreyecke M a N diese Sehne gleich $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; also ist auch, wenn ds das Differential des Bogens einer Curve bezeichnet

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ex. I. Für den Kreis hat man die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

wenn a den Halbmesser desselben bezeichnet. Dieß gibt

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Substituirt man diesen Werth von dy in dem allgemeinen Ausdrucke von ds, so erhält man

$$ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und dieß ist das gesuchte Differential des Bogens eines Kreises. Kann man den ursprünglichen endlichen Ausdruck angeben, durch dessen Differential dieser Ausdruck von ds entstanden ist, so wird man dadurch auch die Länge eines endlichen Kreisbogens zwischen zwey gegebenen Punkten desselben erhalten. Es ist aber oben (§. 34) gezeigt worden, daß man hat

$$d \,.\, \text{arc. sin.} \frac{bx}{a} = \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

Setzt man also $b = 1$, so erhält man, wenn man zu beyden Seiten durch a multiplicirt:

$$d \,.\, a \text{ arc sin.} \frac{x}{a} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

woraus daher folgt, daß die Länge eines Kreisbogens, zu welchem die Abscisse x gehört, gleich

$$a \text{ arc. sin. } \frac{x}{a}$$

ist, wie bekannt. Setzt man in dem letzten Ausdrucke $x=0$ und dann $x=a$, so hat man, da $\sin. 0=0$ und $\text{arc. sin. } 1=\frac{1}{2}\pi$ ist, für die Länge des Quadranten des Kreises $\frac{1}{2}a\pi$, also auch für die ganze Peripherie desselben $4.\frac{1}{2}a\pi=2a\pi$ wie ebenfalls bekannt.

Ex. II. Für die Cycloide hat man (Einl. §. 17, VI.)

$$y = a \text{ arc. cos.}\left(1-\frac{x}{a}\right)+\sqrt{2ax-x^2}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so ist

$$dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

die Differentialgleichung der Cycloide. Substituirt man diesen Werth von dy in den allgemeinen Ausdruck von ds, so hat man

$$ds = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}$$

für das Differential des Bogens der Cycloide. Da aber

$$d.\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

ist, so läßt sich von diesem Ausdrucke von ds der ursprüngliche Ausdruck, durch dessen Differentiation ds entstanden ist, sehr leicht angeben. Man hat nämlich

$$s = 2\sqrt{2ax},$$

und dadurch ist die Länge des Bogens der Cycloide für jeden Werth von x bekannt. Nicht immer aber ist es so leicht, den ursprünglichen Ausdruck des Differentials ds anzugeben, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, die gegebene Curve zu rectificiren. Selbst bey dem Kreise, in unserem ersten Beyspiele, kann diese Rectification nicht als gegeben vorausgesetzt werden, da man die Sinus für jeden Bogen, und die Größe π nur näherungsweise angeben kann, und da Ausdrücke der Art, wie sin. x, arc. sin. x u. f., wenn sie als bekannt angesehen werden sollen, die Berechnung unserer Tafeln der trigonometrischen Funktionen als bereits gegeben voraussetzen.

§. 89. (Differential der Fläche einer krummen Linie.) Nennt man F die Fläche, welche zwischen den geraden Linien BU,

BM und UV, und zwischen dem Bogen MV einer krummen Linie (Fig. 31) enthalten ist, so wird der Theil BCNM derselben, welcher zwischen zwey einander unendlich nahen Ordinaten BM und CN enthalten ist, das Differential dieser Fläche seyn und durch dF bezeichnet werden.

Dieses Differential besteht aber aus dem Rechtecke BCaM und aus dem schon in §. 88 betrachteten rechtwinkligen Dreyecke MaN, dessen Hypotenuse die geradlinige Sehne $MN = ds$ ist. Da $BC = dx$ und $aN = dy$ ist, so ist die Fläche des Rechteckes $BCaM = ydx$, und die des Dreyeckes $MaN = \frac{1}{2}dxdy$, also ist auch das gesuchte Differential der Fläche der Curve

$$dF = ydx + \tfrac{1}{2}dxdy \quad \text{oder} \quad dF = (y + \tfrac{1}{2}dy)dx;$$

also auch, nach §. 25:

$$dF = ydx.$$

Ex. I. Für den Kreis ist $x^2 + y^2 = a^2$, also auch sofort

$$dF = dx\sqrt{a^2 - x^2},$$

und auch davon läßt sich der ursprüngliche Ausdruck in einer geschlossenen algebraischen Form nicht angeben.

Ex. II. Für die Apollonische Parabel hat man (Einl. 14.)

$$y^2 = 2px,$$

wo p den halben Parameter dieser Curve bezeichnet. Dieß gibt

$$dF = dx.\sqrt{2px},$$

und von dieser Größe ist, wie man leicht sieht, der ursprüngliche Ausdruck

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2p.x^3} = \tfrac{2}{3}xy,$$

so daß sich also jede zu einer gegebenen Abscisse x gehörende Fläche der Parabel angeben, oder, wie man sich auch auszudrücken pflegt, daß diese Curve quadrirt werden kann.

§. 90. (**Tangenten der Curven.**) Wenn man die geradlinige Sehne MN (Fig. 33), oder wenn man die Hypotenuse des unendlich kleinen Dreiecks MNa verlängert, bis sie die Abscissenaxe in T schneidet, so erhält man eine gerade Linie MT, die mit einer Seite des Polygons, welches die Gränze der krummen Linie darstellt, oder die mit einem Elemente dieser krummen Linie selbst zusammenfällt. Man nennt das Stück MT derselben die Tangente, und BT die Subtan-

gente der Curve für den Punkt M, zu welchem die Abscisse $AB = x$ und $BM = y$ gehört. Man sieht daraus zugleich, daß die Tangente MT (Fig. 34) die Gränze der Secante NMS ist, und daß die Secante jene Gränze erreicht, wenn ihre beyden Durchschnittspunkte M und N mit der gegebenen Curve in einem einzigen Punkte M zusammenfallen.

Errichtet man auf dieser Tangente in dem Punkte M eine senkrechte Gerade MR (Fig. 33 oder 34), welche die Abscissenaxe in R schneidet, so heißt MR die Normale, und BR die Subnormale der Curve für den Punkt M.

Da die rechtwinkligen Dreyecke MaN, BMT und BMR ähnlich sind, so erhält man sofort folgende allgemeine Ausdrücke:

$$\text{Subtangente} = \frac{y\,dx}{dy}, \qquad \text{Tangente} = \frac{y\,ds}{dy},$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y\,dy}{dx}, \qquad \text{Normale} = \frac{y\,ds}{dx},$$

wo, wie zuvor, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist. Man kann hier noch bemerken, daß man, wenn man nicht bloß die Größe, sondern auch die Lage der Subtangente berücksichtigen will, diese letzte gleich $-\frac{y\,dx}{dy}$ gesetzt werden soll.

Nennt man überdieß ω den Winkel $tMa = NMa$ oder MTA, den die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so hat man

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{dy}{dx}, \text{ also auch}$$

$$\sin.\,\omega = \frac{dy}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\,\omega = \frac{dx}{ds}.$$

Ex. Für die Parabel $y^2 = 2px$ findet man

$$\text{Subtang.} = 2x, \qquad \text{Tangente} = \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + y^2},$$

$$\text{Subnorm.} = p, \qquad \text{Normale} = \sqrt{p^2 + y^2},$$

$$\text{und} \quad \text{tang.}\,\omega = \frac{p}{y}.$$

§ 91. (Andere Ableitung der Tangenten der Curven.) Sey $y = fx$ die Gleichung irgend einer krummen Linie MN (Fig. 34) zwischen den Coordinaten x und y. Mit ihr sey eine andere Linie SMN, deren Gleichung zwischen den Coordinaten x' und y' gegeben ist, so verbunden, daß sie die erste Curve in zwey Punkten M und N schneide. Zieht man Ma mit der Abscissenaxe AC parallel, so ist klar, daß die

Werthe von BM und von aN in beyden Linien dieselben seyn müssen, d. h. daß man, wenn wieder BC = h ist, die beyden Gleichungen hat:

$$y = y' \quad \text{und}$$

$$h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots = h\frac{dy'}{dx'} + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2y'}{dx'^2} + \ldots$$

Die letzte dieser Gleichungen, die sich in allen ihren Gliedern durch die Größe h dividiren läßt, geht, wenn man h unendlich klein annimmt oder wenn man die Gränze dieser Gleichung betrachtet, in $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ über. Durch diese Annahme von h = o vereinigen sich aber die beyden Durchschnittspunkte M und N in einen einzigen M, und dieser Punkt M wird dadurch ein Berührungspunkt der beyden Linien, oder die Secante NMS geht in die Tangente tMT der Curve MN über, wie schon oben (§. 90) gezeigt worden ist. Dieses vorausgesetzt, wird man daher die beyden Bedingungsgleichungen haben:

$$y = y' \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}.$$

Ist nun die zweyte Linie, deren Gleichung zwischen x' und y' gegeben ist, eine Gerade, so hat man für sie

$$y' = ax' + b, \text{ also auch } \frac{dy'}{dx'} = a,$$

also sind auch jene beyden Bedingungsgleichungen

$$y = ax + b \quad \text{und}$$

$$a = \frac{dy}{dx}$$

woraus folgt $b = y - x\frac{dy}{dx}$. Dadurch sind also die beyden Größen a und b, und somit die Lage der zweyten geraden Linie, welche die erste in dem Punkte M berührt, vollkommen bestimmt, und man hat für die Gleichung dieser Tangente

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

in welcher x', y' die veränderlichen Größen der Gleichung sind, während die Größen x, y und $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung der gegebenen Curve MN genommen werden, und sich auf den Punkt M dieser Curve beziehen, in welchen sie von der Geraden MT tangirt wird.

I. Daraus folgt sofort auch die Gleichung der Normale der

Curve MN in demselben Punkte M (Einl. §. 3, II.):

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

II. Nimmt man in diesen Gleichungen $y' = 0$, um den Durchschnittspunkt der Tangente oder der Normale mit der Axe der x zu finden, so hat man aus der ersten Gleichung

$$x' - x = -\frac{y\,dx}{dy} \text{ für die Subtangente BT,}$$

und aus der zweyten Gleichung

$$x' - x = \frac{y.dy}{dx} \text{ für die Subnormale BR, wie zuvor.}$$

Ex. Für die Ellipse hat man (Einl. §. 14.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

Substituirt man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den beyden vorhergehenden Gleichungen, so erhält man für die Gleichung der Tangente der Ellipse

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

und für die der Normale

$$\frac{x}{a^2}(y' - y) - \frac{y}{b^2}(x' - x) = 0.$$

Für den Kreis des Halbmessers a ist die Gleichung der Tangente

$$xx' + yy' = a^2,$$

und die der Normale

$$xy' = x'y.$$

III. Um durch einen außer der Curve gegebenen Punkt, dessen Coordinaten α und β sind, an diese Curve eine Tangente zu ziehen, wird man in der Gleichung der Tangente der Curve die Größe $x' = \alpha$ und $y' = \beta$ setzen. So hatten wir für den Kreis $xx' + yy' = a^2$, also ist auch

$$\alpha x + \beta y = a^2,$$

und diese Gleichung mit der des Kreises oder mit $x^2 + y^2 = a^2$ verbunden, wird, durch Elimination, die Werthe von x und y oder die

Coordinaten des Punktes geben, in welchem die Tangente den Kreis berührt.

IV. Um an eine gegebene Curve eine Tangente zu ziehen, die mit der Abscissenaxe einen gegebenen Winkel θ bildet, wird man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\theta$$

mit jener der gegebenen Curve verbinden, um daraus wieder die Werthe von x und y zu finden. Für die Parabel z. B. ist $y^2 = 2px$, also auch $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$. Man hat daher die zwey Gleichungen

$$y^2 = 2px \quad \text{und} \quad \frac{p}{y} = \text{tang.}\,\theta,$$

woraus man findet

$$x = \frac{p}{2\,\text{tang.}^2\,\theta} \quad \text{und} \quad y = p\,\text{cotang.}\,\theta.$$

§. 92. (**Asymptoten der krummen Linien.**) Asymptote einer Curve wird diejenige Gerade genannt, welcher sich die Curve immer mehr nähert, ohne sie je zu erreichen.

Um die Entfernung der Punkte T und E von dem Anfangspunkte A (Fig. 34) zu finden, in welchem die Tangente MT von der durch den Punkt A gehenden Axe der x und der y geschnitten wird, setzt man in der Gleichung der Tangente

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$$

nach einander $y' = 0$ und $x' = 0$, wodurch man erhält

$$AT = x - \frac{y\,dx}{dy} \quad \text{und} \quad AE = y - \frac{x\,dy}{dx}.$$

Endlich ist noch das Loth An von dem Anfangspunkte auf die Tangente, wenn wieder $MTA = \omega$ ist,

$$An = AT\,\sin.\,\omega = \left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{ds} \quad \text{oder}$$

$$An = x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}.$$

Um daher zu untersuchen, ob eine gegebene Curve Asymptoten habe, wird man eine der beyden Coordinaten x oder y positiv oder negativ und unendlich groß annehmen, und dann die andere mit Hülfe der gegebenen Gleichung der Curve bestimmen. Substituirt man die so erhaltenen Werthe von x und y in die vorhergehenden Ausdrücke von

AT, AE und An, und erhält das Loth An, oder wenigstens eine der beyden Größen AT oder AE einen endlichen Werth, so hat die Curve eine Asymptote, und die Lage derselben wird entweder durch die zwey Größen AT und AE, oder durch eine derselben und durch den Winkel ω, oder endlich, wenn die Asymptote durch den Anfang der Coordinaten geht, bloß durch den Winkel ω bestimmt, in welchem letzten Falle die Größen AT, AE und An gleich Null werden.

Ist in einem speciellen Falle AT unendlich groß und AE = An endlich, so liegt die Asymptote mit der Axe der x parallel; ist aber AE unendlich groß und AT = An endlich, so liegt die Asymptote mit der Axe der y parallel. Wird endlich An, also auch AT und AE unendlich groß oder imaginär, so besitzt die Curve keine Asymptote.

Ex. I. Für die Kegelschnitte hat man (§. 14) die allgemeine Gleichung

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

also ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} - \frac{px}{ay} = \text{tang.}\,\omega \quad \text{und}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{y^2 + \left(p - \frac{px}{a}\right)^2}.$$

Man findet daher

$$AT = \frac{ax}{x-a} \quad \text{und} \quad AE = \sqrt{\frac{apx}{2a-x}}.$$

Setzt man also in diesen Ausdrücken x unendlich groß, so erhält man

$$AT = a \quad \text{und} \quad AE = \sqrt{-ap},$$

woraus folgt, daß nur die Hyperbel, in welcher a negativ genommen werden muß (§. 14), Asymptoten habe, und zwar zwey, wegen dem doppelten Werthe von AE. Da $p = \frac{b^2}{a}$ ist (§. 14), so ist

$$AE = \sqrt{b^2} = \pm b.$$

Die Parabel hat keine Asymptote, weil bey ihr die Größe a unendlich ist; und die Ellipse, weil in ihr weder x noch y unendlich groß werden kann und AE imaginär wird.

Ex. II. Für die Conchois (§. 15, IV.) hat man

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{b^2}{(x-a)^2}.$$

Setzt man y unendlich groß, so wird x = a, also ist die Gerade

APX (Fig. 10), welche alle durch den Pol B gehenden Sehnen halbirt, die Asymptote der Conchois. Eben so findet man, daß für die Cissois (Fig. 6) die auf AB senkrechte Gerade mBn die Asymptote der Curve ist, u. s. w.

§. 93. (**Die vorhergehenden Ausdrücke in Polarcoordinaten geben.**) Wenn für den Punkt M (Fig. 3) einer Curve die senkrechten Coordinaten AP = x und PM = y sind, und wenn man den Winkel PAB = m und MAB = ν, so wie den Radius Vector AM = r setzt, so hat man

$$x = r\cos.(\nu - m), \quad y = r\sin.(\nu - m) \quad \text{und}$$
$$r^2 = x^2 + y^2,$$

also auch, wenn man differentiirt:

$$dx = dr\cos.(\nu - m) - r d\nu \sin.(\nu - m),$$
$$dy = dr\sin.(\nu - m) + r d\nu \cos.(\nu - m) \quad \text{und}$$
$$r dr = x dx + y dy.$$

Eliminirt man aus den beyden ersten dieser Differentialgleichungen die Größe dr, so erhält man

$$d\nu = \frac{dy}{r}\cos.(\nu - m) - \frac{dx}{r}\sin.(\nu - m);$$

oder, wenn man statt $\cos.(\nu - m)$ und $\sin.(\nu - m)$ ihre Werthe setzt:

$$d\nu = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2};$$

und eben so erhält man auch

$$dr = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wenn die gegebene Gleichung zwischen r und ν den Winkel ν selbst enthält, so ist es unmöglich, daraus eine algebraische endliche Gleichung zwischen x und y abzuleiten. In diesem Falle werden aber die beyden vorhergehenden Ausdrücke von dr und dν eine Differentialgleichung zwischen x und y ohne transcendente Größen geben. Ist z. B. die Gleichung $r^2 = a^2 . \nu$ gegeben, so findet man daraus $\nu - m = \text{arc.}\cos.\frac{x}{r}$. Differentiirt man aber die gegebene Gleichung und substituirt dann für dr und dν die vorhergehenden Werthe, so hat man

$$2(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = a^2(x dy - y dx),$$

einen Differentialausdruck ohne transcendente Größen.

I. Das Differential des Bogens einer Curve, durch rechtwinklige Coordinaten ausgedrückt, war

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von dx und dy, so erhält man

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2}$$

für das Differential des Bogens in Polarcoordinaten ausgedrückt.

II. Wir haben oben (§. 89) für das Differential der Fläche $dF' = BCNM$ (Fig. 33) den Ausdruck $dF' = ydx$ erhalten, wo $AB = x$, $BM = y$ die senkrechten Coordinaten des Punktes M bezeichnen. Diesem gemäß ist also die ursprüngliche Größe, von welcher ydx das Differential ist, gleich der ganzen Fläche $F' = OMB$. Nimmt man davon das rechtwinklige Dreyeck ABM, dessen Fläche $\frac{1}{2}xy$ ist, weg, so erhält man für die Fläche des Sectors OMA, die wir durch F bezeichnen wollen,

$$F = F' - \tfrac{1}{2}xy,$$

also auch für das Differential dieses Sectors

$$d.F = dF' - \tfrac{1}{2}d.xy.$$

Es ist aber

$$dF' = ydx \quad \text{und} \quad d.xy = xdy + ydx,$$

also ist auch das Differential des Sectors OMA, der zwischen der geraden Linie AO, zwischen dem Radius Vector AM und zwischen dem Bogen OM der Curve enthalten ist, gleich

$$d.F = \tfrac{1}{2}(ydx - xdy).$$

Oben hatten wir aber die Gleichung

$$d\nu = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad r^2 d\nu = xdy - ydx,$$

also ist auch das Differential des Sectors gleich $-\frac{1}{2}r^2 d\nu$, wo ν den Winkel MAB bezeichnet. Nimmt man dafür den Winkel OAM, der jenen zu 180 Graden ergänzt, so hat man für das Differential des Sectors OMA den Ausdruck

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\nu.$$

In der That, ist AMN (Fig. 35) dieser unendlich kleine Sector der Curve MN, und $AM = r$ der Radius Vector des Punktes M, und der Winkel $MAN = d\nu$, und zieht man aus dem Punkte A als Mittelpunkt mit den Halbmessern AM und AN die Kreisbogen Mm

und N n, so werden die beyden Kreissectoren M m A und N n A einander immer näher kommen, je kleiner der Bogen M N der Curve ist, und für einen unendlich kleinen Bogen M N werden jene Kreissectoren einander gleich, also auch gleich dem Sector d F = M N A seyn, da der letzte immer zwischen jene beyde fällt. Der Kreissector M m A ist aber gleich der Fläche des geradlinigen Dreyecks, dessen Basis $Mm = rd\nu$, und dessen Höhe $AM = Am = r$ ist, also ist die Fläche dieses Kreissectors gleich $\frac{1}{2}r^2 d\nu$, und daher auch

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\nu, \text{ wie zuvor.}$$

Oder endlich, der Sector $dF = MNA$ besteht aus dem Dreyecke A M m, dessen Fläche $\frac{1}{2}r^2 d\nu$, und aus dem Dreyecke M N m, dessen Fläche $\frac{1}{2}Mm \,.\, Nm = \frac{1}{2}rd\nu \,.\, dr$ ist. Beyder Summe gibt daher

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\nu\left(1 + \frac{dr}{r}\right),$$

oder nach §. 25:

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\nu, \text{ wie zuvor.}$$

III. Ist $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 35) und M T die Tangente irgend einer Curve M N in dem Punkte M, so hatten wir für die Subtangente derselben den Ausdruck erhalten:

$$PT = -\frac{y\,dx}{dy}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von y, dy und dx in r und ν, so findet man

$$PT = -r\sin.(\nu - m)\frac{dr\cos.(\nu - m) - r\,d\nu\sin.(\nu - m)}{dr\sin.(\nu - m) + r\,d\nu\cot.(\nu - m)}.$$

Allein dieses Resultat läßt sich sehr vereinfachen, wenn man bemerkt, daß die Lage der Abscissenaxe, in welcher P T liegt, willkürlich ist, und daß man folglich den Winkel $m = PAB$ immer so annehmen kann, daß $\nu - m$ oder P A M gleich 90^0 wird. Dann fällt aber die Ordinate P M mit dem Radius Vector $AM = r$ zusammen, und man hat, da $\sin.(\nu - m) = 1$ und $\cos.(\nu - m) = 0$ ist, für die

$$\text{Subtangente } AT' = \frac{r^2 d\nu}{dr}.$$

Ganz eben so erhält man

$$\text{Subnorm.} = -\frac{dr}{d\nu},\ \text{Tangente} = \frac{r\,ds}{dr} \text{ und Normale} = \frac{ds}{d\nu},$$

wo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2$ ist.

IV. In der That, zieht man durch den Pol A die Linie T′AB senkrecht auf den Radius Vector AM, und durch M die Linie MR senkrecht auf die Tangente MT′, so hat man, da die Dreyecke MAT′, MAR und MNm ähnlich sind:

$$Mm = r\,d\nu, \quad Nm = dr, \text{ also auch}$$

$$MN = ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2},$$

und überdieß

$$Nm : Mm = AM : AT' \quad \text{oder} \quad \text{Subtang. } AT' = \frac{r^2 d\nu}{dr},$$

$$Mm : Nm = AM : AR \quad \text{oder} \quad \text{Subnorm. } AR = \frac{dr}{d\nu},$$

$$Nm : MN = AM : T'M \quad \text{oder} \quad \text{Tang. } T'M = \frac{r\,ds}{dr},$$

$$Mm : MN = AM : RM \quad \text{oder} \quad \text{Normale } MR = \frac{ds}{d\nu},$$

wie zuvor.

Nennt man noch ω den Winkel der Tangente mit dem Radius Vector, oder ist $AMT' = \omega$, so hat man

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{1}{r}\,\text{Subtang.} \quad \text{oder} \quad \text{tang.}\,\omega = \frac{r\,d\nu}{dr},$$

also auch

$$\sin.\,\omega = \frac{r\,d\nu}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\,\omega = \frac{dr}{ds}.$$

Ist aber AQ senkrecht auf die Tangente MT′, so hat man

$$AQ = r \sin.\,\omega = \frac{r^2 d\nu}{ds}.$$

Ex. Für die Archimedische Spirale ist $r = \frac{\nu}{2\pi}$, also auch $\text{tang.}\,\omega = 2\pi r$. Für die logarithmische Spirale ist $\nu = \log. r$, also auch $\text{tang.}\,\omega = 1$, oder der Winkel ω ist constant.

V. Nennt man endlich ψ den Winkel der Tangente mit der festen, durch A gehenden Linie TAP, von welcher man die Winkel $TAM = \nu$ zählt, oder ist $ATM = \psi$, so hat man $\omega = 180 - (\nu + \psi)$, und daher auch

$$\text{tang.}\,(\nu + \psi) = -\frac{r\,d\nu}{dr}.$$

Setzt man daher in der gegebenen Gleichung der Curve den Radius r unendlich groß, und sucht den dazu gehörenden Werth von ν, so substituire man diese Werthe von r und ν in den Gleichungen

$$\text{tang.}\,(\nu + \psi) = -\frac{r\,d\nu}{dr} \quad \text{und} \quad AQ = \frac{r^2 d\nu}{ds}.$$

Sind dann die Werthe von A Q und von ψ endlich und reell, so hat die Curve eine Asymptote, die um die Größe A Q von A absteht, und die gegen die feste Linie T A P unter dem Winkel ψ geneigt ist.

Ex. Für die hyperbolische Spirale hat man (§. 18, III.) die Gleichung

$$r \cdot \nu = 1, \text{ also auch } \frac{dr}{d\nu} = -\frac{r}{\nu},$$

und daher

$$ds = r\,d\nu \cdot \sqrt{r^2+1},$$

$$\text{Subtang.} = -1, \quad \text{Subnorm.} = -r^2,$$

$$\text{Tang.} = \sqrt{r^2+1}, \quad \text{Normale} = r\sqrt{r^2+1},$$

$$\text{tang.}\,\omega = -\frac{1}{r} \quad \text{und} \quad AQ = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}.$$

Setzt man dann r unendlich groß, so ist $\nu = 0$, also auch $AQ = 1$ und $\text{tang.}(\nu + \psi) = 0$, oder $\nu + \psi = 180$, das heißt, da $\nu = 0$ ist, $\psi = 180°$. Diese Spirale besitzt also eine Asymptote, die in dem Abstande 1 von dem Pole mit der festen Linie parallel liegt.

XII.

Berührungskreise und Abwicklungen der ebenen Curven.

---

§. 94. (Berührungen der zweyten und höheren Ordnung.) Aus der Ableitung der Gleichung für die Tangente einer krummen Linie, die wir oben (§. 91) gegeben haben, folgt von selbst, daß die, die Curve in einem Punkte berührende Linie nicht eben eine gerade Linie seyn muß, sondern daß man auch jede andere krumme Linie so stellen kann, daß sie mit der gegebenen Curve in irgend einem Punkte derselben ein Element gemeinschaftlich, oder daß sie, wie man zu sagen pflegt, mit der gegebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Ist diese krumme Linie z. B. ein Kreis des Halbmessers ρ, und sind α und β die Coordinaten des Mittelpunktes dieses Kreises, so hat man für die Gleichung desselben

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = \rho^2 \ldots (I.),$$

also auch, wenn man sie differentiirt:

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{(x'-\alpha)}{y'-\beta}.$$

Da nun, wie dort, für eine Berührung der ersten Ordnung zwischen beyden Curven die zwey Bedingungsgleichungen bestehen:

$$y' = y \quad \text{und} \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},$$

so hat man auch

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \quad \text{und}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-\alpha)}{y-\beta}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größen b und a, so erhält man

$$\alpha = x - \rho \cdot \frac{dy}{ds} \quad \text{und} \quad \beta = y - \rho \cdot \frac{dx}{ds},$$

wo $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist. Dadurch sind also die beyden Größen α und β für denjenigen Kreis bestimmt, der mit der Curve, deren Gleichung zwischen x und y gegeben ist, eine Berührung der ersten Ordnung hat. Dieser Kreis hat nämlich die Gleichung

$$\left(x' - x - \rho\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(y' - y - \rho\frac{dx}{ds}\right)^2 = \rho^2,$$

und in ihr sind x' und y' die veränderlichen Größen. Nennt man θ den Winkel, welchen die Normale der gegebenen Curve mit der Axe der x bildet, so ist

$$\sin.\theta = \frac{dx}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\theta = \frac{dy}{ds},$$

woraus also folgt, daß es unzählige Kreise gibt, welche die Curve in dem gegebenen Punkte berühren, und daß die Mittelpunkte dieser Kreise sämmtlich in jener Normale liegen, wobey der Halbmesser ρ dieser Kreise ganz unbestimmt bleibt.

So wie aber zwey krumme Linien, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, in diesem Punkte eine Berührung der ersten Ordnung haben, wenn für sie die beyden Bedingungsgleichungen bestehen:

$$y = y' \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'},$$

so werden wir auch, analog verfahrend, annehmen können, daß diese beyden Curven eine Berührung der zweyten Ordnung haben, wenn für

sie die drey Bedingungsgleichungen Statt haben:

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}.$$

Bey einer Berührung der ersten Ordnung fallen nämlich zwey nächste Punkte in beyden Curven zusammen, während bey einer Berührung der zweyten Ordnung drey dieser nächsten Punkte in beyden Curven zu einem einzigen sich vereinigen, oder dort haben beyde Curven ein Element, hier aber haben sie zwey nächste Elemente mit einander gemeinschaftlich.

So weiß man z. B. daß drey Punkte erfordert werden, um die Lage und Größe eines Kreises zu bestimmen. Man kann daher annehmen, daß diese drey einander nächsten Punkte auf der Peripherie der gegebenen Curve liegen, und dann denjenigen Kreis suchen, der durch diese drey Punkte geht, und sie daher mit jener Curve gemeinschaftlich hat. Dieser Kreis wird dann als die Gränze aller derjenigen Kreise zu betrachten seyn, welche mit der Curve, in demselben Punkte, bloß eine Berührung der ersten Ordnung geben, und deren Mittelpunkte, wie wir so eben gesehen haben, alle auf der Normale der Curve liegen, ganz eben so, wie oben (§. 90) die Tangente als die Gränze aller Secanten betrachtet worden ist, die mit dieser Tangente einen Punkt gemeinschaftlich haben. — Man sieht, wie man dieselben Betrachtungen auch auf die Berührungen der höheren Ordnungen fortsetzen kann.

§. 95. (**Berührungs- oder Osculations-Kreis.**) Um das Vorhergehende in der Sprache der Analysis auszudrücken, seyen die Gleichungen zweyer Curven gegeben, deren die erste die Coordinaten x, y und die zweyte die analogen Coordinaten x′, y′ enthalte. Wenn in diesen beyden Curven die Größe x in x + h, und die Größe x′ in x′ + h übergeht, so hat man für die Ordinaten y und y′ dieser Curven

$$y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \quad \text{und}$$

$$y' + h\frac{dy'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y'}{dy^3} + \ldots,$$

und die Differenz dieser beyden Ordinaten ist daher

$$\Delta = (y - y') + h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right) + \ldots$$

Haben nun beyde Curven den Punkt, zu welchem die Ordinaten

y und y' gehören, mit einander gemein, so ist $y - y' = 0$, oder

$$y = y' \quad \text{und} \quad \Delta = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right) + \ldots$$

Ist ferner h unendlich klein, und haben die beyden Curven auch noch den jenem ersten nächstfolgenden Punkt mit einander gemein, so ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right) + \ldots;$$

und eben so, wenn sie auch noch den zweyten nächstfolgenden Punkt gemein haben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx'^3}\right) + \ldots$$

Je weiter man auf diese Weise fortgeht, desto mehr nächstfolgende Punkte haben die beyden Curven mit einander gemein, oder desto inniger werden sie sich in dem ersten dieser Punkte, zu welchem $y = y'$ gehört, an einander anschließen, so zwar, daß, wenn unter diesen beyden Curven z. B. nur die drey ersten Bedingungsgleichungen $y = y'$, $dy = dy'$ und $d^2y = d^2y'$ Statt haben, keine andere dritte Curve, deren Gleichung zwischen x'' und y'' gegeben ist, zwischen jenen beyden mehr durchgehen kann, wenn nicht auch für diese dritte Curve dieselben Bedingungsgleichungen $y = y''$, $dy = dy''$ und $d^2y = d^2y''$ bestehen u. s. f. für jede höhere Ordnung der Berührungen.

Ist nun die zweyte Curve, deren Gleichung zwischen x' und y' ausgedrückt wird, ein Kreis, so ist die Gleichung dieser Curve, wie zuvor,

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \rho^2.$$

Differentiirt man diese Gleichung zwey Mal nach einander, und setzt vorerst kein erstes Differential constant, so erhält man

$$(x' - \alpha)\,dx' + (y' - \beta)\,dy' = 0 \quad \text{und}$$

$$dx'^2 + dy'^2 + (x' - \alpha)\,d^2x' + (y' - \beta)\,d^2y' = 0.$$

Da man aber die erwähnten Bedingungsgleichungen hat:

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

so werden die drey vorhergehenden Gleichungen auch dann noch bestehen, wenn man in ihnen die Accente der Größe x', y' und ihre Differentialien wegläßt, oder man wird auch die drey Gleichungen haben:

$$\left.\begin{aligned} &(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2, \\ &(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0, \\ &dx^2 + dy^2 + (x-\alpha)d^2x + (y-\beta)d^2y = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (A).$$

Sucht man aus diesen drey Gleichungen die Werthe der drey Größen α, β und ρ, so erhält man, wenn man wieder der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$x - \alpha = \frac{ds^2 dy}{dx d^2y - dy d^2x},$$

$$y - \beta = -\frac{ds^2 dx}{dx d^2y - dy d^2x},$$

$$\rho = \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x},$$

und durch diese drey Größen α, β und ρ ist daher derjenige Kreis, seiner Größe und Lage nach, vollkommen bestimmt, der mit der gegebenen Curve, deren Gleichung zwischen x und y enthalten ist, eine Berührung der zweyten Ordnung hat. Man nennt ihn den Berührungs- oder auch den Osculations-Kreis der gegebenen Curve.

I. In den vorhergehenden Ausdrücken ist, wie gesagt, kein erstes Differential constant angenommen worden.

Setzt man aber dx constant, so findet man

$$x - \alpha = \frac{ds^2 dy}{dx d^2y}, \quad y - \beta = -\frac{ds^2}{d^2y}, \quad \rho = \frac{ds^3}{dx d^2y}.$$

Setzt man dy constant, so ist

$$x - \alpha = -\frac{ds^2}{d^2x}, \quad y - \beta = \frac{ds^2 dx}{dy d^2x}, \quad \rho = -\frac{ds^3}{dy d^2x},$$

Setzt man endlich ds constant, so hat man $dx d^2x + dy d^2y = 0$, also auch $d^2x^2 . dx^2 = d^2y^2 . dy^2$, und daher

$$\alpha - x = \frac{ds^2 . d^2x}{d^2x^2 + d^2y^2} \quad \text{oder} \quad \alpha - x = \rho^2 . \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\beta - y = \frac{ds^2 d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2} \quad \text{„} \quad \beta - y = \rho^2 . \frac{d^2y}{ds^2}, \text{ und}$$

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}} \text{ (vergl. §. 85).}$$

II. Man kann bemerken, daß die Peripherie des Osculations-Kreises die Curve in dem Punkte, wo er sie berührt, auch zugleich durchschneidet, da die Differenz der zwey nächstfolgenden Ordinaten der beyden Curven, nach dem Vorhergehenden, gleich;

$$\Delta = \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 y}{d x^3} - \frac{d^3 y'}{d x'^3}\right)$$

ist, also Δ sein Zeichen wechselt, wenn man statt x den nächstfolgenden Werth $x + h$ oder den nächst vorhergehenden $x - h$ setzt.

Von den in §. 94 betrachteten Kreisen, die alle mit der Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben, berühren nämlich die einen die Curve an ihrer concaven Seite oder von innen, und die andern an ihrer convexen Seite von außen, und der Osculations-Kreis liegt, als die Gränze aller jener Kreise, zwischen ihnen, indem er die Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes von innen, und auf der andern von außen berührt. Die geradlinige Tangente im Gegentheile liegt ganz auf derselben Seite der Curve, weil für sie

$$\Delta = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{d^2 y'}{d x'^2}\right)$$

für $x + h$ und $x - h$ immer dasselbe Zeichen behält.

§. 96. (**Contingenzwinkel der krummen Linien.**) Man nennt den unendlich kleinen Winkel, welchen die Normalen von zwey nächsten Punkten einer Curve unter sich bilden, den Contingenzwinkel der Curve. Man sieht, daß dieser Winkel auch der von zwey nächsten Tangenten der Curve ist. Wir wollen ihn durch ω bezeichnen.

Seyen A und B die Cosinus der Winkel, welchen die erste dieser Tangenten mit der Axe der x und der y macht, so daß man daher wie §. 94) hat

$$A = \frac{dx}{ds} \text{ und } B = \frac{dy}{ds}.$$

Dieß vorausgesetzt, werden also auch die Cosinus der zweyten nächsten Tangente mit x und y durch

$$A + dA \text{ und } B + dB$$

ausgedrückt werden können. Man hat aber (Einl. §. 3, I.)

$$\cos.\omega = A(A + dA) + B + dB),$$

und überdieß, da der Cosinus des Winkels einer jeden Geraden mit der Axe der y gleich dem Sinus des Winkels derselben Geraden mit der Axe der x ist:

$$A^2 + B^2 = 1, \text{ und eben so}$$

$$(A + dA)^2 + (B + dB)^2 = 1,$$

woraus sofort folgt

$$A dA + B dB = -\tfrac{1}{2}(dA^2 + dB^2).$$

Es geht daher der vorhergehende Ausdruck von cos. ω in den folgenden über:

$$\sin.^2 \omega = - 2(A\,dA + B\,dB) - (A\,dA + B\,dB)^2;$$

oder endlich, wenn man (§. 25) die vierten und höheren Potenzen von dA und dB wegläßt:

$$\sin.^2 \omega = dA^2 + dB^2.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von dA und dB, und bemerkt man, daß für den unendlich kleinen Winkel ω (nach §. 33) sin. $\omega = \omega$ ist, so hat man

$$\omega = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

für den gesuchten Winkel der Contingenz einer Curve.

Setzt man in ihm ds constant voraus, so ist

$$\omega = \frac{1}{ds}.\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}.$$

Da wir aber vorher (§. 95) für den Krümmungshalbmesser ρ der Curve erhalten haben

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}},$$

so ist auch

$$\rho = \frac{ds}{\omega} \quad \text{oder} \quad ds = \rho\omega.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Mittelpunkt des Osculationskreises einer Curve der Durchschnittspunkt von je zwey nächsten Normalen dieser Curve ist.

I. In der That, die Gleichung der Normale ist (§. 91, I.)

$$y' - y + (x' - x)\frac{dx}{dy} = 0.$$

Um den Durchschnittspunkt dieser Normale mit der nächstfolgenden Normale zu finden, wird man bloß die letzte Gleichung in Beziehung auf x und y differentiiren, wodurch man erhält

$$(y' - y)\,d^2y - ds^2 = 0.$$

Sucht man aus diesen zwey Gleichungen die Größen x′ und y′, und substituirt sie in dem allgemeinen Ausdrucke

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

der Distanz zweyer Punkte, so erhält man für diese Distanz

$$\frac{ds^3}{dx\,d^2y} \text{ oder } \rho,$$

wie zuvor.

§. 97. (Evoluten der krummen Linien.) Da die Größen α und β, oder da die Coordinaten des Mittelpunktes des Osculations-Kreises Funktionen von x und y, also auch, vermöge der gegebenen Gleichung der Curve zwischen x und y, bloße Funktionen von x sind, so ändern sich jene beyden Größen, so wie sich x ändert, oder wie man von einem Punkte der Curve zu einem andern übergeht. Die Aufeinanderfolge aller dieser Mittelpunkte des Osculations-Kreises einer Curve bildet daher wieder eine andere Curve, die man die Evolute oder die Abgewickelte der gegebenen Curve nennt, so wie diese wieder die Evolvente der Abgewickelten heißt. Sind mM, m'M' (Fig. 36) die Krümmungshalbmesser der Curve MM', so ist MM'M'' die Evolvente, und mm'm'' die Evolute, wo $AP = x$, $PM = y$ die senkrechten Coordinaten der Evolvente, und $Ap = \alpha$, $pm = \beta$ die analogen Coordinaten der Evolvente sind.

Diese beyden Curven haben mehrere merkwürdige Relationen unter einander, die man leicht aus den drey Gleichungen (A) des §. 95 kennen lernt. Setzt man, wie gewöhnlich, dx constant, so sind diese Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \;.\;.\;. (1),$$
$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0 \;.\;.\;. (2),$$
$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\,d^2y = 0 \;.\;.\;. (3).$$

I. Eliminirt man nämlich zwischen der in xy gegebenen Gleichung der Evolvente und zwischen den Gleichungen (2) und (3) die beyden Größen x und y, so erhält man eine Gleichung zwischen α und β, die daher die Gleichung der Evolute seyn muß.

II. Da die Gleichung (2) auch so ausgedrückt werden kann:

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x),$$

so gehört sie (§. 91, I.) für die Normale mM der Evolvente, d. h. für die gerade Linie, die von dem Punkte m, dessen Coordinaten α und β sind, senkrecht auf die Evolvente gezogen wird.

III. Differentiirt man die beyden ersten Gleichungen (1) und (2) nicht bloß in Beziehung auf x und y, sondern auch in Beziehung auf die Größe α, β und y, da die letztern Größen Funktionen von x sind,

so erhält man

$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy - (x-\alpha)d\alpha - (y-\beta)d\beta = \rho d\rho$$

und

$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y - d\alpha dx - d\beta dy = 0,$$

und diese Ausdrücke gehen mittelst der Gleichungen (2) und (3) in folgende über:

$$(x-\alpha)d\alpha + (y-\beta)d\beta + \rho d\rho = 0 \ldots (4)$$
$$d\alpha dx - d\beta dy = 0 \ldots (5).$$

Die letzte gibt $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}$, welcher Ausdruck die Gleichung

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x)$$

in die folgende verwandelt:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha),$$

und diese letzte Gleichung zeigt, daß die Normale mM der Evolvente zugleich eine Tangente der Evolute ist (§. 91).

IV. Substituirt man den letzten Werth von $y-\beta$ in die Gleichungen (1) und (4), und eliminirt dann $x-\alpha$, so erhält man

$$d\rho^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Da aber das Differential eines Bogens, oder da ds überhaupt gleich $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so zeigt die letzte Gleichung, daß der Halbmesser des Osculations-Kreises der Evolvente sich um dieselben Unterschiede ändert, als der Bogen der Evolute.

Aus III. und IV. folgt, daß ein vollkommen biegsamer, um die Evolute mm′m″ gelegter Faden, wenn er von derselben frey abgewickelt wird, so daß er in jedem Punkte, wo er die Evolute verläßt, eine Tangente derselben ist, mit jedem seiner bereits abgewickelten Punkte die Evolvente der Curve MM′... beschreibt; eine merkwürdige Eigenschaft, die bekanntlich in der Mechanik bereits eine sehr sinnreiche Anwendung gefunden hat.

V. Man sieht daraus zugleich, daß alle Evoluten rectificabel sind (§. 88, Ex. II.), das heißt, daß man die Länge dieser Curve zwischen zwey gegebenen Punkten derselben durch eine gerade Linie messen oder angeben kann, weil die Zunahme des Bogens der Evolute gleich der Zunahme des Krümmungshalbmessers der Evolvente ist, und weil der Krümmungshalbmesser einer jeden Curve immer angegeben werden kann, da er bloß die Anwendung der Differentialrechnung erfordert.

VI. Wir haben in I. gezeigt, wie man aus der Evolvente die Evolute finden kann. Um aber auch das umgekehrte Problem aufzulösen, so sey die Gleichung $\beta = \varphi \alpha$ der Evolute gegeben, und daraus die Gleichung $y = f x$ der Evolvente zu suchen.

Es war

$$\beta - y = \frac{d s^2}{d^2 y} \quad \text{und} \quad \alpha - x + (\beta - y) \frac{d y}{d x} = 0.$$

Aus diesen beyden Ausdrücken folgt

$$\alpha - x = - \frac{d s^2 d y}{d x d^2 y} \quad \text{und} \quad \varphi \alpha - y = \frac{d s^2}{d^2 y}.$$

Eliminirt man aus diesen zwey Gleichungen die Größe α, so erhält man eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung zwischen x und y, die also für die gesuchte Evolvente gehört.

VII. Dieselbe Aufgabe läßt sich auch so darstellen. Es war

$$y - \beta - (x - \alpha) \frac{d \beta}{d \alpha} = 0 \quad \text{und}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

Bemerkt man aber, daß $d \rho^2 = d \alpha^2 + d \beta^2$ ist, so erhält man aus diesen beyden Gleichungen, da $\beta = \varphi \alpha$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - x &= \rho \,.\, \frac{d \alpha}{d \rho} \\ \beta - y &= \rho \,.\, \frac{d \beta}{d \rho} \end{aligned} \right\}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe α, so wird das Resultat dieser Elimination die gesuchte Gleichung der Evolvente zwischen x und y seyn. Allein diese Elimination setzt voraus, daß man bereits γ durch α ausdrücken kann, d. h. da

$$d \gamma^2 = d \alpha^2 + d \beta^2$$

ist, daß man die gegebene Evolute rectificiren kann.

§. 98. (Beyspiele für den Krümmungshalbmesser.) I. Man suche den Krümmungshalbmesser der Linien der zweyten Ordnung. Die Gleichung dieser Linien ist (Einleit. §. 14)

$$y^2 = 2 p x - \frac{p x^2}{a}.$$

Dieß gibt sofort

$$dy = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{p\,dx}{y},$$

$$ds^2 = \left[y^2 + p^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \cdot \frac{dx^2}{y^3} \text{ und}$$

$$d^2y = -\left[\frac{p}{a}y^2 + p^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \cdot \frac{dx^2}{y^3};$$

also ist auch

$$\rho = \left[x\left(2 - \frac{x}{a}\right) + p\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Sucht man aber die Normale $N = \frac{y\,ds}{dx}$ dieser Curven, so findet man

$$N = p^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left[x\left(2 - \frac{x}{a}\right) + p\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right]};$$

also ist auch

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Für $x = 0$ hat man $\rho = p$. Für die Parabel ist a unendlich groß, also auch

$$\rho = \sqrt{\frac{(p + 2x)^3}{p}}.$$

Setzt man aber in dem Ausdrucke für die Ellipse statt x die Größe $a - x$, oder nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte der Ellipse, so geht der vorhergehende Ausdruck von N in den folgenden über:

$$N = \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^3}}, \text{ oder da}$$

$$b^2 x^2 = a^2 (b^2 - y^2) \text{ ist:}$$

$$N = \frac{1}{a} \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2) y^2}.$$

II. Eben so erhält man für die Logistik, deren Gleichung $y = \log. x$ ist (§. 17, I.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1 + x^2},$$

und daher

$$\rho = \frac{1}{x}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

so wie

$$x - \alpha = -\frac{1}{x}(1 + x^2) \text{ und } y - \beta = 1 + x^2.$$

III. Für die gemeine Cycloïs endlich hat man (§. 17, VI.)

$$x = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2},$$

wo (Fig. 26) $AP = x$, $PM = y$ ist.

Daraus erhält man sofort

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \text{ und } d^2y = -\frac{a\,dy^2}{2ay - y^2},$$

$$ds = dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}}; \text{ also auch}$$

$$\rho = 2\sqrt{2ay} = 2N,$$

wenn wieder N die Normale der Cycloide für denselben Punkt bezeichnet.

§. 99. (Beyspiele für die Evolute.) I. Für die Apollonische Parabel hat man $y^2 = 2px$, also auch

$$dy = p\frac{dx}{y}, \quad d^2y = -p^2\frac{dx^2}{y^3} \text{ und}$$

$$x - \alpha = -\frac{1}{p}(p^2 + y^2), \quad y - \beta = y + \frac{y^3}{p^2} \text{ oder}$$

$$\alpha - x = p + 2x \text{ und } \beta = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2p}}.$$

Aus diesen beyden Gleichungen folgt durch Elimination von x

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3,$$

oder endlich, wenn man $\alpha - p = \alpha'$ setzt:

$$\beta^2 = \frac{8\alpha'^3}{27p}$$

die gesuchte Gleichung der Evolute der Apollonischen Parabel, die also die Neil'sche Parabel ist (Einl. §. 15, I.).

In Fig. 37 ist MAM' die Apollonische Parabel, und mam' die Evolute derselben oder die Neil'sche Parabel.

Man wird dabey bemerken, daß der die Evolute bedeckende Faden, durch dessen Abwicklung die Evolvente entsteht, in unserm Beyspiele über den Scheitel a der Evolute nach um das Stück $aA = p$ in der Richtung der ersteren Tangente aX der Evolute herausreichen muß, damit der Endpunkt A dieses Fadens, bey seiner Abwicklung, in der That die Apollonische Parabel MAM beschreibe. Dieses Stück $aA = p$ ist gleich dem Krümmungshalbmesser der Apollonischen Parabel in ihrem Scheitel A. Würde man einen andern Punkt zwischen a und A,

oder jenseits von A für den die Evolventen beschreibenden Punkt annehmen, so würde diese Evolvente auch nicht mehr die Apollonische Parabel, sondern irgend eine andere Curve seyn.

II. Für die gemeine Cycloide hat man, wie §. 98, III., wenn man wieder die Gleichung

$$x = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

zu Grunde legt, wo (Fig. 26 und 38) $AP = x$, $PM = y$ ist,

$$\beta = -y \quad \text{und} \quad \alpha = x + 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Substituirt man die aus diesen Ausdrücken folgenden Werthe von x und y in der vorhergehenden ursprünglichen Gleichung der Cycloide, so erhält man

$$\alpha = a \text{ arc. cos.} \left(1 + \frac{\beta}{a}\right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}$$

für die gesuchte Gleichung der Evolute der Cycloide. Setzt man

$$\beta = -x' \quad \text{und} \quad \alpha = y',$$

so wird die letzte Gleichung

$$y' = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) + \sqrt{2ax' - x'^2},$$

dieselbe, welche wir schon oben (Einl. §. 17, VI., A) ebenfalls für die Cycloide gefunden haben, wo $CQ = x'$ und $QM = y$ war.

Setzt man daher auch in Fig. 38 $Aq = x'$, und die darauf senkrechte Gerade $qm = y'$, so sieht man, daß die Evolute Amm' der Cycloide ACB wieder dieselbe Cycloide, nur in verkehrter Lage ist, so daß bey der ersten Cycloide AMB der Anfangspunkt in A und der Scheitel in C, bey der zweyten Amm' aber der Scheitel in A ist.

III. Für die Ellipse, deren halbe Axen a und b sind, hat man (§. 14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und daraus folgt

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3 \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{(a^2 - b^2)}{b^4} y^3,$$

also auch

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = -\sqrt[3]{\frac{b\beta}{a^2 - b^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ in der ursprünglichen Gleichung der Ellipse, so erhält man

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

oder, wenn man alle Glieder dieses Ausdrucks durch $\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$ multiplicirt:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

für die Gleichung der Evolute der Ellipse. Ihre Gestalt ist in Fig. 18 (§. 16, II.) gegeben worden. Setzt man die Größe b^2 negativ, so erhält man die Evolute der Hyperbel.

IV. Um endlich auch aus der gegebenen Evolute die ihrer Evolvente zu finden, wollen wir annehmen, daß die Evolute ein Kreis des Halbmessers a sey, so ist die Gleichung des Kreises zwischen den Coordinaten α und β

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2, \text{ oder auch}$$
$$\alpha = a \cos.\varphi \text{ und } \beta = a \sin.\varphi,$$

wo φ den Winkel bezeichnet, der zu den Coordinaten α und β gehört. Nennt man ρ den diesem Winkel entsprechenden Kreisbogen, so ist $\rho = a\varphi$.

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = -\sin.\varphi \text{ und } \frac{d\beta}{d\rho} = \cos.\varphi,$$

und sonach werden die beyden letzten Gleichungen des §. 97, VI.

$$x = a \cos.\varphi + a\varphi \sin.\varphi \text{ und}$$
$$y = a \sin.\varphi - a\varphi \cos.\varphi,$$

und die Elimination von φ aus diesen beyden Ausdrücken gibt die gesuchte Gleichung der Evolvente des Kreises.

§. 100. (Anwendung des Vorhergehenden auf Polarcoordinaten.) Wenn man, wie in §. 93, die Gleichungen

$$x = r \cos.\nu \text{ und } y = r \sin.\nu$$

hat, wo der dort eingeführte Winkel m hier der Kürze wegen gleich Null gesetzt worden ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen zweymal differentiirt, ohne dabey ein erstes Differential als constant vorauszusetzen:

$$dx = dr \cos.\nu - r d\nu \sin.\nu,$$
$$dy = dr \sin.\nu + r d\nu \cos.\nu,$$
$$d^2x = d^2r \cos.\nu - 2 dr d\nu \sin.\nu + r d\nu^2 \cos.\nu - r d^2\nu \sin.\nu,$$
$$d^2y = d^2r \sin.\nu + 2 dr d\nu \cos.\nu - r d\nu^2 \sin.\nu + r d^2\nu \cos.\nu.$$

Es war aber der Ausdruck des Krümmungshalbmessers zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, wenn ebenfalls kein erstes Differential constant vorausgesetzt wird (§. 95)

$$\rho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorhergehenden Ausdrücke von dx, d^2x u. s., so erhält man

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu + r\,dr\,d^2\nu - r\,d\nu\,d^2r},$$

$$\text{wo } ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2 \text{ ist,}$$

und hier ist ebenfalls kein erstes Differential constant vorausgesetzt worden.

Ist daher $d\nu =$ const., so hat man

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu - r\,d\nu\,d^2r},$$

und ist $dr =$ const., so ist

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu + r\,dr\,d^2\nu}.$$

Ex. Für die logarithmische Spirale hat man (§. 23, II.)

$$\nu = \log. r;$$

also ist auch

$$d\nu = \frac{dr}{r} \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2} = dr . \sqrt{2}.$$

Diese Spirale läßt sich daher rectificiren, da der ursprüngliche Ausdruck der letzten Differentialgleichung

$$s = r . \sqrt{2} \quad \text{ist.}$$

Weiter ist für den Winkel ω der Tangente mit dem Radius Vector (§. 93, IV.)

$$\text{tang. } \omega = \frac{r\,d\nu}{dr} = 1, \quad \text{also constant.}$$

Um die Differentialgleichung dieser Spirale zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y zu erhalten, wird man, nach §. 93, in der Gleichung $r\,d\nu = dr$ statt $d\nu$ und dr ihre Werthe

$$d\nu = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

substituiren, wodurch man erhält

$$(x - y)\,dy = (x + y)\,dx,$$

und daher ist auch die zweyte Differentialgleichung dieser Spirale

$$(x - y) d^2 y = dx^2 + dy^2 \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Endlich erhält man die Evolute einer Curve, wenn man (nach §. 97) die Werthe von x und y aus den beyden Gleichungen

$$(x - \alpha) dx + (y - \beta) dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$
$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta) d^2 y = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

sucht, und dieselben in der ursprünglichen Gleichung der Curve substituirt. Diesem gemäß findet man aus den Gleichungen (1) und (3) sofort $x = \beta$. Die Gleichung (2) aber gibt, da $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$ ist:

$$x^2 + y^2 - \alpha(x - y) - \beta(x + y) = 0,$$

oder, da bereits $x = \beta$ gefunden wurde:

$$y^2 + (\alpha - \beta) y = \alpha\beta,$$

woraus sofort folgt $y = -\alpha$.

Wir haben daher $x = \beta$ und $y = -\alpha$, und daraus folgt, daß die Evolute der logarithmischen Spirale wieder eine der gegebenen gleiche und gleichliegende Spirale ist.

§. 101. (Tangential-Coordinaten.) Die Gleichungen der krummen Linien lassen sich auch noch auf andere Weise ausdrücken, als bisher, durch rechtwinklige oder durch Polar-Coordinaten, geschehen ist. Eine der merkwürdigsten ist die zwischen dem Radius Vector AM = r (Fig. 39) und dem Lothe AU = u aus dem Pole A auf die Tangente MT der Curve. Man kann diese beyden veränderlichen Größen die Tangential-Coordinaten nennen.

Um ihre Relation mit den Polar-Coordinaten zu erhalten, zieht man aus dem Pole A mit dem Halbmesser AM = r einen Kreisbogen Mm, welcher den nächsten Radius Vector AN der Curve in dem Punkte m schneidet, so ist $Nm = dr$, $MAN = d\nu$, also auch $Mm = r d\nu$. Da aber die Dreyecke MNm und NAU ähnlich sind, so hat man

$$\frac{MN}{Nm} = \frac{AN}{NU} \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - u^2}} \quad . \; . \; . \quad (I) \quad \text{und}$$

$$\frac{MN}{Mm} = \frac{AN}{AU} \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{r d\nu} = \frac{u}{r} \quad . \; . \; . \quad (II),$$

wo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2$ ist.

So hat man für den Kreis des Halbmessers a, wenn der Po

oder der Anfangspunkt der Coordinaten in der Peripherie liegt, wie bekannt:

$$r = 2a \cos. \nu \quad \text{oder} \quad dr = -2a d\nu \sin. \nu,$$

also auch

$$ds = 2a d\nu,$$

und daher nach (II)

$$\frac{ds}{r d\nu} = \frac{2a}{r} = \frac{r}{u}, \quad \text{oder}$$

$$r^2 = 2au,$$

welches die Gleichung des Kreises zwischen den Tangential-Coordinaten ist.

Eben so hat man für die Ellipse, wenn der Pol im Brennpunkte ist (§. 14),

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos. \nu},$$

$$\text{wo} \quad \varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{ist.}$$

Das Differential dieses Ausdrucks ist

$$\frac{dr}{d\nu} = \frac{r^2 \varepsilon \sin. \nu}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Allein die erste Gleichung der Ellipse gibt

$$\sin. \nu = \frac{b}{r}\sqrt{\frac{2ar - r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \quad \text{also ist auch}$$

$$\frac{dr}{d\nu} = \frac{r}{b}\sqrt{2ar - r^2 - b^2}.$$

Substituirt man dieß in der Gleichung

$$\frac{ds^2}{d\nu^2} = r^2 + \frac{dr^2}{d\nu^2}, \quad \text{so erhält man}$$

$$\frac{ds^2}{d\nu^2} = \frac{r^3}{b^2}(2a - r),$$

und damit erhält man aus der Gleichung (II)

$$u^2 = \frac{b^2 r}{2a - r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{2au^2}{b^2 + u^2}$$

die gesuchte Gleichung der Ellipse zwischen den Tangential-Coordinaten.

Nimmt man aber den Pol im Mittelpunkte der Ellipse, so ist die Gleichung derselben

$$u^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2}.$$

Für die Parabel endlich hat man, wenn der Pol im Scheitel liegt, und der halbe Parometer p ist:

$$u^2 = \tfrac{1}{2} p r.$$

I. Transformirt man die vier in §. 93, IV. gegebenen Ausdrücke mittelst der Gleichungen (I) und (II) in Tangential-Coordinaten, so erhält man

$$\text{Subtang.} = \frac{r u}{\sqrt{r^2 - u^2}}, \qquad \text{Tang.} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

$$\text{Subnorm.} = \frac{r}{u}\sqrt{r^2 - u^2}, \quad \text{Norm.} = \frac{r^2}{u},$$

so daß also diese vier Größen, die sonst Funktionen von Differentialien waren, hier unter der Form von endlichen Größen erscheinen.

Ex. Für die Ellipse war

$$u^2 = \frac{b^2 r}{2a - r};$$

also ist auch die Subtangente der Ellipse gleich

$$\frac{b r}{\sqrt{2ar - r^2 - b^2}},$$

wie man auch aus der Polargleichung

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos. \nu}$$

findet, wenn man daraus den Werth der Subtang. $= \frac{r^2 d\nu}{dr}$ sucht.

II. Auf dieselbe Weise erhält man auch den allgemeinen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der Curven zwischen Tangential-Coordinaten, wenn man in jenem des §. 100, wo dr constant ist, oder wenn man in der Gleichung

$$\rho = \frac{ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu + r dr d^2\nu}$$

statt $\frac{dr}{d\nu}$, wie aus den Gleichungen (I) und (II) folgt; die Größe

$$\frac{dr}{d\nu} = \frac{r\sqrt{r^2 - u^2}}{u},$$

und deren Differential

$$r d^2\nu . \sqrt{r^2 - u^2} = dr du - dr d\nu \sqrt{r^2 - u^2} - (rdr - udu)\frac{r d\nu}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

substituirt, wodurch man für den gesuchten Krümmungshalbmesser erhält:

$$p = \frac{r\,d\,r}{d\,u};$$

also einen Ausdruck, der nur von den ersten Differentialien der Größen u und r abhängt, wie es der Natur der Tangential-Coordinaten gemäß ist.

§. 102. **(Rolllinien.)** Beschließen wir diesen Gegenstand mit der Betrachtung eines zahlreichen Geschlechts von Curven, zu welchen die oben angeführte Cyclois nur als ein sehr specieller Fall gehört.

Eine gegebene Curve DE (Fig. 40), mit welcher ein Punkt M durch die Linie ME fest verbunden ist, wälze sich auf einer anderen gegebenen, fixen Curve AD. Die Curve mMn, welche der beschreibende Punkt M während der Bewegung der ersten Curve durchlauft, heißt Rolllinie.

Um die Gleichung der Linie mMn zu finden, ziehe man durch den gemeinschaftlichen Punkt D beyder Curven und durch den beschreibenden Punkt M die Gerade DM = r, und beschreibe dann aus D, als Mittelpunkt mit diesem Halbmesser r, einen Kreisbogen. Thut man dasselbe mit jedem andern nächstfolgenden Punkte D, der den beyden gegebenen Curven gemeinschaftlich ist, so werden die Durchschnittspunkte von je zwey nächsten dieser Kreisbogen in der Rolllinie liegen, und die letzte wird bloß in der Aufeinanderfolge aller dieser Durchschnittspunkte bestehen.

Sind $AP' = x'$ und $P'D = y'$ die Coordinaten der fixen Curve AD, und sind $AP = x$, $PM = y$ die Coordinaten des Punktes M der Rolllinie, so ist die Gleichung eines dieser Kreise

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - r^2 = 0.$$

In dieser Gleichung ist die Größe y' sowohl, als auch die Größe r als eine Funktion von x' zu betrachten. Differentiirt man sie daher in Beziehung auf x', so hat man

$$x - x' + (y - y')\frac{dy'}{dx'} + \frac{r\,dr}{dx'} = 0,$$

und die Elimination von x' aus diesen beyden Gleichungen wird sofort die gesuchte Gleichung der Rolllinie zwischen x und y geben.

Setzt man der Kürze wegen

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2,$$

so findet man aus diesen Gleichungen für die Werthe von x und y folgende Ausdrücke:

$$x = x' - \frac{1}{ds'^2}(r\,dr\,dx' + r\,dy'\sqrt{ds'^2 - dr^2}),$$

$$y = y' - \frac{1}{ds'^2}(r\,dr\,dy' - r\,dx'\sqrt{ds'^2 - dr^2}).$$

I. Sey, für einen speciellen Fall, die bewegliche Curve DE ein Kreis des Halbmessers a, und die feste Curve AD ebenfalls ein Kreis des Halbmessers b, und sey die unveränderliche Gerade, welche den beschreibenden Punkt M trägt, und ihn mit dem Mittelpunkte O des ersten Kreises verbindet, oder sey MO = c. Sey überdieß t der Bogen AD, also auch der Winkel am Mittelpunkte C des zweyten Kreises oder sey der Winkel $ACD = \frac{t}{b}$, so wie der Winkel

$$180 - DOM = \frac{t}{a}, \text{ so hat man}$$

$$\frac{x'}{b} = 1 - \cos.\frac{t}{b} \text{ und } \frac{y'}{b} = \sin.\frac{t}{b}$$

und überdieß

$$r^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos.\frac{t}{a}.$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{dx'}{dt} = \sin.\frac{t}{b},\quad \frac{dy'}{dt} = \cos.\frac{t}{b} \text{ und } \frac{r\,dr}{dt} = -c\sin.\frac{t}{a}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem vorhergehenden Werthe von x, so hat man

$$x = x' + c\sin.\frac{t}{a}\sin.\frac{t}{b} - r\cos.\frac{t}{b}\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin.^2\frac{t}{a}}, \text{ oder}$$

$$x = b - b\cos.\frac{t}{b} + c\sin.\frac{t}{a}\sin.\frac{t}{b} - \cos.\frac{t}{b}\sqrt{r^2 - c^2\sin.^2\frac{t}{a}},$$

oder endlich, wenn man in dieser Gleichung den oben gegebenen Werth von r^2 substituirt:

$$x = b - (a+b)\cos.\frac{t}{b} - c\cos.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t,$$

und eben so

$$y = (a+b)\sin.\frac{t}{b} + c\sin.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t,$$

und die Elimination der Größe t aus diesen beyden Gleichungen gibt die gesuchte Gleichung der Rolllinie, welche für diesen besonderen Fall die Epicyclois heißt. (Vergl. §. 17, VI.)

So oft die Größen a und b sich wie zwey ganze Zahlen verhalten, läßt sich aus den beyden letzten Gleichungen die Größe t so eliminiren,

daß das Resultat zwischen x und y eine algebraische Gleichung gibt. Ist a negativ, so wälzt sich der bewegliche Kreis auf der inneren Seite der Peripherie des festen Kreises, und dann wird die von M beschriebene Curve die Hypocyclois genannt. Ist endlich die feste Curve AD eine gerade Linie, und wählt man diese Gerade für die Axe der x', so ist y' = o und x' = t, so wie

$$\frac{r\,dr}{dt} = c \sin.\frac{t}{a},$$

so daß daher die beyden vorhergehenden Gleichungen in die folgenden übergehen:

$$x = t - c \sin.\frac{t}{a},$$

$$y = a - c \cos.\frac{t}{a},$$

und die Elimination von t aus diesen zwey Ausdrücken gibt die Gleichung der Cyclois, und zwar der verkürzten, wenn $a < c$, der verlängerten, wenn $a > c$, und endlich der gemeinen Cyclois, wenn $a = c$ ist, übereinstimmend mit §. 17, VI.

XIII.

Besondere Punkte der krummen Linien.

§. 103. (Verhalten der Curven gegen ihre Abscissenaxen.) Eine Curve entfernt sich von der Abscissenaxe, oder sie nähert sich derselben, je nachdem, für ein positives dx, der Werth von y, also auch der von $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ist. Dabey wird demnach die Größe dx immer positiv angenommen, oder es wird vorausgesetzt, daß man in der Abscissenaxe immer in der Richtung der wachsenden positiven Abscissen fortgeht.

Für die Parabel z. B. ist $y^2 = 2px$, also auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Da also in derjenigen Hälfte dieser Curve, wo y positiv ist, auch

$\frac{dy}{dx}$ positiv ist, so entfernt sich der über der Abscissenaxe liegende Bogen der Parabel ins Unendliche von dieser Axe, und dasselbe gilt auch von dem andern, unter der Abscissenaxe liegenden Bogen. Denn für diesen Bogen ist y negativ, also auch, wenn man $y = -v$ setzt, wo v eine positive Größe ist,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{p}{v};$$

so daß demnach $\frac{dv}{dx}$ wieder positiv ist.

Eben so hat man für den Kreis, dessen Halbmesser a ist,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

also auch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

und daraus folgt, daß sich die Curve in den beyden Quadranten, wo x und y positiv, und wo x positiv, y aber negativ ist, sich für wachsende x der Abscissenaxe nähert, für die beyden anderen Quadranten aber sich von ihr entfernt, wenn man nämlich in den beyden letzten Quadranten in derselben Richtung, wie bey den zwey ersten, in der Abscissenaxe fortgeht. So hat man für denjenigen Quadranten, wo x und y negativ ist, wenn man $x = -\xi$ und $y = -v$ setzt,

$$-\frac{dv}{dx} = \frac{\xi}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{\xi}{v},$$

oder die Curve entfernt sich von der Abscissenaxe, wenn dx in derselben Richtung, wie zuvor, genommen wird.

§. 104. (**Concavität und Convexität der Curven gegen die Abscissenaxe.**) Eine Curve MNP (Fig. 31) ist gegen die Abscissenaxe AX concav oder convex, je nachdem die zweyte Differenz

$$Pb - Na = Pp$$

der Ordinaten negativ oder positiv ist. Nach dem Vorhergehenden (§. 87) ist aber $Pp = d^2y$, wenn

$$Na = dy \quad \text{und} \quad BC = CD = dx$$

ist. Die Curve ist also in dem Punkte M gegen AX concav oder convex, wenn, für positive y, die Größe $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ist.

Für negative Ordinaten y würde sich diese Regel umkehren. Man kann aber diese Duplicität der Vorschrift vermeiden, wenn man sagt,

daß die Curve gegen AX concav oder convex ist, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben, oder kurz: Die Curve ist gegen die Abscissenaxe

concav, wenn das Produkt $y.\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, oder

convex, » » » » positiv ist.

Für die Parabel z. B. ist $y^2 = 2px$, also $\frac{yd^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^2}$, oder diese Curve ist immer gegen die Abscissenaxe concav. Für die Cycloide hat man (nach §. 98, III.), wenn (Fig. 26) $AP = x$, $PM = y$ ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y};$$

also ist auch diese Curve in allen ihren Theilen gegen die Abscissenaxe concav, da in ihr die Ordinate y immer positiv ist. Für die Logistik endlich ist (§. 17, I.) $y = \log. x$, wo (Fig. 21) $AP = x$, $PM = y$ ist; also ist auch

$$\frac{yd^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\log. x,$$

oder die Curve ist über der Abscissenaxe gegen sie concav, und unter derselben convex, weil in diesem zweyten Theile x kleiner als $AB = 1$, also $\log. x$ negativ ist.

§. 105. (**Wendepunkte der Curven.**) Wendepunkte einer Curve werden diejenigen Punkte genannt, wo die Ordinate y einen größten oder kleinsten Werth hat; diesen Ausdruck in der Bedeutung genommen, wie er oben (§. 83) aufgestellt worden ist. Für solche Wendepunkte wird also die Größe $\frac{dy}{dx}$ gleich Null, oder auch unendlich groß gesetzt werden müssen, woraus hervorgeht, daß für diese Punkte die Tangente der Curve zur Abscissenaxe parallel oder senkrecht stehe, da (nach §. 90) $\tang. \omega = \frac{dy}{dx}$ ist. Hier wollen wir nur die ersten dieser beyden Fälle betrachten, wo $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und den anderen Fall, wo $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist, später eigens behandeln.

Wir haben aber bereits oben (§. 83) gesehen, daß die Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ für einen größten oder kleinsten Werth der Größe y,

das heißt also, für einen Wendepunkt der Curve allerdings nothwendig, aber nicht hinreichend ist, sondern daß auch für die Existenz eines solchen Werthes die Größe $\frac{d^2 y}{d x^2}$ nicht gleich Null seyn darf, oder wenn $\frac{d^2 y}{d x^2}$ verschwindet, daß dann auch $\frac{d^3 y}{d x^3}$ verschwinden muß, aber $\frac{d^4 y}{d x^4}$ nicht verschwinden darf u. s. w., so daß man daher zur Aufsuchung der Wendepunkte der Curven ganz dasselbe Verfahren anwenden wird, welches wir oben zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen gegeben haben.

So erhält man für die Ellipse, wenn man ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

differentiirt, und $\frac{d y}{d x} = 0$ setzt, für die Abscisse $x = 0$, und da für diesen Werth von x die Größe $\frac{d^2 y}{d x^2}$ negativ wird, so gibt $x = 0$ den größten Werth $y = \pm b$, oder die beyden Wendepunkte der Ellipse gehören für die Abscisse $x = 0$. Nimmt man die kleine Axe der Ellipse für die der Abscisse x, so hat man

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

und man findet auch hier, daß $x = 0$ oder $y = \pm a$ zwey Wendepunkte der Ellipse gibt.

Für die Sinuslinie (§. 17, III. Fig. 23) ist $y = a \sin. x$, also gehören ihre Wendepunkte zu den Abscissen $x = \pm \frac{1}{2} n \pi$, wo $n = 1, 3, 5, 7 \ldots$

§. 106. (Inflexions- und Beugungspunkte.) Inflexionspunkte der Curven nennt man diejenigen, wo die Concavität derselben in eine Convexität gegen die Abscissenaxe oder auch gegen irgend eine andere feste Gerade übergeht. Für solche Punkte muß daher, nach dem in §. 104 Gesagten, der Werth von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ gleich Null oder gleich unendlich seyn, oder der allgemeine Werth von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ muß, für solche Punkte, von dem positiven Zustand in den negativen übergehen.

Hat man so, aus der gegebenen Gleichung der Curve, und aus der Bedingungsgleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ die Werthe $x = \alpha$ und $y = \beta$ der Coordinaten gefunden, für welche ein Inflexionspunkt Statt haben kann,

so wird man, um die Existenz desselben zu constatiren, in der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2}$ statt x die Größe $\alpha + h$ und $\alpha - h$ setzen, wo h unendlich klein ist, und zusehen, ob für diese kleinsten Werthe von h die Größe $\frac{d^2 y}{d x^2}$ auch in der That ihre Zeichen ändert.

Ist z. B. die Gleichung

$$y = \beta + (x - \alpha)^{\frac{3}{5}}$$

einer Curve gegeben, so findet man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5\,(x - a)^{\frac{2}{5}}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-6}{25\,(x - a)^{\frac{7}{5}}}.$$

Nimmt man hier $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty$, so erhält man $x = \alpha$. Setzt man aber $x = \alpha \pm h$, so wird

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \mp \frac{6}{25\,h^{\frac{7}{5}}},$$

und da sonach ein Zeichenwechsel Statt hat, so hat die Curve einen Inflexionspunkt für $x = \alpha$ und $y = \beta$.

Auf diese Weise findet man, daß die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{a x^2}{a^2 + x^2}$$

ist, für $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ einen Inflexionspunkt hat. Man sieht, daß in diesen Inflexionspunkten die Curve von der Tangente zugleich berührt und durchschnitten wird, wie in Fig. 41. Übrigens können diese Tangenten in jenen Punkten jede willkürliche Lage gegen die Abscissenaxe haben, da man, um diese Lage zu ändern, nur die Richtung der Coordinatenaxen (nach §. 4) verändern kann.

§. 107. (**Spitzen der Curven**) In den Spitzen vereinigen sich wenigstens zwey Äste der Curven, die daselbst eine gemeinschaftliche, zwischen diesen Ästen liegende Tangente haben, wie in Fig. 5 und 6. Verlegt man den Anfang der Coordinaten in diese Spitze, und die Abscissenaxe in jene Tangente, so können in der so veränderten Gleichung der Curve die kleinsten Werthe von x bloß positiv oder bloß negativ seyn, und die Größe $\frac{dy}{dx}$ wird für $x = 0$ bloß den einzigen Werth 0, für

jede andere sehr kleine Abscisse x aber einen doppelten Werth mit verschiedenen Zeichen haben.

Für die Cissois (§. 15, II. Fig. 6) ist $x^3 = y^2 (a - x)$, und diese Gleichung, oder

$$y = x \sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

zeigt, daß für sehr kleine x diese Abscisse x nur positiv seyn kann. Diese Gleichung gibt aber

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - 2x) \sqrt{x}}{2 \sqrt{(a - x)^3}},$$

woraus folgt, daß für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und daß für sehr kleine Werthe von x die Größe $\frac{dy}{dx}$ einen doppelten Werth hat.

Eben so hat die Conchois (§. 15, IV. Fig. 10) die Gleichung

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \left(\frac{b}{a - x}\right)^2,$$

wo $BQ = x$ und $MQ = y$ ist.

Setzt man also $a = b$, so hat man

$$y = x \sqrt{\frac{2ax - x^2}{a - x}} = x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2a - x}{a - x}};$$

also kann auch hier nahe bey dem Anfang der Coordinaten die sehr kleine Größe x nur positiv seyn, und da man für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$, und für sehr kleine x den Werth von $\frac{dy}{dx}$ doppelt findet, so hat die Curve in dem Punkte B eine Spitze, wie schon in §. 15, IV. bemerkt worden ist. Eine ähnliche Spitze hat auch die Neil'sche Parabel (Fig. 5) in A, die Cyclois (Fig. 26) in A und B u. f.

§. 108. (**Schnäbel der Curven.**) Eine Spitze, in welcher die in diesem Punkte sich vereinigenden Äste beyde auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen, heißt ein Schnabel. Für ihn gilt, was §. 107 von den Spitzen gesagt worden ist, nur mit dem Unterschiede, daß, wenn wie dort die Abscissenaxe in die gemeinschaftliche Tangente gelegt worden ist, für sehr kleine x der Werth von $\frac{dy}{dx}$ zwar auch doppelt ist, aber dasselbe Zeichen hat. Die oben (§. 16, IV. Fig. 20) angegebene Schnabellinie hat in dem Anfangspunkte A der Coor-

dinaten einen solchen Schnabel. Setzt man daselbst $a = b = 1$, so wird die Gleichung dieser Linie

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}, \text{ und diese gibt}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \tfrac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $x = 0$, so wird auch $\frac{dy}{dx} = 0$, oder beyde Äste AM und Am haben die Abscissenaxe AX zur gemeinschaftlichen Tangente. Für sehr kleine Werthe von x aber werden beyde Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv. Einen ähnlichen Schnabel im Anfangspunkte der Coordinaten haben auch die Curven, deren Gleichungen

$$y = ax^2 + bx^3\sqrt{x} \text{ und } y = ax^{\frac{3}{4}} + bx^{\frac{3}{4}}\sqrt{x} \text{ sind.}$$

§. 109. (Vielfache Punkte der Curven.) Wenn zwey oder mehr Äste einer Curve sich in einem Punkte schneiden, ohne in demselben eine gemeinschaftliche Tangente zu haben, so wird ein solcher Punkt ein vielfacher Punkt genannt. Die Glockenlinie (§. 15, III. Fig. 9), deren Gleichung

$$ay^3 - x^3 - cx^2 = 0$$

ist, hat in A, wo jeder der beyden Äste AM und Am seine eigene Tangente hat, einen solchen doppelten Punkt, so wie die Conchois (Fig. 10) in B, die Lemniscate (Fig. 13) in A u. s.

§. 110. (Conjugirte Punkte.) Wenn die Gleichung einer Curve für einen bestimmten Werth von $x = a$ einen reellen Werth von y, aber für $x = a \pm h$, wo h sehr klein ist, einen imaginären Werth von y gibt, so gehört die Abscisse $x = a$ für einen conjugirten Punkt, der zwar von der eigentlichen Curve abgesondert und isolirt ist, aber demungeachtet einen integrirenden Theil derselben bildet. Für die Conchois (§. 15, IV. Fig. 10) ist

$$y^2 = x^2\left(\frac{b}{x-a}\right)^2 - x^2.$$

In dieser Gleichung gibt $x = 0$ auch $y = 0$. Setzt man aber $x = \pm h$, so wird y imaginär; also ist für $b < a$ der Anfangspunkt der Curve ein einfacher, conjugirter Punkt. Eben so erhält man für die Curve, deren Gleichung

$$y = (x + 1)\sqrt{x} \text{ ist,}$$

für $x = -1$ und $y = 0$ einen doppelten Punkt u. s.

XIV.

Differentiation der Gleichungen der Oberflächen.

---

§. 111. (**Erstes Differential der Gleichung einer Fläche.**) Jede einzelne Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y, z kann als die Gleichung einer Fläche betrachtet werden. Da aber eine einzige Gleichung auch nur eine einzige veränderliche Größe bestimmen kann, so müssen die zwey anderen unserer willkürlichen Annahme überlassen bleiben, oder man wird zwey dieser Größen, z. B. x und y nach Willkür annehmen, um dann durch sie den ihnen entsprechenden Werth von z so zu bestimmen, wie der letzte aus der vorgelegten Gleichung der gegebenen Fläche folgt. So kann man z. B. aus der bekannten Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

deren Halbmesser a ist, den Werth von z erst dann erhalten, wenn man den Größen x und y zuvor bestimmte Werthe beygelegt hat, und da diese beyden Größen x und y durch keine weitere Relation unter sich verbunden, oder da sie von einander unabhängig sind, so wird man auch die eine derselben verändern können, während die andere ungeändert bleibt, so daß daher die Größe z auf zwey verschiedene Arten variiren kann, nämlich in Beziehung auf x sowohl, als auch in Beziehung auf y. Im ersten Falle betrachtet man in der gegebenen Gleichung zwischen x, y und z bloß die zwey Größen z und x, im zweyten aber bloß z und y als veränderlich. Bezeichnet man also wieder (wie oben §. 53) diese partiellen Differentialien von z in Beziehung auf x durch $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und in Beziehung auf y durch $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, so hat man für die Differentialgleichung der Kugel

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}.$$

Man sieht sonach, daß jede einzelne Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y, z, von welchen zwey, x und y, unabhängig sind, zu ihrem Differential zwey Gleichungen, aber zwischen partiellen Differentialien, hat, und daß man, wenn man zu den höheren Differentialien dieser Gleichung fortgehen will, die beyden ersten

Differentialien dx und dy der zwey als unabhängig angenommenen Größen constant setzen muß.

Sey also $u = o$ die Gleichung einer Fläche zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z. — Betrachtet man zuerst bloß die Größen z und x als variabel, so kann die Gleichung $u = o$ als eine Gleichung zwischen den zwey veränderlichen Größen z und x angesehen werden, und man hat daher, wie oben (§. 69, Gleichung I.)

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} = o \quad \ldots\ldots \quad (X),$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Größen die partiellen Differential-Coefficienten, die außer den Klammern stehenden Größen dx und dz aber gewöhnliche Differentialien bezeichnen.

Eben so erhält man, wenn man bloß z und y variabel annimmt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dy} = o \quad \ldots \quad (Y).$$

Multiplicirt man die erste dieser Differentialgleichungen durch dx und die zweyte durch dy, so ist die Summe dieser Produkte

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) \left[\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right] = o.$$

Allein $\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ ist nichts anderes, als das vollständige Differential von z, oder gleich dz; also geht auch die letzte Gleichung in folgende über:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz = o \quad \ldots \quad (Z),$$

und dieser Ausdruck kann als das vollständige Differential der gegebenen Gleichung $u = o$ angesehen werden, wenn man nur bemerkt, daß sie eigentlich zwey anderen Differentialgleichungen gleichgeltend ist. Denn wenn man in ihr den Werth von dz oder

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$$

substituirt, und dann die beyden Größen dx und dy als von einander unabhängig betrachtet, so findet man die zwey vorhergehenden Gleichungen (X) und (Y) wieder, denen diese Gleichung (Z) gleichgeltend ist.

§. 112. (Zweytes Differential der Gleichung einer Fläche.)

Um das zweyte Differential einer Gleichung $u = o$ zwischen drey ver-

änderlichen Größen zu erhalten, wird man jede der beyden vorhergehenden ersten Differentialgleichungen (X) und (Y) wieder in Beziehung auf z, x und auf z, y partiell differentiiren.

Differentiirt man die Gleichung (X) in Beziehung auf z und x, so gibt das erste Glied derselben, da nach dem Vorhergehenden dx und dy constant ist,

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) \frac{d z}{d x},$$

und das zweyte Glied gibt

$$\left[\left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z}{d x}\right] \frac{d z}{d x} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d x^2},$$

und daher die Summe beyder Glieder

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) \frac{d z}{d x} + \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z^2}{d x^2} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d x^2} = 0 \ldots (XX).$$

Differentiirt man aber (X) in Beziehung auf y, z, oder was dasselbe ist, differentiirt man (Y) in Beziehung auf x, z, indem man bemerkt, daß (nach §. 53, I.)

$$\frac{d^2 z}{d y d x} = \frac{d^2 z}{d x d y}$$ ist, so erhält man:

$$\left(\frac{d^2 u}{d x d y}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d y d z}\right) \frac{d z}{d x} + \left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) \frac{d z}{d y} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d x d y}$$
$$+ \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z}{d x} \cdot \frac{d z}{d y} = 0 \ldots (XY).$$

Differentiirt man endlich die Gleichung (Y) in Beziehung auf y und z, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 u}{d y d z}\right) \frac{d z}{d y} + \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z^2}{d y^2} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d y^2} = 0 \ldots (YY),$$

und dieß sind die drey Differentialgleichungen der zweyten Ordnung von der gegebenen endlichen Gleichung u = 0. Eine solche Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen hat also zwey erste und drey zweyte Differentialgleichungen. Es ist leicht, dieß auch auf die Differentialgleichungen der höheren Ordnungen, und auf Gleichungen u = 0 zwischen mehr als drey veränderlichen Größen fortzusetzen.

Da in diesen drey Gleichungen (XX), (XY) und (YY) nur drey Differential-Coefficienten der zweyten Ordnung von der Größe z vorkommen, so wird man sie durch diese drey Gleichungen bestimmen können.

Man wird nämlich finden

den Werth von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ aus (XX),

» » » $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ » (XY) und

» » » $\frac{d^2 z}{dy^2}$ » (YY).

Bemerken wir noch, daß wir in §. 111 für das vollständige erste Differential von z erhalten haben:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

und daß man eben so das zweyte vollständige Differential von z, oder daß man $d^2 z$ erhalten wird, wenn man diesen Ausdruck von dz in Beziehung auf x und y differentiirt, und dabey dx und dy constant setzt, oder auch, wenn man in der Gleichung (II) des §. 60 die Größe $u = z$ und $d^2 y = 0$ setzt, so daß man daher hat

$$d^2 z = \frac{d^2 z}{dx^2} \,.\, dx^2 + 2\frac{d^2 z}{dx\,dy} \,.\, dx\,dy + \frac{d^2 z}{dy^2} \,.\, dy^2.$$

Multiplicirt man aber die vorhergehenden Gleichungen (XX), (XY) und (YY) nach der Ordnung durch dx^2, $2\,dx\,dy$ und dy^2, so gibt die Summe dieser drey Produkte, wenn man dabey die so eben gegebenen Werthe von dz und $d^2 z$ berücksichtiget,

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)dx^2 + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)dy^2 + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)dz^2$$
$$+ 2\left[\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right)dx\,dz + \left(\frac{d^2 u}{dy\,dz}\right)dy\,dz\right]$$
$$+ \left(\frac{du}{dz}\right)d^2 z = 0,$$

derselbe Ausdruck oder dasselbe zweyte Differential der Gleichung $u = 0$ einer Fläche, den man auch erhalten wird, wenn man die vorhergehende erste Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz = 0$$

differentiirt, indem man in ihr die Größen x, y, z und dz veränderlich, die Größen dx und dy aber constaut nimmt.

Ex. I. Sey die Gleichung gegeben

$$u = 0 = xy + xz + yz - a^2, \text{ so hat man}$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = y + z,\quad \left(\frac{du}{dy}\right) = x + z,\quad \left(\frac{du}{dz}\right) = x + y,$$

ferner

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) = 0,$$

und endlich

$$\left(\frac{d^2 u}{d x d y}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d y d z}\right) = 1.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man also für die Gleichung

$$(X) \quad \ldots \quad (y + z) + (x + y)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$(Y) \quad \ldots \quad (x + z) + (x + y)\frac{dz}{dy} = 0,$$

$$(XX) \quad \ldots \quad 2 \cdot \frac{dz}{dx} + (x + y)\frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

$$(XY) \quad \ldots \quad 1 + \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + (x + y)\frac{d^2 z}{dx\,dy} = 0,$$

$$(YY) \quad \ldots \quad 2 \cdot \frac{dz}{dy} + (x + y)\frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

und dieß sind daher die fünf Gleichungen, aus welchen man die Werthe der fünf Differential-Coefficienten

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dy^2}$$

finden wird.

Ohne sich übrigens an diese allgemeinen Formeln zu halten, wird man, wie in §. 60, II., kürzer zu demselben Ziele gelangen, wenn man die gegebene Gleichung $u = 0$ auf die gewöhnliche Weise differentiirt. Auf diese Art erhält man sofort die Gleichung

$$(X) \quad \ldots \quad (x + y)\,dz + (y + z)\,dx = 0,$$
$$(Y) \quad \ldots \quad (x + y)\,dz + (x + z)\,dy = 0.$$

Ist dann dx und dy constant, so gibt die Differentiation der zwey letzten Gleichungen

$$(XX) \quad \ldots \quad 2\,dx\,dz + (x + y)\,d^2 z = 0,$$
$$(XY) \quad \ldots \quad dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz + (x + y)\,d^2 z = 0,$$
$$(YY) \quad \ldots \quad 2\,dy\,dz + (x + y)\,d^2 z = 0, \quad \text{wie zuvor.}$$

Die gewählte Gleichung

$$u = 0 = xy + xz + yz - a^2$$

der zweyten Ordnung gehört übrigens für das sogenannte Hyperboloid mit einem Fache. Nennt man A, B, C die drey Hauptaxen dieses Hyperboloids, so hat man

$$A^2 = a^2,$$
$$B^2 = -2a^2(1 + \sqrt{2}) \text{ und}$$
$$C^2 = -2a^2(1 - \sqrt{2}),$$

also die zweyte Hauptaxe B imaginär, eine diesem Hyperboloid zukommende Eigenschaft. (M. s. Cauchy, Exercices de Mathem. III. année. Paris 1828.)

Ex. II. Für das Ellipsoid mit drey Axen a, b, c hat man die Gleichung

$$u = o = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Diese Gleichung gibt

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \text{ und } \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen in Beziehung auf z und x, so ist

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{c^2}{a^2 z^2}\left(z - x \cdot \frac{dz}{dx}\right),$$

oder, wenn man den Werth von $\frac{dz}{dx}$ substituirt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(b^2 - y^2).$$

Differentiirt man eben so die erste jener Gleichungen in Beziehung auf y, oder die zweyte in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = -\frac{c^4 \cdot xy}{a^2 b^2 z^3}.$$

Differentiirt man endlich die zweyte jener Gleichungen in Beziehung auf y, so hat man

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - x^2).$$

§. 113. (Elimination der Constanten und selbst der willkürlichen Funktionen.) Da die Gleichung u = o zwischen drey veränderlichen Größen zwey erste Differentialgleichungen hat, so kann man aus diesen drey Gleichungen zwey Constanten eliminiren, und das Resultat wird eine Gleichung zwischen x, y und z, und zwischen den partiellen Differentialien $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ seyn, die von jenen beyden Constanten ganz unabhängig ist.

Fügt man zu diesen Gleichungen noch die drey Differentialglei-

chungen der zweyten Ordnung von $u = o$ hinzu, so wird man aus diesen sechs Gleichungen fünf Größen eliminiren können u. s. w.

Auf diese Weise wird man selbst ganz unbekannte Funktionen einer gegebenen Gleichung eliminiren, und dieser Gleichung eine andere substituiren können, welche diese Funktion nicht mehr, aber dafür die partiellen Differentialien der Größen x, y und z enthält.

Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$z = f(ax + by) \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

wo f was immer für eine, selbst unbekannte Funktion der Größe $(ax + by)$ bezeichnet, also z. B.:

$$z = (ax + by)^m, \quad \text{oder}$$
$$z = \sin.\sqrt{ax + by}, \quad \text{oder}$$
$$z = \log.(ax + by) \quad \text{u. s.},$$

so setze man der Kürze wegen $ax + by = t$, so daß man für die gegebene Gleichung den einfachen Ausdruck

$$z = f(t)$$

hat. Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf z, x und auf z, y, so erhält man (§. 39)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a . f'(t) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = b . f'(t),$$

wo $f't$ wieder irgend eine andere, ebenfalls unbekannte Funktion von t bezeichnet. Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen diese Größe $f'(t)$, so erhält man

$$a\left(\frac{dz}{dy}\right) - b\left(\frac{dz}{dx}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

und diese Gleichung ist der gegebenen

$$z = f(ax + by)$$

gleichgeltend, obschon sie die willkürliche Funktion nicht mehr enthält. Man sieht, daß jene als die erste Differentialgleichung von dieser angesehen werden kann.

I. Differentiirt man die so erhaltene Differentialgleichung

$$a\left(\frac{dz}{dy}\right) - b\left(\frac{dz}{dx}\right) = o,$$

noch einmal partiell, so erhält man

$$a\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) - b\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = o \quad \text{und} \quad a\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - b\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = o,$$

und eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $\frac{a}{b}$, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2 = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}.$$

Diese Gleichung ist die zweyte Differentialgleichung der Gleichung (I), und sie ist, wie man sieht, nicht nur von jener willkürlichen Funktion, sondern auch von den beyden Constanten a und b ganz unabhängig.

II. Sey für ein anderes Beyspiel die Gleichung

$$z = x \cdot \varphi\,(\omega) + y \cdot \psi\,(\omega) + \omega \quad . \; . \; . \quad (A)$$

gegeben, wo φ und ψ willkürliche, und selbst unbekannte Funktionen der Größe ω bezeichnen sollen.

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi\,(\omega) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \psi\,(\omega),$$

woraus sofort folgt:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = f\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad . \; . \; . \quad (a);$$

wenn f wieder irgend eine Funktion bezeichnet. Da aber

$$\omega = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, so kann man die beyden vorhergehenden Gleichungen auch so ausdrücken:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi \cdot \left[z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] \quad . \; . \; . \quad (b),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \psi \cdot \left[z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] \quad . \; . \; . \quad (c);$$

und diese beyden Gleichungen (b) und (c), so wie auch die ihnen gleichgeltende (a), sind die ersten Differentialien der gegebenen Gleichung (A). Sie enthalten, wie man sieht, jede nur mehr eine jener zwey willkürlichen Funktionen, aber dafür die ersten partiellen Differentialien $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Wenn man aber die vorhergehende Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = f\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

noch einmal partiell differentiirt, so hat man

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) f'\left(\frac{d z}{d y}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) f'\left(\frac{d z}{d y}\right)$$

also auch, wenn man die unbekannte Größe $f'\left(\frac{d z}{d y}\right)$ aus diesen zwe Gleichungen eliminirt:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)^2 = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) \ldots (d),$$

und dieß ist die zweyte Differentialgleichung der gegebenen endliche Gleichung (A). Sie enthält keine der beyden ursprünglichen, durc φ und ψ bezeichneten Funktionen mehr, aber dafür partielle Differen tialien der zweyten Ordnung. Auch ist sie, wie man sieht, identisch mi der Gleichung (III), obschon diese auf einem ganz andern Wege erhal ten worden ist.

Dieß wird genügen, die Wichtigkeit und Allgemeinheit dieser Be trachtungen zu zeigen, auf welche wir später wieder zurückkommen wer den. Man wird übrigens von selbst die sehr große Allgemeinheit de Gleichungen mit partiellen Differentialien bemerken, da sie, nicht nu von den constanten Größen, welche ihre ursprünglichen Gleichunge enthalten, unabhängig sind, wie wir dieses oben (§. 61, I) bey de Gleichungen mit gewöhnlichen Differentialien bemerkt haben, sonder da sie selbst von den ganz willkürlichen Funktionen von x und y befrey seyn können, welche in den ursprünglichen oder endlichen Gleichunge derselben vorkommen.

XV.

Tangirende Ebenen der Flächen.

§. 114. (Vorläufige Betrachtungen.) Seyen (Fig. 42) XA YAZ und XAY die drey unter sich senkrechten coordinirten Ebene der xz, yz und xy, auf welche alle Punkte einer gegebenen Obe fläche bezogen werden. Wenn x allein variirt und x + h wird, geht man von dem Punkte M der Fläche zu dem Punkte M' über, u beyde Punkte M und M' in einer zur Ebene der xz parallelen Ebe Q'' Q' M' M liegen, und die Ordinate Q' M' des Punktes M' ist

$$z + h\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \ldots$$

Wenn aber y allein variirt und y + k wird, so geht man von dem
unkte M zu dem Punkte N über, wo diese zwey Punkte in einer zur
ene yz parallelen Ebene PRNM liegen, und die Ordinate RN
s Punktes N ist

$$z + k\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \ldots$$

Wenn aber x und y zugleich variiren, so geht man von dem Punkte
zu einem andern Punkte N′ über, und zwar auf zwey verschiedene
ten, indem man nämlich in der ersten vorhergehenden Entwicklung
+ k statt y, oder indem man in der zweyten x + h statt x setzt.
eyde Wege führen zu demselben Punkte N′, wenn anders die Ober-
che in der betrachteten Stelle stetig ist, und die Gleichung (§. 53)

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right),$$

elche die Identität dieser beyden Verfahren ausdrückt, gründet sich
llein auf dieses Gesetz der Stetigkeit der Fläche.

Diese Ordinate R′N′ wird daher, in ihrer Entwicklung, nach
. 53 zum Ausdrucke haben:

$$z + h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[h^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2hk\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + k^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right] + \ldots$$

Wir wollen sie der Kürze wegen so ausdrücken:

$$z + ph + qk + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \ldots,$$

daß man also hat

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$
$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \quad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Dieß vorausgesetzt, ist also auch

$$r = \left(\frac{dp}{dx}\right), \quad s = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) \text{ und } t = \left(\frac{dq}{dy}\right).$$

Wir werden diese Zeichen im Folgenden zur Abkürzung beybehal-
n, und bemerken hier nur, daß ihnen gemäß die allgemeine erste Dif-
rentialgleichung jeder Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

d daher auch die zweyte Differentialgleichung derselben

$$d^2 z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$$

seyn wird, weil $dp = r dx + s dy$ und $dq = s dx + t dy$ ist.

I. Diesem gemäß wird also die Gleichung (X) des §. 111 derjenigen Curve angehören, in welcher die mit xz parallele Ebene $Q''Q'M'M$ die Fläche $u = o$ schneidet, so wie die Gleichung (Y) für die Curve gehört, in welcher die mit yz parallele Ebene $PRNM$ die Fläche schneidet. In der ersten dieser Gleichungen ist $dz = Q'M' - QM$, und in der zweyten ist $dz = RN - QM$, oder dort ist das partielle $dz = p dx$, und hier ist es $dz = q dy$, beyder Summe aber ist das vollständige Differential von z oder $dz = R'N' - QM = p dx + q dy$.

§. 115. (Verschiedene Grade der Berührungen der Flächen.) Wir haben gesehen, daß für jede gegebene Fläche, deren Gleichung zwischen xyz ausgedrückt ist, wenn x in $x + h = x + dx$, und y in $y + k = y + dy$ übergeht, der dadurch veränderte Werth von z gleich ist

$$z + p dx + q dy + \tfrac{1}{2}(r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2) + \ldots$$

Eine zweyte Fläche, deren Gleichung zwischen den analogen Coordinaten $x'y'z'$ und mehreren Constanten gegeben ist, soll durch den Punkt der ersten Fläche gehen, dessen Coordinaten xyz sind. Geht dann auch ferner noch in ihr die Größe $x = x'$ in $x + dx$, und $y = y'$ in $y + dy$ über, so hat man für den veränderten Werth von z oder z' den Ausdruck:

$$z + p'dx + q'dy + \tfrac{1}{2}(r'dx^2 + 2s'dx dy + t'dy^2) + \ldots$$

Bestimmt man nun die Constanten der zweyten Gleichung so, daß $p' = p$ und $q' = q$ wird, so werden beyde Flächen, analog mit dem oben (§. 91) Gesagten, eine Berührung der ersten Ordnung haben, so daß in dem Berührungspunkte keine andere dritte Fläche zwischen jenen beyden durchgehen kann, wenn diese dritte Fläche nicht auch denselben Bedingungsgleichungen $p'' = p$ und $q'' = q$ genug thut. (Vergl. §. 94.)

Eben so werden diese beyden Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung der zweyten Ordnung haben, wenn man die Constanten der zweyten Fläche so bestimmt, daß nebst jenen beyden Bedingungsgleichungen auch noch die drey folgenden (vergl. §. 95) Statt haben:

$$r' = r, \quad s' = s \quad \text{und} \quad t' = t,$$

und man sieht, wie sich dieses auch auf die Berührungen der höhern Ordnungen fortsetzen läßt.

§. 116. (Tangirende Ebene der Flächen.) Sey die zweyte der in §. 115 betrachteten Flächen eine Ebene, und die Gleichung derselben

$$z' = Ax' + By' + D.$$

Die Bedingung, daß diese Ebene durch den Punkt der ersten Fläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, geht, gibt

$$z = Ax + By + D.$$

Demnach wird die Gleichung unserer Ebene die Form haben:

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y'),$$

in welcher nur noch die beyden Größen A und B zu bestimmen seyn werden.

Die Bedingung, daß die Ebene mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, gibt aber sofort

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

oder was dasselbe ist,

$$A = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } B = \left(\frac{dz}{dy}\right);$$

und diese drey Gleichungen bestimmen die drey Größen A, B und D, so daß man daher für die Gleichung der gesuchten tangirenden Ebene hat

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ oder}$$

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

wo $x'y'z'$ die variabeln Größen der tangirenden Ebene sind.

I. Nennt man α, β, γ die Winkel, welche die tangirende Ebene der Flächen mit den coordinirten Ebenen der xy, xz und yz bildet, so hat man (Einl. §. 9, I.)

$$\cos.\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos.\beta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\text{und } \cos.\gamma = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

wo $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist.

Ex. Die Gleichung des Ellipsoids mit drey Axen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gibt sofort

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \text{ und } q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

also ist auch die Gleichung der das Ellipsoid tangirenden Ebene

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} + \frac{z z'}{c^2} = 1.$$

II. Diese tangirende Ebene berührt die gegebene Fläche nicht etwa bloß in dem Elemente einer Curve, die in dieser Fläche enthalten ist, sondern vielmehr in allen den Punkten, welche um den gemeinschaftlichen Punkt beyder Flächen, diesem Punkte in allen Richtungen zunächst liegen; oder mit andern Worten: die tangirende Ebene enthält die tangirenden Geraden von allen den Curven, die durch irgend eine Ebene entstehen, welche die Fläche in jenem gemeinschaftlichen Punkte schneidet. Denn wenn man die Gleichung der tangirenden Ebene in Beziehung auf ihre Coordinaten, d. h. in Beziehung auf x', y' und z' differentiirt, so erhält man

$$dz' = p\,dx' + q\,dy'.$$

Nimmt man also $dx' = dx$ und $dy' = dy$, so hat man

$$dz' = p\,dx + q\,dy = dz$$

so daß also für alle Punkte, welche den gemeinschaftlichen Punkt beyder Flächen zunächst umgeben, $dz' = dz$ ist.

III. Setzt man in der Gleichung der tangirenden Ebene eine der Coordinaten x', y' oder z' gleich Null, so erhält man die Gleichung der Knotenlinie (§. 8) der tangirenden Ebene in der coordinirten Ebene der beyden andern Coordinaten. Man könnte diese Gleichungen der Knotenlinien so benützen, wie oben die Subtangente, um zu einem gegebenen Punkte der Fläche die tangirende Ebene zu ziehen.

§. 117. **(Normalen der Flächen und Curven des größten Abfalls.)** Diejenige gerade Linie, welche in einem gegebenen Punkte auf der Fläche senkrecht steht, heißt die Normale der Fläche in diesem Punkte.

Da die Normale auch auf der tangirenden Ebene dieses Punktes senkrecht stehen muß, so hat man sofort für die Gleichungen der Normale (Einl. §. 11):

$$\left.\begin{array}{l} x' - x + (z' - z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \\ y' - y + (z' - z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} x' - x + p(z' - z) = 0 \\ y' - y + q(z' - z) = 0 \end{array}\right\}.$$

Nennt man $\alpha\beta\gamma$ die Winkel der Normale mit den drey Richtungen der Axen der xyz, so hat man, wenn $r = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ist:

$$\cos.\alpha = -\frac{p}{r}, \quad \cos.\beta = -\frac{q}{r} \quad \text{und} \quad \cos.\gamma = \frac{1}{r}.$$

I. Die Entfernung dieses Punktes xyz der Fläche von irgend einem Punkte $x''y''z''$ der Normale ist gleich

$$\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2},$$

also auch gleich

$$(z'' - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ist in diesem Ausdrucke $z'' = 0$, so erhält man für die Länge der Normale zwischen dem gegebenen Punkte der Fläche und demjenigen Punkte, wo die Normale die Ebene der xy trifft, den Ausdruck

$$N = -z\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ex. Für das eben angeführte Ellipsoid hat man

$$N = -\frac{1}{a^2 b^2}\sqrt{a^4 c^4 y^2 + b^4 c^4 x^2 + a^4 b^4 z^2}.$$

Für die Kugel ist $a = b = c$, also auch

$$N = a,$$

oder N gleich dem Halbmesser der Kugel.

Ist das Ellipsoid durch Umdrehung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ um die Axe der c entstanden, so hat man $\frac{x^2 + y^3}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, und ist es durch Umdrehung dieser Ellipse um die Axe der a entstanden, so hat man $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$.

II. Unter allen den Curven, welche durch einen gegebenen Punkt der Fläche, in dieser Fläche, gezogen werden können, wird es eine geben, die, in diesem Punkte, die größte Neigung gegen eine der drey coordinirten Ebenen, z. B. gegen die Ebene der xy hat. Man nennt sie die Curve des größten Abfalls (Courbe de la plus grande

pente), und sie wird in den ausübenden Künsten oft mit Vortheil gebraucht.

Man wird diese Curve finden, wenn man unter allen den Geraden, die in der tangirenden Ebene durch den Berührungspunkt gezogen werden können, diejenige bestimmt, welche mit der Ebene der xy den größten Winkel bildet.

Allein die Knotenlinie der tangirenden Ebene mit der Ebene der xy ist

$$-z = p(x'-x) + q(y'-y),$$

und da die gesuchte Gerade auf dieser Knotenlinie senkrecht stehen muß, so ist (nach Einl. §. 3, I.) die Gleichung der gesuchten Geraden

$$p(y'-y) - q(x'-x) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (I)$$

Diese Gleichung ist eigentlich die Projection der gesuchten Curve in der Ebene der xy. Verbindet man sie daher mit der Gleichung der Oberfläche

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so wird man diese Curve selbst erhalten.

Ex. I. Die Gleichung einer Ebene ist

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

also ist auch $p = -\frac{A}{C}$ und $q = -\frac{B}{C}$, und daher die Gleichung (I)

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad \text{oder} \quad y = \frac{B}{A} . x.$$

Allein die Knotenlinie der gegebenen Ebene hat zur Gleichung (§. 7)

$$Ax + By + D = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B},$$

und aus diesen beyden Gleichungen folgt (Einl. §. 3, II.), daß die gesuchte Linie des größten Abfalls auf der Knotenlinie der Ebene in xy senkrecht steht, wie bekannt.

Ex. II. Für die Kugel hat man die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Dieß gibt $p = -\frac{x}{z}$ und $q = -\frac{y}{z}$, so daß daher die Gleichung (I) in folgende übergeht:

$$x\,dy - y\,dx = 0, \quad \text{oder auch} \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$$

Allein dieser Ausdruck entsteht (§. 28) durch Differentiation aus

der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{y}{x} = \text{Const.}$$

Die Projection der gesuchten Curve des größten Abfalls in der Ebene der xy ist also eine gerade, durch den Anfangspunkt der Coordinaten oder durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Gerade. Diese Linie selbst entsteht daher durch den Schnitt der Kugel mit einer Ebene, die durch die Axe der z geht, oder diese Curve ist ein größter Kreis der Kugel, der durch den gegebenen Punkt derselben senkrecht auf der Ebene der xy steht. Liegt dieser Punkt im Scheitel oder in dem höchsten Punkte der Kugel, so ist $x = y = 0$, also auch jene Gleichung

$$\text{Const.} = \frac{0}{0};$$

oder, da dieser Ausdruck unbestimmt ist, so haben auch alle durch den Scheitel der Kugel gehende größte Kreise den stärksten Abfall gegen die Ebene der xy.

§. 118. (**Probleme über nach gegebenen Gesetzen bewegliche tangirende Ebenen.**) Um von dem oben erhaltenen Ausdrucke der tangirenden Ebene einer krummen Fläche einige Anwendungen zu geben, wollen wir zuerst folgendes allgemeine Theorem vorausschicken.

Wenn man zwischen den Größen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ und $RR'R''$ die zwey Systeme von Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= R^2 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= R'^2 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= R''^2 \end{aligned}\right\} \ldots (1) \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (2),$$

so gelten für dieselben Größen sofort auch die zwey folgenden Systeme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots (3) \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{ab}{R} + \frac{a'b'}{R'} + \frac{a''b''}{R''} &= 0\\ \frac{ac}{R} + \frac{a'c'}{R'} + \frac{a''c''}{R''} &= 0\\ \frac{bc}{R} + \frac{b'c'}{R'} + \frac{b''c''}{R''} &= 0\end{aligned}\right\} \ldots (4).$$

Denn, nimmt man die drey unbestimmten Größen u, u', u'' so an, daß man hat

$$\begin{aligned} au + a'u' + a''u'' &= p\\ bu + b'u' + b''u'' &= p'\\ cu + c'u' + c''u'' &= p''\end{aligned}$$

so hat man, wenn man die letzten drey Gleichungen quadrirt und ihre Summe nimmt, vermöge der Gleichungen (1) und (2):

$$R^2u^2 + R'^2u'^2 + R''u''^2 = p^2 + p'^2 + p''^2 \ldots (a).$$

Multiplicirt man aber dieselben drey Gleichungen nach der Ordnung durch abc, durch a'b'c' und durch a''b''c'', so erhält man für die Summe dieser Produkte wieder vermöge der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned} R^2u &= pa + p'b + p''c,\\ R'^2u' &= pa' + p'b' + p''c,\\ R''u'' &= pa'' + p'b'' + p''c''.\end{aligned}$$

Sucht man endlich aus den drey letzten Gleichungen die Werthe von u^2, u'^2 und u''^2, und substituirt sie in der Gleichung (a), so erhält man

$$\begin{aligned} &p^2\left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2}\right)\\ &+ p'^2\left(\frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2}\right)\\ &+ p''^2\left(\frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2}\right)\\ &+ 2pp'\left(\frac{ab}{R^2} + \frac{a'b'}{R'^2} + \frac{a''b''}{R''^2}\right)\\ &+ 2pp''\left(\frac{ac}{R^2} + \frac{a'c'}{R'^2} + \frac{a''c''}{R''^2}\right)\\ &+ 2p'p''\left(\frac{bc}{R^2} + \frac{b'c'}{R'^2} + \frac{b''c''}{R''^2}\right) = p^2 + p'^2 + p''^2.\end{aligned}$$

Da aber dieser letzte Ausdruck für alle Werthe von p, p', p'' gelten soll, so enthält er auch sofort die Gleichungen (3) und (4).

I. Dieß vorausgesetzt, sey die Gleichung gegeben

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

welche, wenn A, B, C positive Größen sind, bekanntlich für ein Ellipsoid gehört, dessen drey Axen $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$ sind.

Suchen wir nun diejenige Fläche, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunktes entsteht, in welchem sich drey Ebenen schneiden, die unter sich senkrecht stehen, und deren jede jenes Ellipsoid in einem Punkte tangirt.

Sind $x'y'z'$ die Coordinaten des Berührungspunktes des Ellipsoids mit der ersten Ebene, und bezeichnet man die Coordinaten der beyden andern Berührungspunkte mit zwey und mit drey Strichen, so hat man zuerst, da diese Berührungspunkte alle auf der Fläche des Ellipsoids liegen:

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1 \\ Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 1 \\ Ax'''^2 + By'''^2 + Cz'''^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots (A).$$

Die Gleichungen der drey berührenden Ebenen selbst aber sind (nach §. 116, I):

$$\left.\begin{array}{l} Axx' + Byy' + Czz' = 1 \\ Axx'' + Byy'' + Czz'' = 1 \\ Axx''' + Byy''' + Czz''' = 1 \end{array}\right\}.$$

Da aber, der Aufgabe gemäß, diese drey tangirenden Ebenen auf einander senkrecht stehen sollen, so hat man (Einl. §. 10)

$$\left.\begin{array}{l} A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' = 0 \\ A^2x'x''' + B^2y'y''' + C^2z'z''' = 0 \\ A^2x''x''' + B^2y''y''' + C^2z''z''' = 0 \end{array}\right\} \ldots (B).$$

Setzt man nun, der Kürze wegen,

$$\begin{array}{lll} Ax' = a & By' = b & \text{und } Cz' = c, \\ Ax'' = a' & By'' = b' & \text{» } Cz'' = c', \\ Ax''' = a'' & By''' = b'' & \text{» } Cz''' = c'', \end{array}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (B) in die oben mit (a) bezeichneten Ausdrücke, und die Gleichungen (A) gehen in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} = 1 \\ \frac{a'^2}{A} + \frac{b'^2}{B} + \frac{c'^2}{C} = 1 \\ \frac{a''^2}{A} + \frac{b''^2}{B} + \frac{c''^2}{C} = 1 \end{array}\right\} \ldots (C).$$

Setzt man ferner

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ R'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 \\ R''^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \end{array}\right\}$$

so sind diese drey letzten Gleichungen identisch mit den oben durch (1) bezeichneten Ausdrücken. Da also bereits die Gleichungen (1) und (2) auch hier gelten, so werden, nach dem Vorhergehenden, auch sofort die Gleichungen (3) und (4) Statt haben. Quadrirt man also die vorhergehenden drey Gleichungen der berührenden Ebenen, nachdem man die erste durch R, die zweyte durch R′ und die dritte durch R″ dividirt hat, so gibt die Summe dieser drey Quadrate, wenn man dabey die Gleichungen (3) und (4) berücksichtigt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2}.$$

Addirt man endlich eben so die Gleichungen (C), nachdem man die erste derselben durch R^2, die zweyte durch R'^2 und die dritte durch R''^2 dividirt hat, so erhält man

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C},$$

so daß man daher, vermöge der beyden letzten Gleichungen, hat

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C},$$

und diese Gleichung zeigt, daß der bewegliche Durchschnittspunkt der drey unter einander senkrechten, das Ellipsoid stets berührenden Ebenen, eine Kugel beschreibt, die mit jenem Ellipsoid concentrisch ist, und deren Halbmesser gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drey Axen des Ellipsoids ist.

Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, deren Halbmesser r ist, so hat man $A = B = C = \frac{1}{r^2}$, also auch

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3r^2$$

für eine mit der gegebenen concentrische Kugel, deren Halbmesser gleich $r\sqrt{3}$ ist.

II. Seyen eben so drey concentrische Kugeln gegeben, und die Fläche zu suchen, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunktes von drey unter sich stets senkrechten Ebenen entsteht, deren jede eine jener drey Kugeln berührt.

Sind a b c die drey rechtwinkligen Coordinaten des veränderlichen Punktes auf der Oberfläche der ersten Kugel, deren Halbmesser gleich R ist, in welchem diese Kugel von der einen dieser Ebene berührt wird, und bezeichnet man für die beyden andern Kugeln diese vier Größen mit einem und mit zwey Strichen, und nimmt man überdieß den gemeinschaftlichen Mittelpunkt dieser drey Kugeln für den Anfang der Coordinaten, so haben offenbar die vorhergehenden Gleichungen (1) auch hier Statt.

Die Gleichungen der drey berührenden Ebenen aber sind (nach §. 116, I.):

$$ax + by + cz = R^2,$$
$$a'x + b'y + c'z = R'^2,$$
$$a''x + b''y + c''z = R''^2.$$

Da aber diese drey tangirenden Ebenen unter sich senkrecht seyn sollen, so haben (Einl. §. 9, II) auch die Gleichungen (2) Statt, und daher, nach dem Vorhergehenden, auch sofort die Gleichungen (3) und (4).

Wenn man aber die drey gegebenen Gleichungen der tangirenden Ebenen quadrirt, nachdem man die erste durch R, die zweyte durch R' und die dritte durch R'' dividirt hat, so gibt die Summe dieser drey Quadrate, wenn man dabey die Gleichungen (3) und (4) berücksichtiget:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + R'^2 + R''^2,$$

woraus folgt, daß die gesuchte Fläche, welche der Durchschnittspunkt jener drey Ebenen beschreibt, eine den gegebenen drey Kugeln concentrische Kugel des Halbmessers $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$ ist.

Sind die Halbmesser der drey gegebenen Kugeln unter sich gleich, und ist jeder derselben gleich r, so wird dieses Problem mit dem besondern Falle der Nro. I. identisch, und man hat

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3r^2.$$

III. Seyen endlich zwey ihrer Gestalt und Lage nach gegebene Flächen gegeben: man suche diejenige Fläche, welche von einer beweglichen Ebene beschrieben wird, die zu jenen zwey Flächen immer Tangente bleibt.

Seyen die Gleichungen der zwey gegebenen Flächen

$$z = F(x, y) \quad \text{und} \quad z = f(x, y),$$

deren Differentialgleichungen wir so ausdrücken wollen:

$$dz = F'(xy).dx + F''(xy).dy \text{ und}$$
$$dz = f'(xy).dx + f''(xy).dy.$$

Nimmt man auf der ersten Fläche für den Berührungspunkt derselben mit der Ebene denjenigen an, dessen Coordinaten

$$x = A, \quad y = B \text{ und } z = F(A, B)$$

sind, so ist die Gleichung der berührenden Fläche für diesen Punkt (§. 116)

$$z - F(A, B) = (x - A)F'(A, B) + (y - B)F''(A, B) \ldots \text{(I.)}$$

Sind eben so

$$x = a, \quad y = b, \quad z = f(a, b)$$

die Coordinaten des Berührungspunktes auf der zweyten Fläche, so ist die Gleichung der berührenden Ebene für diesen Punkt

$$z - f(a, b) = (x - a)f'(a, b) + (y - b)f''(a, b) \ldots \text{(II.)}$$

Da aber beyde tangirenden Ebenen zusammen fallen und nur eine einzige, beyde Flächen zugleich berührende Ebene bilden sollen, so müssen die drey Coefficienten von xyz in den beyden letzten Gleichungen identisch seyn, wodurch man erhält

$$\left.\begin{array}{l} F'(A, B) = f'(a, b), \\ F''(A, B) = f''(a, b), \\ F(A, B) - A.F'(A, B) - B.F''(A, B) \\ = f(a, b) - a.f'(a, b) - b.f''(a, b) \end{array}\right\} \ldots \text{(III.)}$$

Eliminirt man daher aus den fünf Gleichungen I., II., III. die vier Größen A, B, a und b, so erhält man eine Gleichung in xyz, welche für die gesuchte bewegliche, beyde Flächen tangirende Ebene gehören wird.

Diese Elimination zu vereinfachen, kann man zuerst aus den Gleichungen I., II. und aus den zwey ersten der Gleichungen III. von den vier Größen A, B, a und b drey, z. B. die drey letzten eliminiren; dadurch erhält man eine Gleichung in xyz und A, die wir $M = o$ nennen wollen, und diese Gleichung wird für die den beyden Flächen gemeinschaftliche tangirende Ebene gehören, deren Lage durch die unbestimmte Größe A particularisirt wird. Differentiirt man daher diese Gleichung zwey Mal in Beziehung auf A, so erhält man

$$M = o, \quad \left(\frac{dM}{dA}\right) = o \text{ und } \left(\frac{d^2M}{dA^2}\right) = o.$$

Eliminirt man dann aus den beyden ersten dieser drey Gleichun-

gen die Größe A, so erhält man, wie zuvor, die gesuchte Gleichung der die beyden gegebenen Flächen ringsum berührenden Fläche, oder man erhält die Gleichung der die beyden Flächen berührenden Ebene in allen Lagen der letzteren.

Diese beyden ersten Gleichungen $M = o$ und $\left(\frac{dM}{dA}\right) = o$ zusammen genommen, und ohne aus ihnen die Größe A zu eliminiren, gehören für den Durchschnitt zweyer nächsten tangirenden Ebenen, die also eine gerade Linie seyn wird, welche die erste gegebene Fläche in dem Punkte A tangirt. Läßt man dann in diesen beyden Gleichungen die Größe A in $A + dA$ übergehen, so werden die so entstehenden zwey neuen Gleichungen die nächstfolgende tangirende Gerade geben. Diese beyden tangirenden Geraden werden sich in irgend einem Punkte schneiden, und dieser Durchschnittspunkt wird offenbar derjenige Punkt der ersten Tangente seyn, für welchen die Werthe von $x y z$ sich nicht ändern, während (in den beyden Gleichungen $M = o$ und $\left(\frac{dM}{dA}\right) = o$) der Werth von A in $A + dA$ übergeht. Wenn man daher diese beyden Gleichungen bloß in Beziehung auf A differentiirt, so werden die beyden so erhaltenen Gleichungen für jenen Durchschnittspunkt den zwey nächsten Tangenten gehören. Da dieser Punkt sich auch auf der ersten Tangente befindet, und da überdieß die Differentiation von $M = o$ die Gleichung $\left(\frac{dM}{dA}\right)$ hervorbringt, so wird man für den Durchschnittspunkt dieser zwey nächsten Tangenten die drey vorhergehenden Gleichungen haben:

$$M = o, \quad \left(\frac{dM}{dA}\right) = o, \quad \left(\frac{d^2M}{dA^2}\right) = o.$$

Diese Gleichungen werden die vier Größen $x y z$ und A enthalten, und durch die letzte Größe A wird der Punkt auf der ersten Fläche angezeigt oder particularisirt, für welchen man den Durchschnittspunkt der zwey nächsten Tangenten gesucht hat. Will man daher diesen Durchschnittspunkt unabhängig von dieser Größe A erhalten, d. h. will man alle auf diese Weise entstehenden Durchschnittspunkte je zwey nächster Tangenten, oder will man die krumme Linie erhalten, in welcher alle diese Durchschnittspunkte liegen, so wird man, aus den drey letzten Gleichungen, die Größe A eliminiren, und das Resultat dieser Elimination wird die zwey Gleichungen dieser Curve der Durchschnittspunkte sämmtlicher Tangentenpaare geben. Man pflegt diese

Curve die **Wendungscurve** der die beyden gegebenen Flächen ringsum tangirenden Fläche zu nennen.

Eliminirt man endlich aus den drey Gleichungen (III.) die zwey Größen a und b, so wird man eine Gleichung zwischen A und B erhalten, welche für diejenige Curve gehört, in welcher unsere gesuchte tangirende Fläche die erste gegebene Fläche $z = F(xy)$ berührt. Da diese Curve selbst ganz in der gegebenen Fläche $z = F(x, y)$ enthalten seyn muß, so wird diese Curve durch die aus der so eben erwähnten Elimination resultirende Gleichung, und durch die Gleichung $z = F(x, y)$ vollständig dargestellt seyn. Eliminirt man eben so aus den drey Gleichungen (III.) die zwey Größen A und B, so wird die aus dieser Elimination hervorgehende Gleichung, verbunden mit der Gleichung $z = f(x, y)$, diejenige Curve darstellen, in welcher unsere gesuchte tangirende Fläche die zweyte gegebene Fläche $z = f(x, y)$ berührt.

Ist eine dieser Flächen leuchtend und die andere dunkel, so werden die gesuchten tangirenden Flächen diejenigen seyn, welche den Schatten und den Halbschatten des dunkeln Körpers begränzen. Die zwey so eben erwähnten Curven aber werden diejenigen seyn, die auf dem dunkeln Körper den beleuchteten Theil von dem beschatteten trennen, und die auf dem leuchtenden Körper den Theil, welcher sein Licht auf den dunkeln Körper sendet, von dem absondert, dessen Strahlen die dunkle Fläche nicht mehr erreichen.

Um das Vorhergehende auf ein Beyspiel anzuwenden, seyen die beyden gegebenen Flächen **Kugeln**. Sey R der Halbmesser der leuchtenden, r der dunkeln Kugel, c die Distanz ihrer Mittelpunkte, und endlich der Mittelpunkt der leuchtenden Kugel zugleich der Anfang der Coordinaten. Dieß vorausgesetzt, hat man für die Gleichungen der beyden Kugelflächen

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2,$$
$$z^2 = r^2 - (x - c)^2 - y^2.$$

Daraus folgen sofort die beyden Gleichungen, die wir oben durch (I.) und (II.) bezeichneten, nämlich

$$z = \frac{R^2 - A^2 - B^2 - A(x - A) - B(y - B)}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} \ldots (I.)$$

und

$$z = \frac{r^2 - (a - c)^2 - b^2 - (a - c)(x - a) - b(y - b)}{\sqrt{r^2 - (a - c)^2 - b^2}} \ldots (II.)$$

Setzt man die analogen Coefficienten dieser beyden Gleichungen einander gleich, so erhält man für die zwey ersten der Gleichungen (III.)

$$\frac{A}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \frac{a - c}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \frac{b}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}},$$

und endlich für die dritte der Gleichungen (III.)

$$\sqrt{R^2 - A^2 - B^2} - \sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2} + \frac{A(A-a) + B(B-b)}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = o.$$

Die zwey ersten dieser Gleichungen (III.) geben sofort durch Division

$$b = \frac{a-c}{A} \cdot B.$$

Substituirt man diesen Werth von b in dieselben zwey ersten Gleichungen III., so gibt jede derselben, wenn man sie quadrirt:

$$A^2 r^2 = (a-c)^2 \cdot R^2,$$

und die dritte der Gleichungen (III.) geht in folgende über:

$$(R^2 - Ac)A + R^2 c - R^2 a = o.$$

Diese beyden letzten Gleichungen geben

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{R}{c}(R \mp r) \quad \text{und} \\ a &= c - \frac{r}{c}(r \mp R) \end{aligned}\right\} \ldots (a).$$

Substituirt man aber diesen Werth von A in der vorhergehenden Gleichung (I.), so erhält man

$$z = \frac{R^2 c - Rx(R \mp r) - Bcy}{\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2}} \ldots (1),$$

und dieß ist die Gleichung zwischen xyz und B, welche wir oben durch M = o bezeichnet haben.

Differentiirt man sie zwey Mal in Beziehung auf die Größe B, so erhält man

$$Bcz = y\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2} \ldots (2) \quad \text{und}$$

$$Bcy = - z\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2} \ldots (3).$$

Von diesen gibt die Gleichung (2)

$$B^2 = \frac{y^2 [R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2]}{c^2 (y^2 + z^2)},$$

und dieser Werth von B, in der Gleichung (1) substituirt, gibt

$$(y^2+z^2).[c^2-(R\mp r)^2] = [Rc - x(R\mp r)]^2 \ldots (4),$$

die Gleichung der gesuchten Fläche, welche die beyden gegebenen Kugelflächen ringsum berührt. Diese Gleichung gehört, wie man sieht, für einen Kegel; das obere Zeichen für den vollen, das untere für den halben Schatten.

Die Gleichungen (2) und (3) geben durch Division

$$y^2 = -z^2 \quad \text{oder} \quad y^2 + z^2 = 0,$$

und diese letzte Gleichung, verbunden mit der Gleichung (4), gehört für die oben erwähnte Wendungscurve der tangirenden Fläche. Da aber die Gleichung $y^2 + z^2 = 0$ nur für die Werthe $y = 0$ und $z = 0$ bestehen kann, so gibt die Gleichung (4):

$$x = \frac{c}{1 \mp \frac{r}{R}}.$$

Die Wendungscurve ist also hier ein einziger Punkt, der Scheitel des Kegels und der letzte Werth von x ist die Entfernung des Scheitels von dem Mittelpunkte der leuchtenden, so wie

$$x - c = \frac{\pm c}{\frac{R}{r} \mp 1}$$

vom Mittelpunkte der dunkeln Kugel.

Substituirt man ferner die oben (Gleichungen (a)) gefundenen Werthe von A und a in den beyden Gleichungen

$$F(A, B)^2 = R^2 - A^2 - B^2 \quad \text{und}$$
$$f(a, b)^2 = r^2 - (a-c)^2 - b^2,$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} F(A, B)^2 + B^2 &= R^2 - \frac{R^2}{c^2}(R\mp r)^2 \\ f(a, b)^2 + b^2 &= r^2 - \frac{r^2}{c^2}(r\mp R)^2 \end{aligned}\right\} \ldots (5),$$

und die Gleichungen (a) und (5) sind die Gleichungen der acht Projectionen der vier Berührungscurven in den Ebenen der xy und der xz. Die Gleichungen (a) zeigen, daß diese Curven in einer auf xy senkrechten Ebene stehen, und daß sie vom Anfangspunkte der Coordinaten um die angezeigten Werthe von A und a entfernt sind. Die Gleichungen (5) aber zeigen, daß diese Curven Kreise sind, deren Halbmesser

zum Ausdrucke haben

$$\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{c^2}(R \mp r)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{c^2}(r \mp R)^2}.$$

Ist endlich $x = c + C$, so wird die Gleichung (4)

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{\pm r(c + C) - R \cdot C}{\sqrt{c^2 - (R - r)^2}},$$

welches der Halbmesser des kreisförmigen Schnittes des vollen und des halben Schattens ist., der durch eine Ebene entsteht, die senkrecht auf xy ist, und die um die Größe C von dem Mittelpunkte der dunkeln Kugel entfernt ist.

XVI.

Krümmung der Flächen.

---

§. 119. (**Kugeln, welche eine gegebene Fläche berühren.**) Da zu einer Berührung der Flächen von der zweyten Ordnung, nach §. 115, fünf Bedingungsgleichungen befriedigt werden müssen, so kann eine Kugel, deren allgemeine Gleichung nur vier Constanten enthält, nicht in dem Sinne zur Krümmungskugel einer Fläche verwendet werden, wie wir oben den Kreis zum Krümmungskreis der Curven gebraucht haben, oder man kann im Allgemeinen keine Kugel angeben, die mit einer Fläche rings um den einen Punkt derselben zwey Elemente gemeinschaftlich hätte.

Diese Gleichung der Kugel ist nämlich

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

wo $a\,b\,c$ die Coordinaten ihres Mittelpunktes, und R ihr Halbmesser ist. Die ersten Differentialgleichungen derselben sind

$$x - a + p(z - c) = 0 \quad \text{und}$$
$$y - b + q(z - c) = 0.$$

Behandelt man diese Gleichungen analog mit jenen in §. 91 und §. 95, so erhält man für die drey Constanten a, b, c folgende Werthe:

$$a = x + \frac{pR}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad b = y + \frac{qR}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad c = z - \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Bestimmt man also die Werthe von p, q aus der zwischen x, y und z gegebenen Gleichung der Fläche, und substituirt dann die so erhaltenen Werthe von a, b, c in der Gleichung

$$(x'-a)^2 + (y-b)^2 + (z'-c)^2 = R^2,$$

so erhält man die Gleichung einer Kugel, die mit der gegebenen Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat. In dieser Gleichung der Kugel sind $x' y' z'$ die veränderlichen Größen, und der Halbmesser der Kugel bleibt unbestimmt. Vergleicht man die vorhergehenden zwey Differentialgleichungen mit denen des §. 117, so sieht man, daß die Mittelpunkte aller dieser Kugeln in der Normale der Fläche liegen.

§. 120. **(Betrachtung der Kugel, welche die zwey höchsten Glieder der Entwicklung von z mit einer Fläche gemeinschaftlich hat.)** Wir haben oben (§. 115) gesehen, daß zwey Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung der zweyten Ordnung haben, wenn für sie die Bedingungsgleichung, die eigentlich fünf andern Gleichungen gleichgeltend ist, Statt hat:

$$(p'-p)dx + (q'-q)dy + \tfrac{1}{2}(r'-r)dx^2 + (s'-s)dxdy + \tfrac{1}{2}(t'-t)dy^2 = 0.$$

Den beyden ersten Gliedern dieser Bedingungsgleichung ist bereits durch die Kugel genüge gethan, die wir in §. 119 gefunden haben, wo aber der Halbmesser R derselben, wie man gesehen hat, noch unbestimmt geblieben ist. Man könnte nun in dieser Kugel den Halbmesser R so bestimmen, daß auch die drey folgenden Glieder unserer Bedingungsgleichung verschwinden, oder daß man hat

$$(r'-r) + 2(s'-s)\frac{dy}{dx} + (t'-t)\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Allein durch diese Annahme wird offenbar eine Relation zwischen den Größen dx und dy eingeführt, die doch sonst ganz unbestimmt waren.

In der allgemeinen Gleichung jeder Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist nämlich, wie bereits erinnert wurde, $dz = p\,dx$ das Differential der Ordinate z in dem Durchschnitte MM′ (Fig. 42) der Fläche mit einer der xz parallelen Ebene, und eben so ist $dz = q\,dx$ das Differential der Ordinate z in dem Durchschnitte MN der Fläche mit einer der yz parallelen Ebene. Sucht man aber das Differential der Ordinate für den Durchschnitt MN′R′Q der Fläche mit einer auf xy

senkrechten, übrigens willkürlich gegen die Axe der x stehenden Ebene, so wird diese Ebene unsere Fläche in der krummen Linie MN′ schneiden und die Projektion dieser Curven in der Ebene der xy wird die gerade Linie QR′ seyn. Diese Projektion QR′ wird also zur Gleichung haben

$$y = \alpha x + \beta,$$

und dadurch wird eine Abhängigkeit unter die beyden Coordinaten x und y gebracht, die sonst, für die Fläche im Allgemeinen, nicht Statt hatte. Das Differential dieser Gleichung ist

$$\frac{dy}{dx} = \alpha,$$

und da diese Größe α die Tangente des Winkels bezeichnet, welche die Projektion QR′ mit der Axe der x bildet, so ist durch diese Größe α oder $\frac{dy}{dx}$ die Richtung bestimmt, in welcher man bey der Fläche von einem Punkte derselben zu dem nächstfolgenden Punkte fortgehen muß, um die bestimmte Curve MN′ auf dieser Fläche zu erhalten.

Diesem gemäß drückt also unsere letzte Bedingungsgleichung aus, daß die durch sie bestimmte Kugel die Eigenschaft hat, daß keine andere Kugel zwischen ihr und zwischen der gegebenen Fläche in dem Punkte durchgehen kann, der zu den Coordinaten $x + dx$ und $y + dy$ gehört; oder wenn man die Größe $\frac{dy}{dx} = \omega$ setzt, und dieser Größe ω einen bestimmten Werth gibt, so wird die erwähnte Eigenschaft unserer Kugel für alle diejenigen Punkte gelten, für welche ω denselben Werth hat, d. h. für alle Punkte der Curve MN′, die in dem Durchschnitte einer ihrer Lage nach bestimmten, auf xy senkrechten Ebene, mit der gegebenen Fläche liegen.

Um nun den Halbmesser R dieser Kugel unserer Bedingungsgleichung

$$(r' - r) + 2\,(s' - s)\,\omega + (t' - t)\,\omega^2 = 0$$

gemäß zu bestimmen, so gibt die bereits in §. 119 aufgestellte Gleichung der Kugel

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = R^2,$$

wenn man ihre partiellen Differentialien sucht, da wegen dem gemeinschaftlichen Punkt beyder Flächen $x' = x$, $y' = y$ und $z' = z$ ist, folgende Gleichungen:

$$p' = -\frac{x-a}{z-c}, \quad q' = -\frac{y-b}{z-c},$$

$$r' = \frac{1+p^2}{c-z}, \quad s' = \frac{pq}{c-z}, \quad t' = \frac{1+q^2}{c-z},$$

so daß daher unsere Bedingungsgleichung in die folgende übergeht, wenn man die oben (§. 114) angenommene Bedeutung der Geißen r, s und t beybehält,

$$r + 2\omega s + \omega^2 t = \frac{1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2}{c-z},$$

oder da bereits (§. 119) wegen der Berührung der ersten Ordnung der Kugel mit der Fläche

$$c - z = \frac{-R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

erhalten wurde,

$$R = \frac{-[1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2] \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2s\omega+t\omega^2},$$

und dieß ist der gesuchte Werth des Halbmessers der Kugel, welche die oben erwähnte Eigenschaft hat.

§. 121. (**Bestimmung des größten und kleinsten Werthes dieses Halbmessers R.**) Da in dem vorhergehenden Ausdrucke von R das Verhältniß $\omega = \frac{dy}{dx}$ willkürlich angenommen wurde, so wollen wir denjenigen Werth von ω suchen, für welchen R ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Allein der erwähnte Werth von R kann auch so gestellt werden

$$R = \frac{-[1+\omega^2+(p+q\omega)^2] \cdot \sqrt{1+p^2+p^2}}{r+2s\omega+t\omega^2},$$

und da zugleich

$$c - z = \frac{-R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \text{ist,}$$

so entspricht der größte oder kleinste Werth von R auch zugleich dem größten oder kleinsten Werthe von c. Eliminirt man daher die Größe R aus den beyden vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$1+\omega^2+(p+q\omega)^2 = (c-z)(r+2s\omega+t\omega^2) \ldots \text{(I).}$$

Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf c und ω und setzt dann dc gleich Null, so hat man

$$\omega + (p+q\omega)\, q + (s+t\omega)\,(z-c) = o \;\ldots\; (II),$$

welche Gleichung, durch ω multiplicirt und von (I) subtrahirt, gibt

$$1+p^2 + pq\omega + (r+s\omega)\,(z-c) = o \;\ldots\; (III).$$

Eliminirt man aus (II) und (III) die Größe $z-c$, so erhält man für ω eine Gleichung der Form

$$A\omega^2 + B\omega - C = o \;\ldots\; (IV),$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$A = (1+q^2)\, s - pqt,$$
$$B = (1+q^2)\, r - (1+p^2)t,$$
$$C = (1+p^2)\, s - pqr.$$

Lößt man endlich die zuletzt gefundene Gleichung auf, so hat man

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

und dieser Werth von $\omega = \frac{dy}{dx}$ gehört also unter allen krummen Linien, welche durch den Berührungspunkt in der Fläche gezogen werden können, für jene Curven, welche die größte oder kleinste Krümmung haben. Da A, B, C Funktionen von x und y sind, so wird die letzte Gleichung selbst eine Differentialgleichung für x und y seyn, und sie sowohl, als auch ihre ursprüngliche Gleichung, aus deren Differentiation jene entstanden ist, wird die Gleichung der Projektion jener Curve in der Ebene der xy seyn.

Da der Werth von ω doppelt ist, so sieht man, daß jedem Punkte der Fläche im Allgemeinen zwey solche Curven der größten und kleinsten Krümmung entsprechen werden. Differentiirt man endlich den vorhergehenden Ausdruck von R noch einmal, so findet man leicht, daß in der letzten Gleichung das obere positive Zeichen für den größten und das untere negative für den kleinsten Werth von R gehört, so daß also unter allen Curven, welche durch einen Punkt der Fläche in dieser Fläche gezogen werden können, immer zwey sind, deren eine die größte, die andere aber die kleinste Krümmung hat.

I. Um den Halbmesser dieser beyden ausgezeichneten Curven zu erhalten, wird man den gefundenen Werth von ω in dem oben gegebenen Ausdrucke von R substituiren. Zu diesem Zwecke wird man am bequemsten so verfahren.

Multiplicirt man die Gleichung (II) durch s und (III) durch t, so ist die Differenz dieser beyden Produkte

$$z - c = \frac{(1 + p^2)\, t - p\, q\, s - A\,\omega}{s^2 - r\, t}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den oben gefundenen Werth von ω und setzt der Kürze wegen

$$h = (1 + p^2)\, t + (1 + q^2)\, r - 2\, p\, q\, s,$$

so erhält man

$$z - c = \frac{-h + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\,(r\,t - s^2)},$$

und daher auch

$$R = \frac{\left[-h + \sqrt{B^2 + 4AC}\right] \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{2\,(r\,t - s^2)}.$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2 \quad \text{und} \quad g = r\,t - s^2,$$

so wird

$$B^2 + 4AC = h^2 - 4k^2 \cdot g,$$

so wie

$$z - c = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 \cdot g}}{2g},$$

und man erhält daher für den gesuchten größten und kleinsten Halbmesser

$$R = \frac{k}{2g}\left[-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}\right] = \frac{-2k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4k^2 \cdot g}}.$$

II. Da die Lage der Ebene der $x\,y$ willkürlich ist, so kann man annehmen, daß sie der, die Fläche in dem gegebenen Punkte tangirenden Ebene parallel ist. Unter dieser Voraussetzung wird $p = q = 0$.

Sind aber α und β die zwey Werthe von ω, die der Gleichung

$$A\,\omega^2 + B\,\omega - C = 0$$

entsprechen, d. h. sind α und β die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die beyden Curven in dem gegebenen Punkte der Fläche mit der Axe der x bilden, so ist (Einl. §. 3. I.) die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen jene beyden Curven unter einander in dem gegebenen Punkte bilden, gleich

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{B^2 + 4AC}}{A - C}.$$

Da aber für $p=q=o$ auch $A-C=o$ ist, so ist die Tan-nte des letztgenannten Winkels unendlich oder die beyden Curven der ößten und kleinsten Krümmung der Fläche stehen in ihrem Durch-mittspunkte auf einander senkrecht.

§. 122. (Andere Ableitung des Halbmessers dieser Kugel.) tellt man durch xyz die Coordinaten eines gegebenen Punktes der läche und durch $x'y'z'$ die des Mittelpunktes einer Kugel vor, die rch jenen Punkt der Fläche geht und R zum Halbmesser hat, so ist

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2 \;\ldots\; (1).$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so hat man

$$x-x'+p(z-z')=o \;\ldots\; (2),$$
$$y-y'+p(z-z')=o \;\ldots\; (3),$$

elche beyden Gleichungen, nach §. 117, den Normalen der Fläche n dem gegebenen Punkt angehören.

Geht man aber von diesem Punkte der Fläche zu einem nächst-folgenden in irgend einer willkürlichen Richtung über, so werden die Normalen der Fläche in diesen beyden Punkten nur dann einander schneiden, wenn sich diese beyden Normalen in einer und derselben Ebene befinden, und dann wird dieser Durchschnittspunkt der beyden Normalen derjenige Punkt der ersten Normale seyn, für welchen die Coordinaten $x'y'z'$ sich nicht ändern, während x und y sich ändert. Denn in den Gleichungen (2) und (3) sind $x'y'z'$ die veränderlichen Coordinaten einer und derselben Normale, während die Größen xyz und pq, die zu einen bestimmten Punkt der Fläche gehören, für die-selbe Normale constant und nur dann veränderlich sind, wenn man von einer Normale zu einer anderen übergeht. Differentiirt man also die Gleichungen (2) und (3), indem man $x'y'z'$ als constant betrachtet, so hat man

$$dx+pdz+(z-z')\,dp=o,$$
$$dy+qdz+(z-z')\,dq=o.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $z-z'$, so erhält man

$$dp\,(dy+qdz)=dq\,(dx+pdz) \;\ldots\; (4).$$

Man hat aber, nach §. 124, die allgemeinen Bezeichnungen

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{und}$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

so daß daher die beyden vorhergehenden Gleichungen die folgende Gestalt annehmen

$$dx + p^2 dx + pq\,dy + (z-z')\,(r\,dx + s\,dy) = 0 \ldots (5),$$
$$dy + pq\,dx + q^2 dy + (z-z')\,(s\,dx + t\,dy) = 0 \ldots (6),$$

oder auch, wenn man $\frac{dy}{dx}$ aus der ersten, und $z-z'$ aus der zweyten eliminirt und die oben angezeigte Größe A, B, C und g, h, k beybehält

$$g\,(z-z')^2 + h\,(z-z') + k^2 = 0 \ldots (7),$$
$$A \,.\, \frac{dy^2}{dx^2} + B \,.\, \frac{dy}{dx} - C = 0 \ldots (8).$$

Die vier Gleichungen (2, 3, 5 und 6) gehören für den Durchschnittspunkt der beyden Normalen. Da aber zur Bestimmung der Coordinaten $x'y'z'$ dieses Durchschnittspunktes schon die drey ersten dieser Gleichungen hinreichen, so ist die letzte (6), die keine dieser Coordinaten enthält, nichts anderes, als eine Bedingungsgleichung, welcher genug geschehen muß, damit die beyden nächsten Normalen sich in der That schneiden können. Diese letzte Gleichung gibt also den Werth von $\frac{dy}{dx}$, d. h. die Richtung, in welcher man von einem Punkte der Fläche zu einem anderen gehen muß, damit die Normalen beyder Punkte in einer Ebene liegen und sich daher schneiden.

I. Die Gleichung (5) gibt

$$z-z' = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g},$$

und diesen Werth von $z-z'$ in (2) und (3) substituirt, gibt

$$y-y' = q\left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}\right),$$
$$x-x' = p\left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}\right),$$

und diese Werthe von $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ endlich in der Gleichung (1) substituirt, geben

$$R = \frac{k}{2g}\left[-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}\right]$$

Resultate, die sämmtlich mit jenen des §. 121 übereinstimmen.

II. Dieser Halbmesser R läßt sich auch noch auf folgende Weise finden.

Substituirt man die Werthe von $x'-x$ und $y'-y$ aus den Gleichungen (2) und (3) in

$$R^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$

so erhält man

$$R = (z'-z) \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Eliminirt man aber aus den beyden Gleichungen (5) und (6) die Größe $\frac{dy}{dx}$, so hat man

$$\frac{1+p^2-(z'-z)r}{pq-(z'-z)s} = \frac{pq-(z'-z)s}{1+q^2-(z'-z)t},$$

und wenn man hierin

$$z'-z = R\,(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ setzt, so ist}$$

$$(rt-s^2)R^2 - [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\,R\sqrt{1+p^2+q^2} + (1+p^2+q^2)^2 = 0 \ldots (9),$$

und aus dieser Gleichung findet man den gesuchten doppelten Werth von R, wie zuvor.

§. 123. (Anwendung des vorhergehenden auf besondere Fälle.) I. Die Gleichung des Ellisoids mit drey Axen ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Von dieser Gleichung sind die Werthe von p, q und von r, s, t bereits oben (§. 112, Ex. II) mitgetheilt worden. Substituirt man sie in der Gleichung (4) des §. 122, so erhält man

$$a^2(b^2-c^2)\,xy\,\frac{dy^2}{dx^2} + [b^2(a^2-c^2)\,x^2 - a^2(b^2-c^2)\,y^2 - a^2b^2(a^2-b^2)]\,\frac{dy}{dx} - b^2(a^2-c^2)\,xy = 0,$$

oder einfacher

$$Mxy\,\frac{dy^2}{dx^2} + (x^2 - My^2 - N)\,\frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

wenn man der Kürze wegen setzt

$$M = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} \text{ und } N = \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}.$$

Diese Gleichung gibt also den Werth von $\frac{dy}{dx}$ oder die Richtung, in welcher man auf der gegebenen Fläche fortgehen muß, wenn die nächstfolgenden Normalen sich schneiden sollen, oder, was dasselbe ist, in welcher man fortgehen muß, um in den beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung der Fläche zu bleiben.

Setzt man $a = b$, so daß das Ellisoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch die Umdrehung der Ellise $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ um die Axe c entsteht, so ist $M = 1$ und $N = 0$, also auch jene Gleichung

$$xy \frac{dy^2}{dx^2} + (x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Löst man diese Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ auf, so findet man die zwey Werthe dieser Größe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Die erste dieser Gleichungen gehört für eine gerade Linie, die durch den Anfang der Coordinaten geht, weil das Verhältniß der beyden Größen dy zu dx dasselbe ist, wie das der Größe y zu x. Die zweyte Gleichung aber folgt durch Differentiation des Ausdruckes

$$x^2 + y^2 = m^2,$$

und gehört also für einen Kreis. Jene ist die Projektion aller Meridiane auf die Ebene der xy, und diese ist die Projektion der Parallelkreise der Fläche in derselben Ebene der xy. Beyde Curven sind in der Oberfläche des Rotations-Sphäroids auf einander senkrecht, und zugleich diejenigen, in welchen sich die auf einander folgenden Normalen schneiden. Da in diesem Beyspiele die veränderlichen Größen x und y aus den Wurzelzeichen treten, so finden sich diese beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung von einander unterschieden; wenn dieß nicht der Fall ist, sind beyde nur zwey Äste einer und derselben Curve.

II. In einem zweyten Beyspiele nehmen wir den sogenannten geraden Kegel von kreisförmiger Basis. Ist r der Halbmesser dieser

Basis und $\frac{r}{a}$ die Tangente des Winkels der Seitenlinie des Kegels mit der Axe, so ist die Gleichung des Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{a^2}(z-a)^2.$$

Dieß vorausgesetzt hat man

$$p = \frac{a^2 x}{r^2 (z-a)}, \quad q = \frac{a^2 y}{r^2 (z-a)},$$

$$r = \frac{a^4 y^2}{r^4 (z-a)^3}, \quad s = \frac{-a^4 x y}{r^4 (z-a)^3}, \quad t = \frac{a^4 x^2}{r^4 (z-a)^3}.$$

Setzt man nun, wie in §. 121, II, die Größen $p = q = 0$, so ist

$$A = C = s \quad \text{und} \quad B = r - t.$$

Substituirt man diese Werthe in der oben (§. 121) erhaltenen Gleichung

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

so hat man

$$\omega = \frac{t - r \pm \sqrt{(t-r)^2 + 4s^2}}{2s},$$

oder wenn man darin die so eben gefundenen Ausdrücke von r, s und t setzt,

$$\omega = \frac{y^2 - x^2 \mp \sqrt{x^2 + y^2}}{2xy},$$

und diese Gleichung gibt für $\omega = \frac{dy}{dx}$ die zwey Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{y}{x},$$

und diese zwey Ausdrücke sind den folgenden beyden gleichgeltend

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{und} \quad y = bx,$$

wo a und b constante Größen bezeichnen. Daraus folgt also, daß auf der Oberfläche eines Kegels die beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung, in jedem Punkte des Kegels, durch die Seitenlinie des Kegels und durch den mit der Basis parallelen Kreis ausgedrückt werden.

III. Suchen wir endlich noch den Halbmesser der größten und kleinsten Krümmung für alle die Oberflächen, welche durch die Rota-

tion einer auf der Ebene xy senkrechten Curve um die Axe der z entstanden sind. Diese Oberflächen haben, wie wir bald (§. 131) sehen werden, die Gleichung

$$z = f(x^2 + y^2),$$

wo f irgend eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Sey der Kürze wegen

$$dz = (x\,dx + y\,dy) \,.\, f'(x^2 + y^2) \quad \text{und}$$
$$d \,.\, f'(x^2 + y^2) = (x\,dx + y\,dy) \,.\, f''(x^2 + y^2),$$

wo $f'(x^2 + y^2)$ und $f''(x^2 + y^2)$ wieder andere Funktionen von der Größe $(x^2 + y^2)$ bezeichnen, für welche wir abkürzend bloß f' und f'' schreiben wollen.

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$p = xf', \quad q = yf',$$
$$r = f' + x^2 f'', \quad s = xyf'' \quad \text{und} \quad t = f' + y^2 f''.$$

Sucht man daraus die oben (§. 121, I) angeführten Werthe von g, h und k, so erhält man

$$g = f'^2 + (x^2 + y^2)\, f' f'',$$
$$h = 2f' + (x^2 + y^2)\,(f'^3 + f''),$$
$$k^2 = 1 + (x^2 + y^2)\, f'^2,$$

so wie

$$\sqrt{h^2 - 4k^2 g} = (x^2 + y^2)\,(f'^3 - f'').$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem vorhergehenden Werthe

$$R = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}$$

des größten und kleinsten Krümmungshalbmessers, so findet man, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt,

$$R' = -\frac{1}{f'}\left[1 + (x^2 + y^2)\, f'^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$R'' = -\frac{\left[1 + (x^2 + y^2)\, f'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f' + (x^2 + y^2)\, f''}.$$

Nehmen wir für einen besonderen Fall das Ellisoid, welches durch die Umdrehung der Ellise

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

um die Axe der b entstanden ist, so hat man für die Gleichung desselben

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Dieß vorausgesetzt ist also

$$p=-\frac{b^2x}{a^2z},\quad q=-\frac{b^2y}{a^2z},$$

$$r=-\frac{b^4}{a^4z^3}(a^2-y^2),\quad s=-\frac{b^4xy}{a^4z^3},\quad t=-\frac{b^4}{a^4z^3}(a^2-x^2),$$

also auch

$$f'=-\frac{b^2}{a^2z}\quad \text{und}\quad f''=-\frac{b^4}{a^4z^3},$$

so daß man daher für dieses Ellisoid erhält

$$R'=\frac{a}{b^2}\left[b^4+(a^2-b^2)z^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$R''=\frac{1}{b^4a}\left[b^4+(a^2-b^2)z^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Für $z=0$ hat man $R'=a$, $R''=\frac{b^2}{a}$,

für $z=b$ ist $R'=R''=\frac{a^2}{b}$,

für $a=b$ endlich ist $R'=R''=a$.

Man kann noch bemerken, daß die Normale N der erzeugenden Ellise ist (§. 98)

$$N=\frac{1}{a}\left[b^4+(a^2-b^2)z^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

so daß man daher hat

$$R'=\frac{a^2}{b^2}\,.\,N\quad \text{und}\quad R''=\frac{a^2}{b^4}N^3.$$

Wir haben aber ebendaselbst (§. 98) gesehen, daß der Krümmungshalbmesser ρ der erzeugenden Ellise

$$\rho=\frac{N^3}{p^2}=\frac{a^2N^3}{b^4}$$

ist, so daß man also hat

$$R'=\frac{a^2}{b^2}N\quad \text{und}\quad R''=\rho.$$

IV. Bemerken wir noch zum Schlusse dieses Gegenstandes, daß sich, dem Vorhergehenden zu Folge, jeder Punkt einer gegebenen Oberfläche auf zwey solchen Curven befindet, von welchen jene, die

dem kleinsten Werthe von R entspricht, die Curve der größten Krümmung, und die dem größten Werthe von R entsprechende, die Curve der kleinsten Krümmung heißt. Haben diese beyden Werthe von R dasselbe Zeichen, so sind jene beyden Curven in demselben Sinne gekrümmt, so wie im entgegengesetzten, wenn sie verschiedene Zeichen haben.

Wenn man endlich zwischen der Gleichung der gegebenen Fläche, und zwischen den vier Gleichungen (3), (5), (6) und (8) des §. 122 die vier Größen x, y, z und $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so erhält man, durch die Coordinaten $x'y'z'$ ausgedrückt, die Gleichung derjenigen Oberfläche, welche der Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise jener Curvenpaare ist, die auf der gegebenen Fläche gezogen werden können, und diese neue Fläche wird im Allgemeinen aus zwey Theilen bestehen, von welchen der eine alle Mittelpunkte der größten Krümmung, und der andere alle Mittelpunkte der kleinsten Krümmung enthalten wird.

XVII.

Tangenten und Krümmungskreise der Curven von doppelter Krümmung.

§. 124. (Verschiedene Ordnungen der Berührung dieser Curven.) Da eine einzelne Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen für eine Oberfläche gehört, so gehören zwey solche Gleichungen, wenn sie zusammen betrachtet, oder als coexistirend angesehen werden, für den Durchschnitt zweyer Flächen. Dieser Durchschnitt wird im Allgemeinen eine krumme Linie seyn, deren Elemente nicht in einer und derselben Ebene liegen, d. h. sie wird eine krumme Linie von doppelter Krümmung seyn.

Wenn aber ein Gegenstand, wie z. B. eine solche Curve von doppelter Krümmung, durch zwey Gleichungen ausgedrückt wird, so kann er offenbar auch durch zwey willkürliche Combinationen dieser Gleichungen ausgedrückt werden. Am einfachsten wird man im Allgemeinen diese beyden Gleichungen darstellen, wenn man aus der ersten z. B. die

Größe z, und aus der zweyten die Größe y eliminirt. Dadurch erhält man zwey andere Gleichungen der Form

$$y = \varphi'(x) \quad \text{und} \quad z = \psi(x);$$

die ebenfalls dieselbe Curve von doppelter Krümmung, und zwar so ausdrücken, daß die erste $y = \varphi(x)$ die Projection jener Curve in der coordinirten Ebene der xy, und die zweyte $z = \varphi(x)$ die Projection derselben in der Ebene der xz gibt.

Man sieht, daß in einem solchen Gleichungspaare nur mehr eine einzige der drey veränderlichen Größen, z. B. die Größe x unabhängig ist, da für jeden gegebenen Werth von x auch das y durch die erste, und das z durch die zweyte Gleichung bestimmt wird. Läßt man also x in $x + h$ übergehen, so erhält man für die beyden andern Coordinaten die Werthe

$$y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \quad \text{und}$$

$$z + h\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots$$

Eben so wird man für eine zweyte Curve, deren Gleichungen zwischen den Coordinaten x', y', z' und Constanten gegeben ist, wenn man ebenfalls x' in $x' + h$ übergehen läßt, für die beyden anderen Coordinaten

$$y' + h\frac{dy'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y'^2}{dx'} + \ldots \quad \text{und}$$

$$z' + h\frac{dz'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2z'}{dx'^2} + \ldots$$

Sollen nun diese beyden Curven einen Punkt, zu welchem die Coordinaten x, y, z gehören, gemeinschaftlich haben, so gibt dieß die drey Bedingungsgleichungen

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Sollen sie weiter, in diesem Punkte, eine Berührung der ersten Ordnung haben, so wird dieß durch die zwey neuen Bedingungsgleichungen ausgedrückt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz'}{dx'},$$

und eben so wird man für eine Berührung der zweyten Ordnung nebst den fünf vorhergehenden Bedingungsgleichungen, noch die zwey folgenden haben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z'}{dx'^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Als Beyspiel für solche Curven von doppelter Krümmung hat man die Gleichungen $y^2 = ax$ und $z^2 = by$ für den Durchschnitt von zwey parabolischen Cylindern, von welchen der eine auf der Ebene der xy, und der andere auf yz senkrecht steht.

§. 125. (**Tangenten dieser Curven**). Um die Gleichungen der geradlinigen Tangente einer Curve von doppelter Krümmung, deren Gleichungen

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad z = \psi(x)$$

sind, zu finden, nehme man für die gesuchten Gleichungen dieser Tangente die folgenden an:

$$y' = ax' + \alpha,$$
$$z' = bx' + \beta.$$

Dieß vorausgesetzt, geben die drey ersten der in §. 124 angeführten Bedingungen, d. h. erstens die Bedingung, daß die Tangente durch den Punkt x, y, z der Curve gehen soll, die zwey Gleichungen

$$y' - y = a(x' - x),$$
$$z' - z = b(x' - x),$$

und eben so zweytens die Bedingung, daß die Gerade mit der Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, gibt

$$a = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad b = \frac{dz}{dx};$$

woraus daher sofort folgt, daß die gesuchten Gleichungen der Tangente der Curve sind:

$$\left.\begin{aligned} y' - y &= (x' - x)\frac{dy}{dx} \\ z' - z &= (x' - x)\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\}.$$

I. Am einfachsten ist es, diese Curven von doppelter Krümmung als Polygone von unendlich kleinen Seiten anzusehen, von welchen nur immer je zwey nächste in einer Ebene liegen; dann sind die Tangenten dieser Curven die Verlängerungen dieser Seiten des Polygons. Nennt man x, y, z die Coordinaten des Anfangspunkts einer dieser Seiten, so sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten des Endpunkts desselben. Nennt man dann ds den Abstand dieser beyden Punkte, d. h. die Länge irgend eines Elements der Curve, so werden die Größen dx, dy, dz die Projectionen von ds auf den Axen der

x, y, z seyn. Nennt man also auch α, β, γ die Winkel, welche die Tangente mit diesen drey Axen der x, y, z bildet, so hat man

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos.\beta = \frac{dy}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\gamma = \frac{dz}{ds},$$

und auch durch diese Gleichungen läßt sich die Richtung der Tangente für jeden Punkt der Curve bestimmen. Sie können leicht auf die vorhergehenden Gleichungen der Tangente gebracht werden, da man hat

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{z' - z}{x' - x} = \frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}.$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die gefundenen Werthe von $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$ und $\cos.\gamma$, so erhält man die vorhergehenden Gleichungen wieder.

II. Da zwischen diesen Cosinus die Bedingungsgleichung (Einl. §. 9) besteht:

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1,$$

so hat man auch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

für das Element des Bogens der Curve.

§. 126. **(Normalebene dieser Curve.)** Eine Normale auf eine Curve von doppelter Krümmung zu ziehen, ist eine unbestimmte Aufgabe, da es unzählige Gerade gibt, welche durch einen gegebenen Punkt der Curve auf der Tangente derselben senkrecht stehen. Aber der Inbegriff aller dieser Geraden bildet eine auf die Tangente senkrechte Ebene, oder die Normalebene der Curve. Um sie zu bestimmen, hat man sofort (nach §. 11, I.)

$$(x - x')\cos.\alpha + (y - y')\cos.\beta + (z - z')\cos.\gamma = 0.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$ und $\cos.\gamma$, so erhält man

$$(x - x')dx + (y - y')dy + (z - z')dz = 0$$

für die gesuchte Gleichung der Normalebene, die durch den Punkt xyz der Curve geht, und deren veränderliche Coordinaten $x'y'z'$ sind.

§. 127. **(Krümmungsebene dieser Curve.)** Diejenige Ebene, welche durch zwey nächstfolgende Tangenten einer Curve von doppelter Krümmung geht, heißt die Krümmungsebene dieser Curve.

Die Gleichung derselben in dem Punkte der Curve, dessen Coordinaten x, y, z′ sind, wird die Form haben:

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y').$$

Differentiirt man diese Gleichung zweymal in Beziehung auf x und y, so erhält man, wenn man kein erstes Differential constant voraussetzt:

$$dz = A\,dx + B\,dy,$$
$$d^2z = A\,d^2x + B\,d^2y,$$

woraus folgt:

$$A = \frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \text{ und } B = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,$$
$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

so erhält man für die gesuchte Gleichung der Krümmungsebene, oder wie sie auch genannt wird, der Osculationsebene

$$(x' - x)X + (y' - y)Y + (z' - z)Z = 0,$$

in welcher man eines der ersten Differentialien, z. B. dx, als constant annehmen, also $d^2x = 0$ setzen wird. Diese Gleichung gibt ein Mittel, zu entscheiden, ob eine Curve von einfacher oder von doppelter Krümmung ist, da im ersten Falle die Osculationsebene für alle Punkte der Curve gelten oder dieselbe bleiben muß.

§. 128. (**Krümmungskreise dieser Curve.**) Um denjenigen Kreis zu finden, der mit der Curve von doppelter Krümmung eine Berührung der zweyten Ordnung hat, werden wir nicht nur die Größe dieses Kreises oder seinen Halbmesser und den Ort seines Mittelpunkts, sondern auch die Lage seiner Ebene im Raume bestimmen müssen, und daher für die Gleichung dieses Kreises das System einer Kugel, und eine durch den Mittelpunkt dieser Kugel gelegten Ebene nehmen. Ist ρ der Halbmesser dieser Kugel, und sind a, b, c die den Größen x, y, z parallelen Coordinaten des Mittelpunkts derselben, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \rho^2.$$

Die Gleichung einer Ebene aber, die durch den Mittelpunkt dieser Kugel geht, wird die Form haben:

$$x - a + (y - b) A + (z - c) B = o,$$

wo A und B zwey Constanten sind, welche die Lage dieser Ebene im Raume ausdrücken.

Soll der Kreis, der durch den Schnitt dieser Ebene mit der Kugel gegeben ist, mit einer Curve von doppelter Krümmung eine Berührung der zweyten Ordnung haben, oder soll ρ der Krümmungshalbmesser der Curve seyn, so müssen, nach dem Vorhergehenden, nicht nur die Werthe von x, y, z in beyden Gleichungen, sondern auch ihre ersten und zweyten Differentialien mit jenen der gegebenen Curve identisch seyn. Differentiirt man daher diese beyden Gleichungen zweymal, ohne irgend ein Differential als constant vorauszusetzen, so erhält man:

$$(x - a)\, dx + (y - b)\, dy + (z - c)\, dz = o,$$

$$dx + A\, dy + B\, dz = o,$$

$$(x - a)\, d^2x + (y - b)\, d^2y + (z - c)\, d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = o,$$

$$d^2x + A\, d^2y + B\, d^2z = o.$$

Die vierte und sechste dieser Gleichungen geben sofort, wenn man die vorhergehende Bezeichnung der Größen X, Y und Z beybehält,

$$A = \frac{Y}{X} \text{ und } B = \frac{Z}{X}.$$

Substituirt man diese Werthe von A und B in der zweyten jener Gleichungen, so gibt die zweyte, dritte und fünfte, welche Gleichungen bloß die Größen a, b, c enthalten, wenn man wieder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

setzt, nach einigen Reductionen:

$$a - x = \frac{(Y\, dz - Z\, dy)\, ds^2}{X^2 + X^2 + Z^2},$$

$$b - y = \frac{(Z\, dx - X\, dz)\, ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$c - z = \frac{(X\, dy - Y\, dx)\, ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

und durch diese drey Gleichungen werden die Coordinaten a, b, c des Mittelpunkts des Krümmungskreises bestimmt. Substituirt man endlich diese Werthe von (a—x), (b—y) und (c—z) in der vorhergehenden Gleichung

$$\rho^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

so erhält man den Krümmungshalbmesser ρ durch folgenden Ausdruck:

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $z = c = 0$, so ist auch $X = Y = 0$, und man erhält die analogen Ausdrücke der Größen a, b und ρ für ebene Curven, die wir oben (§. 95) gefunden haben.

I. In den vorhergehenden Ausdrücken ist kein Differential constant angenommen worden. Setzt man aber ds constant, so ist

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0, \quad \text{also auch}$$

$$Ydz - Zdy = ds^2 d^2x,$$

$$Zdx - Xdz = ds^2 d^2y,$$

$$Xdy - Ydx = ds^2 d^2z \quad \text{und}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2),$$

so daß man daher für die vier vorhergehenden Bestimmungsstücke erhält

$$a - x = \frac{ds^2 d^2x}{d^2x^2 + d^2y^4 + d^2z^2},$$

$$b - y = \frac{ds^2 d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2},$$

$$c - z = \frac{ds^2 d^2z}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} \quad \text{und}$$

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

II. Man kann diesen Werth von ρ noch auf folgende einfache Art finden, indem man zuerst den Winkel ω zweyer nächster Tangenten oder den Contingenzwinkel der Curve sucht (vergl. §. 96).

Sind nämlich A, B, C die Cosinus der Winkel, welche die erste Tangente der Curve mit den Axen der x, y, z bildet, also auch

$$A + dA, \quad B + dB, \quad C + dC$$

die analogen Winkel der nächstfolgenden Tangente, so hat man (Einl. §. 9, I.)

$$\cos.\,\omega = A(A + dA) + B(B + dB) + C(C + dC),$$

und da die drey Coordinaten unter sich rechtwinklig sind, so ist (ebendaselbst)

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad \text{und}$$

$$(A + dA)^2 + (B + dB)^2 + (C + dC)^2 = 1,$$

oder auch

$$AdA + BdB + CdC = -\tfrac{1}{2}(dA^2 + dB^2 + dC^2).$$

Allein der vorhergehende Ausdruck von $\cos.\omega$ gibt auch

$$\sin.^2\omega = -2(AdA + BdB + CdC) - (AdA + BdB + CdC)^2,$$

so daß man daher hat, wenn man die vierten und höheren Potenzen von dA, dB, dC wegläßt:

$$\sin.^2\omega = dA^2 + dB^2 + dC^2.$$

Es ist aber (§. 125, I.)

$$A = \frac{dx}{ds},\ B = \frac{dy}{ds},\ C = \frac{dz}{ds};$$

also auch, wenn man den Bogen statt dem Sinus nimmt:

$$\omega^2 = \left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

und dieß ist der gesuchte Ausdruck des Winkels der Contingenz der Curve. Da nun, wenn wieder ρ den Krümmungshalbmesser der Curve bezeichnet,

$$\rho = \frac{ds}{\omega} \text{ ist,}$$

so hat man auch

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

wie zuvor.

III. Wenn man in der vorhergehenden Gleichung

$$\omega^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2$$

die Werthe von $A = \frac{dx}{ds}$, $B = \frac{dy}{ds}$, $C = \frac{dz}{ds}$ (aus §. 125, I.) substituirt, so hat man

$$dA = \frac{ds^2 d^2x - dx\, ds\, d^2s}{ds^3},$$

oder da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ und}$$
$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z \text{ ist,}$$

$$dA = \frac{dy}{ds^3}(dy\, d^2x - dx\, d^2y) + \frac{dz}{ds^3}(dz\, d^2x - dx\, d^2z),$$

oder nach der in §. 127 eingeführten Bezeichnung

$$dA = \frac{Ydz - Zdy}{ds^3}, \text{ und eben so}$$

$$dB = \frac{Zdx - Xdz}{ds^3},$$

$$dC = \frac{X dy - Y dx}{ds^3},$$

und daher, wenn man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdru
von ω substituirt:

$$\omega = \frac{1}{ds^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ein anderer Ausdruck des Winkels der Contingenz.

IV. Nennt man eben so A' B' C' die Cosinus der Winkel, wel
die Normale der Curve mit der Osculationsebene (§. 127) derselben b
det, so hat man

$$A' = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$B' = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$C' = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Nennt man aber θ den Winkel, welchen zwey nächstfolgende Os
culationsebenen unter sich bilden, oder was dasselbe ist, nennt man
den Winkel zweyer nächster Normalen der Curve, so hat man wiede
wie zuvor,

$$\theta^2 = (dA')^2 + (dB')^2 + (dC')^2.$$

Man pflegt diesen Winkel θ zweyer nächster Osculationsebene
den Flexionswinkel der Curven zu nennen, und man sieht, da
sein Ausdruck in x, y, z die dritten Differentialien dieser Coordinate
enthält.

V. Um auf die vorhergehenden allgemeinen Ausdrücke ein Bey
spiel anzuwenden, sey die Curve von doppelter Krümmung gegeben
deren Gleichungen sind

$$y^2 = ax \quad \text{und} \quad z^2 = a^2 - y^2.$$

Diese Curve gehört demnach für den Durchschnitt eines paraboli
schen und eines kreisförmigen Cylinders. Die Gleichungen derselben
geben, wenn man dx constant setzt,

$$dy = \frac{a\,dx}{2y}, \qquad dz = -\frac{a\,dx}{2z},$$

$$d^2y = -\frac{a^2 dx^2}{4y^3}, \qquad d^2z = -\frac{a^2 dx^2}{4z^3} \quad \text{und}$$

$$ds^2 = (a^4 + 4y^2z^2)\frac{dx^2}{4y^2z^2}.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$X = \frac{a^5 dx^3}{8y^3 z^3}, \quad Y = -\frac{a^2 dx^3}{4z^3}, \quad Z = -\frac{a^2 dx^3}{4y^3},$$

o auch

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{a^2 dx^3}{8y^3 z^3} \sqrt{a^6 + 4y^6 + 4z^6},$$

d daher der gesuchte Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{(a^4 + 4y^2 z^2)^3}{a^6 + 4y^6 + 4z^6}}.$$

XVIII.
Erzeugung der Flächen.

§. 129. (Cylindrische Flächen.) Ein Cylinder, in der allge- einsten Bedeutung des Worts, entsteht durch die Bewegung einer ge- aden Linie, die während ihrer Bewegung einer anderen, unbewegli- hen Geraden, immer parallel bleibt. Seyen die Gleichungen dieser rzeugenden Geraden in irgend einer Lage derselben

$$x = az + \alpha \quad \text{und} \quad y = bz + \beta.$$

In diesen Gleichungen sind die Größen a und b constant, die bey- en andern Größen α und β aber sind entweder zugleich constant, oder ugleich veränderlich; also muß auch jede derselben eine Funktion der anderen seyn, oder man muß haben $\beta = \varphi\alpha$, d. h.:

$$y - bz = \varphi(x - az) \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so hat man

$$b\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\varphi' + a\left(\frac{dz}{dx}\right) . \varphi' \quad \text{und}$$

$$1 - b\left(\frac{dz}{dy}\right) = -a\left(\frac{dz}{dy}\right) . \varphi',$$

wo φ' eine andere Funktion der Größe $(x - az)$ ausdrückt. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe φ', so hat man

$$1 = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

und die Gleichung (I) sowohl, als auch ihre Differentialgleichung (II) kann als die allgemeine Gleichung der Cylinder angesehen werden, welches auch diejenige Curve seyn mag, durch welche die erzeugende Gerade während ihrer Bewegung gehen soll, eine Curve, welche wir die leitende Curve nennen wollen.

I. Wenn man die Gleichungen der erzeugenden und die der leitenden Linie kennt, so kann man die cylindrische Fläche finden, welche durch diese Bewegung der erzeugenden Linie entsteht. Sind nämlich $U = o$ und $V = o$ die gegebenen Gleichungen der leitenden Curve, und sind, wie zuvor, die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x - az = \alpha \quad \text{und} \quad y - bz = \varphi\alpha,$$

so wird man aus diesen vier Gleichungen die drey Größen x, y, z eliminiren, und als Resultat dieser Elimination eine Gleichung zwischen α und $\varphi\alpha$ finden, wodurch die Form dieser Funktion $\varphi\alpha$ bestimmt wird.

Ex. Ist die leitende Curve ein Kreis in der Ebene der xy, dessen Halbmesser r, und dessen Coordinaten des Mittelspunkts A und B sind, so hat man für die beyden Gleichungen $U = o$ und $V = o$ der leitenden Curve

$$z = o \quad \text{und}$$
$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2.$$

Verbindet man damit jene zwey Gleichungen der erzeugenden Geraden, so gibt die erwähnte Elimination

$$(\alpha - A)^2 + (\varphi\alpha - B)^2 = r^2.$$

Substituirt man aber in dieser Gleichung für α und $\varphi\alpha$ die vorigen Werthe $x - az$ und $y - bz$, so erhält man

$$(x - az - A)^2 + (y - bz - B)^2 = r^2,$$

und dieß ist die gesuchte Gleichung des Cylinders.

II. Wäre die erzeugende Gerade und irgend eine Fläche $W = o$ gegeben, und sucht man den Cylinder, welcher diese Fläche ringsum berührt, so wird man aus der Gleichung $W = o$ die partiellen Differentialien von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ suchen, und sie in der allgemeinen Gleichung (II) des Cylinders substituiren, wodurch man eine Gleichung $T = o$ erhält. Behandelt man dann diese beyden Gleichungen $W = o$ und $T = o$, wie vorhin die Gleichungen $U = o$ und $V = o$, so erhält

man die gesuchte Gleichung des die Fläche $W = 0$ umschließenden Cylinders.

Ex. Ist die gegebene Fläche ein Ellipsoid, so hat man

$$W = 0 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1,$$

also auch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{C^2 x}{A^2 z}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{C^2 y}{B^2 z}.$$

Soll nun die erzeugende Gerade in einer der xy parallelen Ebene liegen, so werden ihre beyden Gleichungen seyn:

$$x = \alpha \quad \text{und} \quad y = bz + \varphi\alpha;$$

also wird auch die allgemeine Gleichung (II) des Cylinders seyn:

$$1 = b\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{oder}$$

$$T = 0 = 1 + \frac{bC^2 y}{B^2 z}.$$

Diesem gemäß, haben wir also die folgenden vier Gleichungen:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0, \quad bC^2 y + B^2 z = 0,$$

$$x = \alpha, \qquad y = bz + \varphi\alpha.$$

Eliminirt man daraus die Größen x, y, z, so erhält man

$$A^2 (\varphi\alpha)^2 = (A^2 - \alpha^2)(B^2 + b^2 C^2);$$

also ist auch die gesuchte Gleichung des das Ellipsoid umschließenden Cylinders

$$A^2 (y - bz)^2 = (A^2 - x^2)(B^2 + b^2 C^2).$$

Bemerken wir noch, daß man, wenn man die vorhergehende allgemeine Gleichung (II) des Cylinders noch einmal differentiirt, erhält:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $\frac{a}{b}$, so hat man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2,$$

und auch diese Gleichung muß einer Fläche angehören, die durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht; allein diese Bewegung ist nicht

mehr an ihren früheren Parallelismus gebunden, da diese Gleichung von a und b ganz unabhängig ist (vergl. §. 113).

§. 130. (Conische Flächen.) Eine conische Fläche wird durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, die immer durch einen gegebenen festen Punkt, und durch eine gegebene krumme Linie, die leitende Curve, geht.

Sind a, b, c die Coordinaten des festen Punkts, so werden die Gleichungen der erzeugenden Geraden die Form haben:

$$x - a = \alpha (z - c) \quad \text{und} \quad y - b = \beta (z - c),$$

und man wird, wie in §. 129, schließen, daß $\beta = \varphi \alpha$ eine Funktion von α seyn muß, woraus sofort folgt, daß die allgemeine Gleichung der conischen Flächen

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi \left(\frac{x - a}{z - c} \right) \quad \ldots \quad \text{I},$$

und daß ihre, eben so allgemeine Differentialgleichung ist:

$$c - z = (a - x) \left(\frac{dz}{dx} \right) + (b - y) \left(\frac{dz}{dy} \right) \quad \ldots \quad \text{II}.$$

I. Sind also die Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ der leitenden Curve gegeben, so wird man aus ihnen und aus den beyden Gleichungen

$$\frac{x - a}{z - c} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{y - b}{z - c} = \varphi \alpha$$

die Größen x, y, z eliminiren, und dadurch die Gleichung des Kegels erhalten, der durch diese Bewegung der erzeugenden Geraden entsteht.

Ex. Ist die erzeugende Gerade ein Kreis des Halbmessers r, der in einer der Ebene xy parallelen, und von ihr um die Größe C abstehenden Entfernung liegt, und dessen Coordinaten des Mittelpunkts A und B sind, so hat man für die Gleichungen der leitenden Curve

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2 \quad \text{und} \quad z = C.$$

Verbindet man damit die beyden vorhergehenden Gleichungen der erzeugenden Geraden, so findet man

$$(A - a - C\alpha)^2 + (B - b - C\varphi\alpha)^2 = r^2,$$

und die gesuchte Gleichung des Kegels ist

$$[(a - A) z + (x - a) C]^2 + [(b - B) z + (y - b) C]^2 = r^2 z^2.$$

II. Um aber die Gleichung desjenigen Kegels zu erhalten, der

eine gegebene Fläche $W = o$ ringsum berührt, wird man die Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ aus dieser Gleichung in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung (II) des Kegels substituiren, wodurch man eine Gleichung $T = o$ erhält, und mit diesen beyden Gleichungen $W = o$, $T = o$ wird man, wie zuvor mit den Gleichungen $U = o$, $V = o$ verfahren.

Ex. Sey die gegebene Fläche eine Kugel des Halbmessers r, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so ist

$$W = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2.$$

Dieß gibt

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z},$$

also auch, mittelst der Gleichung (II),

$$T = o = (z - c)\, z + x^2 + y^2 = o.$$

Ist aber der feste Punkt irgendwo in der Axe der z, so ist $a = b = o$, und man hat daher für die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\frac{x}{z - c} = \alpha, \quad \frac{y}{z - c} = \varphi\alpha.$$

Die Combination dieser vier Gleichungen gibt

$$\alpha^2 + (\varphi\alpha)^2 = \frac{r^2}{c^2 - r^2},$$

also ist auch die Gleichung des gesuchten Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2 . (z - c)^2}{c^2 - r^2}.$$

Ist der feste Punkt ein leuchtender Punkt, so ist die Curve, in welcher sich die gegebene Fläche und der Kegel berührt, und deren Gleichungen sind $W = o$ und $T = o$, diejenige Curve, welche auf der gegebenen Fläche den beleuchteten Theil von dem beschatteten trennt. Ist aber der feste Punkt das Auge des Beobachters, so ist jene Berührungscurve der scheinbare Umfang, unter welchem dem Auge jene Fläche erscheint.

Differentiirt man endlich auch hier die Gleichung (II) noch einmal, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right)^2,$$

wie zuvor, für eine Fläche, die durch die willkürliche Bewegung einer geraden Linie entstanden ist.

§. 131. (**Rotationsflächen.**) Eine Rotationsfläche entsteht durch die Drehung einer Curve um eine feste Gerade. Sind

$$x = Az + a \quad \text{und} \quad y = Bz + b$$

die Gleichungen dieser festen Geraden oder der Rotationsaxe, so wird die Gleichung einer, auf diese Axe senkrechten Ebene (nach Einleit. §. 11, I.) die Form haben:

$$Ax + By + z = \alpha.$$

Eine Kugel aber, deren Mittelpunkt in dem Punkte liegt, in welchem die Rotationsaxe die Ebene der xy schneidet, und deren Halbmesser β ist, wird zur Gleichung haben:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \beta^2,$$

und jene Ebene sowohl, als auch diese Kugel wird die gesuchte Rotationsfläche immer in einem Kreise schneiden, woraus sofort wieder folgt, daß β eine Funktion von α, oder daß $\beta^2 = \varphi\alpha$ seyn wird, das heißt, daß man hat

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi(Ax + By + z) \ldots (I),$$

und dieß ist die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen. Die ihr gleichgeltende Differentialgleichung aber ist

$$(b - y + Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (a - x + Az)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+ A(b - y) - B(a - x) = 0 \ldots (II).$$

Ist für einen speciellen Fall die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, so ist $A = B = a = b = 0$, und man hat daher

$$x^2 + y^2 = \varphi z \quad \ldots \quad (I') \quad \text{und}$$
$$x\left(\frac{dz}{dy}\right) - y\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \ldots \quad (II').$$

I. Sind wieder $U = 0$, $V = 0$ die gegebenen Gleichungen einer Curve, die um eine gegebene Axe rotiren soll, so wird man aus der Verbindung dieser Gleichungen mit den beyden folgenden

$$Ax + By + z = \alpha \quad \text{und}$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi\alpha$$

die Gleichung der gesuchten Rotationsfläche, wie zuvor, ableiten.

Ex. Ist diese Curve eine Ellipse in der Ebene der xz, deren Halbaxen m und n sind, und deren Mittelpunkt von dem Anfang der Coordinaten um die Größe $x = p$ entfernt ist, so sind die Gleichungen dieser Ellipse

$$\left(\frac{x-p}{m}\right)^2 + \left(\frac{z}{n}\right)^2 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad y = 0.$$

Ist die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\alpha \quad \text{und} \quad z = \alpha,$$

woraus man sofort für die gesuchte Rotationsfläche findet:

$$p + \frac{m}{n}\sqrt{n^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

für $p = 0$ erhält man

$$\frac{x^2 + y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

für die Fläche, welche durch Rotation der Ellipse um die Axe n entsteht. Ist $p = m$, so hat man

$$mn + m\sqrt{n^2 - z^2} = n\sqrt{x^2 + y^2}$$

für die Fläche, welche durch die Rotation der Ellipse um den Scheitel der Axe m entsteht. Setzt man in der letzten Gleichung $m = n$, so erhält man

$$m + \sqrt{m^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oder

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4m^2(x^2 + y^2)$$

für die Fläche, welche durch die Rotation eines Kreises des Halbmessers m um eine Axe entsteht, welche den Kreis am Endpunkte eines seiner Durchmesser berührt.

Wir haben bereits oben (§. 113) auf die große Allgemeinheit der Gleichungen mit partiellen Differentialien aufmerksam gemacht. Die Gleichung einer Oberfläche, die durch die Rotation eines Kreises des Halbmessers a um seinen Durchmesser entsteht, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Das Differential dieser Gleichung

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

aber drückt alle die so entstandenen Oberflächen aus, welches auch der Halbmesser des sie erzeugenden Kreises seyn mag. Allein die Gleichung

$$y\left(\frac{dz}{dx}\right) - x\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

die, wie wir gesehen haben, aus der endlichen Gleichung

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

entstanden ist, drückt bloß aus, daß die Fläche durch die Rotation irgend einer Curve, deren Ebene auf jener der xy senkrecht ist, um die Axe der z entstanden ist, ohne etwas über die Natur, Größe und Lage dieser Curve festzusetzen, die daher auch ganz willkürlich, selbst discontinuirlich und sogar völlig gesetzlos seyn kann.

§. 132. (**Wendelflächen.**) So werden diejenigen Flächen, analog mit unsern Wendeltreppen, genannt, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die immer durch die Axe der z und durch eine gegebene Curve gehend, der Ebene der xy parallel bleibt.

Diese Fläche wird die Eigenschaft haben, daß jede durch die Axe der z gelegte Ebene jene Fläche in einer der xy parallelen Geraden schneidet. Die Gleichung einer solchen Ebene ist aber

$$y = ax,$$

und die einer der xy parallelen Geraden ist

$$z = b.$$

Da auch hier wieder die Größen a und b von einander abhängig seyn müssen, so hat man für die Gleichung dieser Fläche

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad \text{I},$$

oder die Differentialgleichung derselben

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{II}.$$

Ex. I. Ist die leitende Curve ein auf xy senkrechter Kreis des Halbmessers r, und liegt der Mittelpunkt dieses Kreises in der Axe der x vom Anfangspunkte um die Größe c entfernt, so sind die Gleichungen dieses Kreises

$$x = c \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 = r^2.$$

Verbindet man sie mit den folgenden

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{und} \quad z = \varphi a,$$

so erhält man, wie zuvor, für die Gleichung unserer Fläche

$$\frac{c^2 y^2}{x^2} = (r^2 - z^2),$$

die bekanntlich von manchem unserer Gewölbe gebildet wird.

Ex. II. Sey die leitende Curve die Schraubenlinie, das heißt, eine Gerade, die auf der Oberfläche eines senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Basis aufgewickelt ist. Ist r der Halbmesser dieser kreisförmigen Basis, und ist die Axe des Cylinders zugleich die Axe der z, und ist endlich die Gleichung der aufzuwindenden Geraden, so lange sie noch in der Ebene der yz liegt,

$$y = \frac{r}{A} . z,$$

so sind die Gleichungen der Schraubenlinie

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und}$$

$$z = A . \text{arc. sin.} \frac{x}{r}.$$

Verbindet man sie mit den zwey vorhergehenden Gleichungen

$$y = ax \quad \text{und} \quad z = \varphi a,$$

so erhält man für die gesuchte Gleichung unserer Fläche

$$z = A . \text{arc. tang.} \frac{x}{y} \quad \text{oder}$$

$$x = y \text{ tang.} \frac{z}{A}.$$

§. 133. (**Einhüllende Flächen.**) Sey U=o die Gleichung einer Fläche zwischen xyz und einer constanten Größe ω. Gibt man dieser Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man eine Folge von Flächen, deren jede von der anderen nur durch ihren besondern Werth von ω verschieden ist. Die Reihe aller dieser Flächen aber wird durch eine andere Fläche begränzt werden, von welcher letzteren alle jene umschlossen und berührt werden, und die wir daher die einhüllende Fläche nennen wollen.

Gibt man in der Gleichung der eingehüllten Fläche U=o der Größe ω den nächstfolgenden Werth $\omega + d\omega$, so erhält man die Gleichung der nächstfolgenden eingehüllten Fläche, die in Gestalt und Lage von der vorhergehenden nur unendlich wenig verschieden seyn, und dieselbe in irgend einer Curve schneiden wird. Diese Curve wird die ge-

meinschaftliche Berührungslinie der beyden eingehüllten Flächen mit ihrer einhüllenden seyn, und die Punkte dieser Curve werden diejenigen Punkte der ersten Fläche $U=o$ seyn, für welche die Werthe von xyz sich nicht ändern, während ω in $\omega + d\omega$ übergeht. Das heißt also: Differentiirt man die Gleichung $U=o$ bloß in Beziehung auf ω, so gehört die resultirende Gleichung für jene Curve, und da diese Curve nothwendig auf der ersten eingehüllten Fläche liegt, so sind die beyden Gleichungen dieser Curve, in welcher sich zwey nächste eingehüllte Flächen schneiden, oder in welcher zwey nächste eingehüllte Flächen von der einhüllenden berührt werden:

$$U = o \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

$$\left(\frac{dU}{d\omega}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (II).$$

Wir wollen diese Curve die Charakteristik der einhüllenden Fläche nennen.

Gibt man also in diesen beyden Gleichungen der Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man alle auf einander folgenden Charakteristiken, die sich alle auf der einhüllenden Fläche befinden, und aus denen allein, wenn man sich so ausdrücken darf, diese einhüllende Fläche zusammengesetzt ist. Eliminirt man daher aus jenen beyden Gleichungen die Größe ω, so erhält man in xyz eine Gleichung, die von ω unabhängig ist, und daher für alle Charakteristiken, d. h. für die einhüllende Fläche selbst gehört.

Wenn man aber in diesen beyden Gleichungen (I), (II), nachdem man der Größe ω einen bestimmten Werth gegeben hat (wodurch die Lage der Charakteristik im Raume für einen besondern Fall bestimmt wird), diese Größe ω in $\omega + d\omega$ übergehen läßt, so werden die zwey neuen Gleichungen (I), (II) für die nächstfolgende Charakteristik gehören, die der Form und Lage nach von der vorhergehenden wieder nur unendlich wenig verschieden seyn, und sie im Allgemeinen in einem oder auch in mehreren Punkten schneiden wird. Dieser Durchschnittspunkt zweyer nächster Charakteristiken wird offenbar derjenige Punkt der ersten Charakteristik seyn, für welchen die Werthe von xyz sich nicht ändern, wenn sich (in den Gleichungen I und II) der Werth von ω ändert. Wenn man daher diese beyden Gleichungen bloß in Beziehung auf ω differentiirt, so werden die beyden so erhaltenen Gleichungen für jenen Durchschnittspunkt der zwey nächsten Charakteristiken gehören,

und da dieser Punkt sich auch zugleich auf der ersten Charakteristik befindet, da überdieß die Differentiation von (I) die Gleichung (II) wieder hervorbringt, so hat man für diesen Durchschnittspunkt je zwey nächster Charakteristiken die drey Gleichungen:

$$U = o \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

$$\left(\frac{dU}{d\omega}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

$$\left(\frac{d^2 U}{d\omega^2}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (III),$$

in welchen wieder der Werth von ω diejenige von allen andern Charakteristiken bestimmt, auf welcher man den Durchschnitt derselben mit der nächstfolgenden Charakteristik genommen hat. (Vergl. §. 118, III.)

Gibt man daher in den drey vorhergehenden Gleichungen der Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Aufeinanderfolge jeder zwey nächsten Charakteristiken, d. h. eliminirt man aus jenen drey Gleichungen die Größe ω, so erhält man zwey andere Gleichungen in xyz ohne ω, welche zwey Gleichungen für diejenige Curve gehören werden, welche von den sämmtlichen Durchschnittspunkten jeder Charakteristik mit der ihr nächstfolgenden gebildet werden. Diese Curve wollen wir die Wendungscurve (Arete de rebroussement) der einhüllenden Fläche nennen.

Man sieht, daß diese Wendungscurve von allen Charakteristiken eben so berührt wird, wie die einhüllende Fläche von allen eingehüllten berührt wird. Daß sich dieselben Betrachtungen auch auf ebene Curven oder auf eine Gleichung $U = o$ zwischen zwey veränderlichen Größen anwenden lassen, ist für sich klar.

Ex. I. In der Ebene der xy sey irgend eine Curve verzeichnet, deren Gleichung $y = \varphi x$ seyn soll. Der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser r ist, bewege sich auf jener Curve. Der Raum, welchen die Kugel durchläuft, wird die einhüllende Fläche aller dieser Kugeln seyn.

Ist ω der Werth von x für irgend eine bestimmte Lage des Mittelpunktes der Kugel, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x - \omega)^2 + (y - \varphi\omega)^2 + z^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Setzt man der Kürze wegen $\varphi'\omega = \frac{d.\varphi\omega}{d\omega}$ und $\varphi''\omega = \frac{d.\varphi'\omega}{d\omega}$,

und differentiirt man die vorhergehende Gleichung zwey Mal in Beziehung auf ω, so erhält man

$$(x-\omega)+(y-\varphi\omega).\varphi'\omega=0 \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

$$(y-\varphi\omega).\varphi''\omega-(\varphi'\omega)^2-1=0 \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

Dieß vorausgesetzt, gehören also die Gleichungen I und II zusammen genommen für jede einzelne Charakteristik der einhüllenden Fläche.

Eliminirt man aber ω aus I und II, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Fläche selbst.[1]

Ferner gehören die Gleichungen I, II und III zusammen genommen für den Durchschnittspunkt von je zwey nächsten Charakteristiken.

Eliminirt man aber die Größe ω aus I, II und III, so erhält man die beyden Gleichungen in xyz, welche für die Wendungscurve der einhüllenden Fläche gehören.

Ist nun, um dieß auf ein besonderes Beyspiel fortzuführen, die feste Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt jener Kugel bewegt, ein Kreis des Halbmessers R, so ist

$$\varphi\omega=\sqrt{R^2-\omega^2}, \text{ also auch}$$

$$\varphi'\omega=-\frac{\omega}{\sqrt{R^2-\omega^2}} \text{ und } \varphi''\omega=-\frac{\omega^2}{(R^2-\omega^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{R^2-\omega^2}}.$$

Diesem gemäß sind jene drey Gleichungen

$$(x-\omega)^2+(y-\sqrt{R^2-\omega^2})^2+z^2-r^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

$$x=\frac{\omega y}{\sqrt{R^2-\omega^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

$$y=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

Eliminirt man ω aus I und II, so ist die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche

$$R+\sqrt{r^2-z^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Die zwey Gleichungen I und II zusammen genommen gehören für die Charakteristik, und man sieht, daß diese Charakteristik eine ebene Curve ist, da ihre Projection in xy (Gleichung II) eine Gerade ist. Diese Curve liegt also in einer auf xy senkrechten Ebene. Für den besondern Werth von $\omega=0$ ist auch $x=0$, und daher die Gleichung (I)

$$(y-R)^2+z^2=r^2,$$

also die Charakteristik ein Kreis, dessen Halbmesser r, und dessen Mit-

lpunkt von dem Anfangspunkte der Coordinaten um die Größe R bsteht.

Bewegt sich auf demselben festen Kreise des Halbmessers R der Mittelpunkt eines Ellipsoids, das durch die Rotation einer Ellipse um die Axe der z entstanden ist, und sind A und B die halben Axen dieses Ellipsoids, so hat man

$$x^2 + y^2 + \frac{B^2 z^2}{A^2} = B^2,$$

also auch

$$(x-\omega)^2 + (y-\varphi\omega)^2 + \frac{B^2}{A^2}(z^2 - A^2) = 0 \quad . \; . \; . \quad (I),$$

$$x - \omega + (y - \varphi\omega) \, . \, \varphi'\omega = 0 \quad . \; . \; . \quad (II),$$

$$(y - \varphi\omega) \, . \, \varphi''\omega - (\varphi'\omega)^2 - 1 = 0 \quad . \; . \; . \quad (III).$$

Da hier die Größe $\varphi\omega = \sqrt{R^2 - \omega^2}$ ist, wie zuvor, so gibt die Gleichung (II) sofort

$$x = \frac{\omega y}{\sqrt{R^2 - \omega^2}} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{R^2 x^2}{x^2 + y^2},$$

und mit diesem Werthe von ω findet man aus der Gleichung (I)

$$R + \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für die einhüllende Fläche, übereinstimmend mit der Rotationsfläche, die wir oben (§. 131) gefunden haben, wenn man daselbst $n = A$, $m = B$ und $p = R$ setzt.

Ex. II. Für die Gleichung eines Kegels mit kreisförmiger Basis, dessen Spitze im Anfange der Coordinaten ist, und dessen Seitenlinie mit der Axe des Kegels, die zugleich die Axe der z seyn soll, einen Winkel bildet, dessen Tangente a ist, hat man (§. 130)

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Es bewege sich die Spitze dieses Kegels in der Peripherie eines Kreises des Halbmessers R, der in der Ebene der xy liegt, und dessen Mittelpunkt im Anfange der Coordinaten ist, so hat man für die Gleichung dieses beweglichen Kegels

$$(x-\omega)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \omega^2})^2 = a^2 z^2 \quad . \; . \; . \quad (I).$$

Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf ω gibt

$$x - \omega - (y - \sqrt{R^2 - \omega^2}) \, . \, \frac{\omega}{\sqrt{R^2 - \omega^2}} = 0 \quad . \; . \; . \quad (II),$$

woraus sofort folgt

$$\omega = \frac{R x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

und dieser Werth von ω, in der Gleichung (I) substituirt, gibt die Gleichung der alle diese Kegel einhüllenden Fläche

$$(x\sqrt{x^2+y^2} - R x)^2 + (y\sqrt{x^2+y^2} - R y)^2 = a^2 z^2 (x^2 + y^2);$$

oder, wenn man diese Quadrate auflöst und alle Glieder durch $(x^2 + y^2)$ dividirt:

$$x^2 + y^2 - 2 R\sqrt{x^2+y^2} = a^2 z^2 - R^2.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $z = b$, so erhält man für den Durchschnitt dieser einhüllenden Fläche mit einer der xy parallelen und von ihr um die Größe b abstehenden Ebene die Gleichung

$$x^2 + y^2 = (R \pm a b)^2.$$

Dieser Schnitt ist daher ein doppelter, concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $R + ab$ und $R - ab$ ist.

§. 134. (**Developpable Flächen.**) Wenn eine Fläche durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, deren je zwey nächste Lagen immer in einer Ebene sind, so wird diese Fläche developpabel genannt. Diese Flächen können nämlich als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge, aber von unendlich kleiner Breite bestehend betrachtet werden. Da je zwey nächste dieser Elemente sich in einer geraden, in der erzeugenden geraden Linie schneiden, so läßt sich die ganze Fläche in eine einzige Ebene, ohne Bruch und ohne Verdopplung, ausbreiten, oder sie läßt sich developpiren. Die cylindrischen und conischen Flächen (§. 129, 130) sind nur sehr specielle Fälle der developpablen Flächen.

Wenn sich eine Ebene so bewegt, daß sie durch alle auf einander folgenden Punkte einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung auf dieser Curve senkrecht steht, so werden die Durchschnitte je zwey nächster dieser normalen Ebenen eine developpable Fläche bilden. Diese geradlinigen Durchschnitte von je zwey nächsten Ebenen nennt man die Charakteristik der developpablen Fläche. Da endlich je zwey nächste dieser Charakteristiken immer in einer Ebene liegen, so werden sie (wenn sie anders nicht parallel sind, wie bey den cylindrischen Flächen) sich in irgend einem Punkte schneiden, und die Aufeinander-

folge aller dieser Durchschnittspunkte der Charakteristiken werden eine Curve bilden, die man, analog mit §. 133, die Wendungscurve der developpablen Fläche nennt, und zu welcher die Charakteristiken die auf einander folgenden Tangenten sind.

Man sieht aus dem Gesagten, daß man die developpablen Flächen auch als solche betrachten kann, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die immer Tangente einer Curve von doppelter Krümmung ist.

Seyen also $x = fz$ und $y = Fz$ die Gleichungen einer Curve. Betrachtet man auf ihr einen Punkt, dessen Ordinate $z = \omega$ ist, so werden die beyden andern Coordinaten dieses Punktes $x = f\omega$ und $y = F\omega$ seyn. — Sey ferner

$$z = Ax + By + C$$

die Gleichung einer Ebene. Soll diese Ebene durch den Punkt $z = a$ jener Curve gehen und auf dieser Curve senkrecht stehen, so ist durch diese zwey Bedingungen die Lage der Ebene vollkommen bestimmt, also sind auch die Größen A, B, C bestimmt, und man sieht, daß diese Größen mit dem Werthe von ω sich zugleich ändern werden, daß sie also Funktionen von ω seyn müssen, so daß man daher hat

$$z = x\varphi\omega + y\psi\omega + \omega \quad . \; . \; . \quad (A).$$

Dieß ist aber dieselbe Gleichung, die wir schon oben (§. 113, II) behandelt haben. Wir haben aus ihr a. a. O. die folgenden vier Gleichungen durch Differentiation der Größen x, y und z abgeleitet:

$$p = fq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a),$$
$$p = \varphi(z - px - qy) \quad . \; . \; . \quad (b),$$
$$q = \psi(z - px - qy) \quad . \; . \; . \quad (c),$$
$$\text{und} \quad s^2 = rt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d),$$

wenn man die Bedeutung der Größen p, q, r, s und t nach §. 114 beybehält.

Jede der drey ersten Differentialgleichungen (a), (b) oder (c), die nur mehr eine willkürliche Funktion enthalten, ist die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche, und eben so ist auch die zweyte Differentialgleichung (d), die keine weiter willkürliche Funktion, aber dafür partielle Differential-Coefficienten der zweyten Ordnung enthält, eine eben so allgemeine Gleichung der developpablen Fläche. Diese letzte Gleichung (d) wurde auch schon oben (§. 129, 130) aus den cy-

lindrischen und conischen Flächen, abgeleitet; wenn man die Gleichungen der letzteren durch Differentiation von den sie particularisirenden Größen a und b unabhängig macht.

I. Die vorhergehenden Ausdrücke sind durch Differentiation der Gleichung (A) in Beziehung auf die veränderlichen Größen x y z entstanden. Allein dieselbe Gleichung (A) läßt sich auch in Beziehung auf die ebenfalls veränderliche Größe ω auf eine ähnliche Weise behandeln. — Gibt man nämlich dieser Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Folge aller auf die gegebene Curve senkrechten Ebenen, deren je zwey nächste sich in einer geraden Linie, der Charakteristik, schneiden. Differentürt man also die Gleichung (A) in Beziehung auf ω, so erhält man

$$x\varphi'\omega + y\psi'\omega + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (B),$$

und die zwey Gleichungen (A) und (B), zusammen genommen, sind die der Charakteristik. Da aber die Gleichung (A) die einer Ebene überhaupt, und da die Gleichung (B) die einer andern auf xy senkrechten Ebene ist (Einl. §. 8), so ist die Charakteristik eine gerade Linie, wie zuvor.

Eliminirt man aber aus den beyden Gleichungen (A), (B) die jede einzelne Charakteristik particularisirende Größe ω, so wird das Resultat dieser Elimination die Aufeinanderfolge dieser verschiedenen Charakteristiken, d. h. die **Gleichung der developpirten Ebene** ausdrücken.

Differentürt man die Gleichung (B) wieder in Beziehung auf ω, so erhält man

$$x\varphi''\omega + y\psi''\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (C),$$

und diese Gleichung wird für die nächstfolgende Charakteristik gehören, wie (B) für die zunächst vorhergehende gehört. Beyde zusammen genommen, werden daher für den Durchschnittspunkt dieser zwey nächsten Charakteristiken gehören, d. h. sie werden einen Punkt der Wendungscurve anzeigen. Eliminirt man daher aus den drey Gleichungen (A), (B), (C) die diesen Punkt der Wendungscurve particularisirende Größe ω, so erhält man zwey Gleichungen, die von ω unabhängig sind, und daher allen Punkten der Wendungscurve angehören.

Die Elimination der Größe ω aus den beyden Gleichungen (A), (B) gibt daher die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche in endlichen Ausdrücken, und die Elimination derselben Größe ω aus den

drey Gleichungen (A), (B), (C) gibt die zwey Gleichungen der Wendungscurve der developpablen Fläche.

II. Betrachtet man aber, nach dem Vorhergehenden, die developpablen Flächen als solche, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, welche immer Tangente einer Curve von doppelter Krümmung ist, so seyen wieder

$$y = fz \quad \text{und} \quad y = Fz$$

die Gleichungen dieser Curve. Wählt man in ihr einen Punkt, dessen Coordinate $z = \omega$ ist, so hat man für diesen Punkt

$$x = f\omega \quad \text{und} \quad y = F\omega;$$

und wenn man diesen Punkt der Curve als den Berührungspunkt der Tangente betrachtet, so hat man für die Gleichungen dieser Tangente (§. 125):

$$x - f\omega = (z - \omega) \, . \, f'\omega,$$
$$y - F\omega = (z - \omega) \, . \, F'\omega,$$

und die Elimination von ω aus diesen beyden Gleichungen wird die allgemeine Gleichung der developpablen Fläche seyn. In der That, differentiirt man die erste Gleichung in Beziehung auf x, z und die zweyte in Beziehung auf y, z, so erhält man

$$1 = p \, . \, f'\omega \quad \text{und} \quad 1 = q \, . \, F'\omega,$$

woraus wieder folgt

$$p = \mathfrak{f}q, \text{ wie zuvor.}$$

§. 135. (Ueber die Differentiation der constanten Größen einer gegebenen Gleichung.) Die Methode, eine gegebene Gleichung zwischen x, y und einer constanten Größe in Beziehung auf diese Constante zu differentiiren, und dann aus den so erhaltenen zwey Gleichungen diese Constante zu eliminiren, ein Verfahren, dessen wir uns zur Auffindung der einhüllenden Flächen (§. 133) bedient haben, läßt sich auch noch bey vielen andern Problemen vortheilhaft anwenden. Wir wollen, zum Schlusse dieses Abschnittes, nur einige derselben näher anzeigen.

I. Eine Gerade bewege sich so, daß die Summe ihrer Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten, in der Axe der x und y gezählt, immer gleich einer constanten Größe c sey. Um die Curve zu finden, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittspunkte dieser Geraden mit ihrer nächstliegenden entsteht, oder welche diese Ge-

rade in allen ihren Lagen berührt, sey a die Entfernung der Geraden vom Anfange in der Richtung der Axe der x, und b in jener der y, so hat man, wie man leicht sieht,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

und da nach der Bedingung der Aufgabe $a + b = c$ seyn soll, so ist auch die Gleichung dieser Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c - a} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf a gibt aber

$$a = \tfrac{1}{2}(c + x - y),$$

und wenn man diesen Werth von a in der Gleichung (I) substituirt, so erhält man

$$(y - x)^2 - 2c(x + y) + c^2 = 0,$$

die Gleichung der gesuchten Curve, die also eine Parabel ist.

Soll sich aber die Gerade so bewegen, daß ihr senkrechter Abstand von dem Anfange der Coordinaten immer gleich einer constanten Größe R ist, so hat man, wenn α den Winkel der Geraden mit der Axe der x bezeichnet, für die Gleichung dieser Geraden

$$x \sin.\alpha + y \cos.\alpha = R.$$

Das Differential dieses Ausdrucks in Beziehung auf α gibt $\text{tang.}\,\alpha = \frac{x}{y}$, und wenn man diesen Werth von α in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

die Gleichung des Kreises, dessen Halbmesser R ist.

Wenn sich endlich zwey Gerade, deren Gleichungen

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad y = a'x + b'$$

sind, so bewegen, daß sie sich immer unter demselben Winkel m schneiden, so hat man

$$\text{tang.}\, m = \frac{a' - a}{1 + a'a};$$

und wenn man in diesem Ausdrucke für a und a' ihre Werthe $\frac{y - b}{x}$ und $\frac{y - b'}{x}$ substituirt, so erhält man für die Gleichung der Curve, in

welcher die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der beyden Geraden liegen:

$$x^2 + (y-b)(y-b') - x(b-b')\,\text{cotang.}\,\omega = 0,$$

oder einen Kreis, dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{b-b'}{\sin.\,m}\right)$ ist.

II. Sey mMm' (Fig. 45) eine gegebene Curve, deren Coordinaten $AP = x'$ und $PM = y'$, und C ein fixer Punkt, dessen Coordinaten $AB = \alpha$, $BC = \beta$ sind. Man ziehe CM und durch den Punkt M die Gerade MSE so, daß die Normale MR der gegebenen Curve den Winkel CMS halbirt, oder daß $CMR = RMS$ ist. Thut man dasselbe für alle nächstfolgenden Punkte M der gegebenen Curve, so werden die so entstehenden Geraden MS sich je zwey in einem Punkte schneiden, und die Folge aller dieser Durchschnittspunkte S wird eine andere Curve sSs' bilden, die man die Brennlinie (Catacaustik) der gegebenen Curven mMm' nennt, weil in der That bey der Reflexion des Lichtes von einem Spiegel mMm' der einfallende Strahl CM mit der Normale MR denselben Winkel, wie der zurückgeworfene Strahl MS, bildet.

Dieß vorausgesetzt, wollen wir die Gleichung der Brennlinie zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $AT = x$ und $TS = y$ suchen.

Die Gleichung der Geraden CM ist (Einl. §. 3, IV.):

$$y - y' = \frac{(\beta - y')}{\alpha - x'}(x - x').$$

Wird daher der Winkel $MDR = \theta$ gesetzt, so ist $\text{tang.}\,\theta = \frac{\beta - y'}{\alpha - x'}$. Allein es ist auch

$$\text{tang.}\,DRM = \frac{dx'}{dy'} \quad \text{und}$$

$$\text{tang.}\,DMR = \text{tang.}(180 - D - R) = -\,\text{tang.}(D + R) \text{ oder}$$

$$\text{tang.}\,DMR = \frac{1 + \theta\frac{dy'}{dx'}}{\theta - \frac{dy'}{dx'}},$$

welchen Ausdruck wir der Kürze wegen durch θ' bezeichnen wollen.

Endlich ist noch

$$\text{tang.}\,REM = \text{tang.}(DRM - RME),$$

und da $RME = DMR$ ist:

$$\text{tang. REM} = \frac{1 - \theta' \frac{dy'}{dx'}}{\theta' + \frac{dy'}{dx'}};$$

und da die Gerade MSE zugleich die Tangente der gesuchten Curve sSs' seyn muß, so hat man für die Gleichung dieser Curve

$$y - y' = \frac{\theta' \frac{dy'}{dx'} - 1}{\theta' + \frac{dy'}{dx'}} (x - x').$$

Differentiirt man aber diese Gleichung in Beziehung auf x', und setzt der Kürze wegen $p' = \frac{dy'}{dx'}$ und $q' = \frac{dp'}{dx'}$, so erhält man

$$x = x' - \frac{(1 + p'^2)(p' + \theta')}{(1 + p'^2)\frac{d\theta'}{dx'} + q'(1 + \theta'^2)} \quad \ldots \quad \text{(II)},$$

und wenn man aus den beyden letzten Gleichungen die Größe $(x - x')$ eliminirt:

$$y = y' + \frac{(1 + p'^2)(1 - p'\theta')}{(1 + p'^2)\frac{d\theta'}{dx'} + q'(1 + \theta'^2)} \quad \ldots \quad \text{(III)}.$$

In den beyden letzten Ausdrücken kann man aber mittelst der gegebenen Gleichung der Curve mMm' zwischen x' und y' alles, was rechts von dem Gleichheitszeichen ist, auf eine Funktion der einzigen Größe x' zurückbringen. Eliminirt man dann aus den beyden letzten Gleichungen diese Größe x', so erhält man die gesuchte Gleichung in xy, welche für die Catacaustik gehört.

Ex. I. Ist die gegebene Curve eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten und deren Excentricität c ist, so hat man, wenn der fixe Punkt C einer der beyden Brennpunkte der Ellipse ist, $\alpha = -c$ und $\beta = 0$, also auch $\theta = \frac{y'}{c + x'}$, und die beyden Gleichungen (II) und (III) gehen in folgende über:

$$x = +c \quad \text{und} \quad y = 0,$$

woraus folgt, daß die Brennlinie der Ellipse ein Punkt, und zwar der andere Brennpunkt ist, so daß die aus einem Brennpunkte dieser Curve ausgehenden Strahlen, nach ihrer Reflexion, sich in dem andern Brennpunkte wieder vereinigen.

Ex. II. Ist die gegebene Curve ein Kreis, dessen Gleichung $y'^2 = 2ax' - x'^2$ ist, und ist der strahlende Punkt in dem Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises, so ist $\alpha = \beta = 0$ und

$$\theta = \frac{y'}{x'},\quad p' = \frac{a - x'}{y'},\quad \theta' = \frac{y'}{x'},\quad q' = -\frac{a^2}{y'^3},$$

also auch

$$p' + \theta' = \frac{3a - 2x'}{y'},\quad 1 + p'^2 = \frac{a^2}{y'^2},\quad 1 + \theta^2 = \frac{2a}{x'},$$

$$\frac{d\theta'}{dx'} = -\frac{a}{x'y'}.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man für die Gleichungen (II) und (III):

$$x = \frac{6ax' - 2x'^2}{3a} \quad \text{und} \quad y = \frac{4ay' - 2xy'}{3a}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Ausdrücken und aus der gegebenen Gleichung $y'^2 = 2ax' - x'^2$ die beyden Größen x' und y', so erhält man

$$y^4 + (18x^2 + 12a^2 - 36ax)\tfrac{1}{9}y^2$$
$$+ \frac{48a^2x^2 - 36ax^3 - \frac{64}{3}a^3x + 9x^4}{9} = 0,$$

oder wenn man $a = \frac{3}{2}A$ setzt:

$$y^4 + x^4 + (2x^2 + 3A^2 - 6Ax)y^2 + 12A^2x^2 - 6Ax^3 - 8A^3x = 0;$$

oder endlich, wenn man statt x die Größe $2A - x$ setzt:

$$y^4 + x^4 - (A^2 + 2Ax - 2x^2)y^2 - 2Ax^3 = 0$$

für die gesuchte Brennlinie, die also die Cardioide ist (Einl. §. 15, IV.).

Nimmt man überhaupt an, daß die Strahlen CM alle unter sich parallel und senkrecht auf die Abscissenaxe AP auffallen, daß also der strahlende Punkt C unendlich entfernt ist, so hat man $p' = \theta'$, und die beyden oben gefundenen Gleichungen gehen in folgende einfachere über:

$$x = x' - \frac{p'}{q'} \quad \ldots\ldots \quad (\text{II}')$$

$$\text{und}\quad y = y' + \frac{1 - p'^2}{2q'} \quad \ldots \quad (\text{III}').$$

Ex. III. Ist die gegebene Curve die Parabel $y'^2 = ax'$, so hat man

$$p' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x'}} \quad \text{und} \quad q' = -\frac{1}{4x'}\sqrt{\frac{a}{x'}},$$

also auch jene zwey Gleichungen

$$x = 3x' \quad \text{und} \quad y = \sqrt{ax'} - \left(1 - \frac{a}{4x'}\right)\frac{2x\sqrt{x'}}{\sqrt{a}},$$

woraus man, durch Elimination von x', für die Gleichung der Brennlinien erhält

$$y^2 = \frac{ax}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{3a}\right)^2.$$

Wenn aber die Strahlen CM parallel mit der Abscissenaxe AP einfallen, so vereinigen sie sich, nach der Reflexion, in dem Brennpunkte der Parabel, wie man aus den beyden Gleichungen (II') und (III') leicht findet.

III. Beschließen wir diesen Gegenstand noch mit folgendem interessanten Probleme.

Der Scheitel eines geradlinigen Winkels bewege sich auf der Peripherie einer Ellipse, während seine beyden Schenkel eine andere concentrische Ellipse berühren, die mit der ersten Ellipse dieselbe Lage hat. Man suche diejenige Curve, welche von der Sehne immer berührt wird, die durch die beyden Berührungspunkte der zweyten Ellipse mit den Schenkeln des Winkels geht.

Sey die Gleichung der von dem Winkel tangirten Ellipse

$$A^2x^2 + B^2y^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

und überdieß die Gleichung der sie tangirenden Geraden

$$y = Px + Q.$$

Da der Scheitel des Winkels durch einen Punkt der ersten Ellipse gehen soll, dessen Coordinaten a und b seyn mögen, so hat man auch $b = Pa + Q$, und daher für die Gleichung der letzten Geraden

$$y - b = P(x - a).$$

Da ferner diese Gerade die zweyte Ellipse berühren soll, so müssen die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus der letzten Gleichung und aus der Gleichung (A) einander gleich seyn, wodurch man erhält

$$P = -\frac{A^2x}{B^2y}.$$

Demnach sind die Gleichungen der tangirenden Geraden

$$y - b + \frac{A^2x}{B^2y}(x - a) = 0 \quad \text{und}$$

$$A^2ax + B^2by = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (B),$$

und diese letzte Gleichung ist die Gleichung der erwähnten Sehne für irgend eine Lage des Scheitels des Winkels, welche Lage durch die beyden Größen a und b particularisirt wird.

Um daher den Durchschnittspunkt dieser Sehne mit der nächstfolgenden Sehne zu erhalten, wird man die Gleichung (B) in Beziehung auf die Größen a und b differentiiren, wodurch man erhält

$$A^2 x\,da + B^2 y\,db = 0.$$

Da aber der Scheitel des Winkels, nach der Bedingung der Aufgabe, sich auf einer Ellipse bewegen soll, so sey die Gleichung dieser Ellipse

$$A'^2 a^2 + B'^2 b^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Da nun die Werthe von $\frac{db}{da}$ aus den beyden letzten Gleichungen identisch seyn müssen, so hat man

$$A'^2 B^2 a y - A^2 B'^2 b x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D),$$

und die Gleichungen B, C und D sind die verlangten. Sucht man aus B und D die Werthe von x und y, so erhält man den Ort des Durchschnittspunktes von je zwey nächsten Sehnen, nämlich

$$x = \frac{A'^2 a}{A^2 (A'^2 a^2 + B'^2 b^2)} \quad \text{und} \quad y = \frac{B'^2 b}{B^2 (A'^2 a^2 + B'^2 b^2)};$$

oder nach der Gleichung C einfacher ausgedrückt:

$$x = \frac{A'^2}{A^2} \,.\, a \quad \text{und} \quad y = \frac{B'^2}{B^2} \,.\, b.$$

Allein diese Durchschnittspunkte hängen noch von den Werthen der Größen a und b, d. h. von der Lage des Scheitels des beweglichen Winkels ab. Will man sie also davon unabhängig machen, so wird man diese Größen a und b aus den drey Gleichungen B, C und D eliminiren, wodurch man eine Gleichung in xy erhält:

$$A'^2 B'^2 = A^4 B'^2 x^2 + A'^2 B^4 y^2,$$

welche für die gesuchte Curve gehört, zu welcher jene Sehne, in jeder ihrer Lage, Tangente ist. Die gesuchte Curve ist also, wie die letztere Gleichung zeigt, wieder eine Ellipse, die mit den beyden vorhergehenden Ellipsen concentrisch und von derselben Lage ist.

Nennt man a′ und b′ die halbe große und kleine Axe der ersten Ellipse, in welcher sich der Scheitel des Winkels bewegt, und sind eben so a und b dieselben Größen für die zweyte Ellipse, welche von

den Schenkeln des beweglichen Winkels tangirt wird, und sind endlich a'' und b'' dieselben Größen für die dritte Ellipse, so hat man

$$aA = bB = a'A' = b'B' = 1 \quad \text{und}$$

$$a'' = \frac{A'}{A^2} = \frac{a^2}{a'},$$

$$b'' = \frac{B'}{B^2} = \frac{b^2}{b'},$$

oder die Axen der dritten Ellipse sind die dritten Proportionalzahlen zu den analogen Axen der beyden ersten Ellipsen.

Wären endlich die beyden ersten Ellipsen Kreise und $a = b = r$, so wie $a' = b' = r'$ die Halbmesser dieser Kreise, so wäre auch die gesuchte Curve ein den beyden vorhergehenden concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $\frac{r^2}{r'}$ ist.

Wir werden in der nun folgenden zweyten Abtheilung dieses Werkes auf die Differentiation der Gleichungen in Beziehung auf die in ihnen enthaltenen constanten Größen wieder zurück kommen, da diese Betrachtungen einen der wichtigsten Zweige der neueren Analysis bilden.

Integralrechnung.

XIX.

Einfachste Integralformeln.

§. 136. (**Begriff der Integralrechnung.**) So wie wir im Vorhergehenden das Differential von irgend einem gegebenen endlichen Ausdruck, z. B. von x^m, durch die Vorsetzung des Zeichens d angezeigt haben, wodurch wir $d \,.\, x^m = m x^{m-1} dx$ erhielten, eben so wollen wir auch, wenn umgekehrt das Differential $m x^{m-1} dx$ gegeben und der ursprüngliche endliche Ausdruck zu suchen ist, durch dessen Differentiation dieses Differential $m x^{m-1} dx$ erhalten wird, diesen ursprünglichen Ausdruck durch die Vorsetzung des Zeichens $\int$ anzeigen, so daß man also hat

$$\int m x^{m-1} dx = x^m.$$

Man nennt aber diesen ursprünglichen endlichen Ausdruck eines Differentials das Integral dieses Differentials. Demnach ist x^m das Integral von $m x^{m-1} dx$, da das Differential der ersten Größe gleich der zweyten ist.

Dasselbe Integral läßt sich auch so ausdrücken

$$m \int x^{m-1} dx = x^m,$$

da der unveränderliche Faktor m auf die Differentiation, also auch auf die Integration keinen Einfluß hat. Eben so können wir schon jetzt bemerken, daß man jedem Integral auch irgend eine constante Größe C hinzufügen kann, da diese durch die Differentiation wieder verschwindet, so daß wir daher in unserem gewählten Beyspiele haben werden

$$m \int x^{m-1} dx = x^m + C.$$

Der eigentliche Werth dieser Constante wird leicht gefunden, wenn man den Werth des Integrals für irgend einen besonderen Fall kennt. Weiß man z. B., daß das Integral gleich a wird, wenn $x = 0$ ist, so hat man, wenn m eine positive Zahl ist

$$a = 0 + C \quad \text{oder} \quad C = a.$$

Wird aber das Integral gleich B, wenn $x = A$ ist, so hat man

$$B = A^m + C \quad \text{oder} \quad C = B - A^m.$$

Eben so haben wir oben für die natürlichen Logarithmen gefunden $d \,.\, \log.\, x = \frac{dx}{x}$, also ist auch $\int \frac{dx}{x} = \log.\, x + C$, oder, was dasselbe ist, $\int \frac{dx}{x} = \log.\, x + \log.\, C = \log.\, Cx$. Ist hier für einen besondern Fall das Integral gleich $\log.\, a$, wenn $x = b$ ist, so hat man $a = Cb$ oder $C = \frac{a}{b}$, also auch für das gesuchte Integral

$$\int \frac{dx}{x} = \log.\, \frac{ax}{b}.$$

Diese Constante wollen wir in der Folge bey jedem Integral der Kürze wegen als hinzugesetzt annehmen.

I. Dieß vorausgesetzt, erhalten wir sofort eine Anzahl einfacher Integrale durch unmittelbare Umkehrung der in dem Vorhergehenden aufgestellten Differentialausdrücke. So geben die im §. 35 gesammelten Formeln:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log.\, \text{nat.}\, x,$$

$$\int dx \sin.\, x = -\cos.\, x,$$

$$\int dx \cos.\, x = \sin.\, x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos.^2 x} = \text{tang.}\, x,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log.\, \text{nat.}\, a},$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \text{wo } \log.\, \text{nat.}\, e = 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \text{arc.}\sin.\, \frac{bx}{a} = -\frac{1}{b} \text{arc.}\cos.\, \frac{bx}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \text{arc.}\,\text{tang.}\, \frac{bx}{a} = -\frac{1}{ab} \text{arc.}\,\text{cotang.}\, \frac{bx}{a},$$

aus welchen sich ohne Mühe noch mehrere andere Ausdrücke zusammen setzen lassen. So ist z. B.

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)},$$

also ist auch

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x},$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\log.(1+x)-\tfrac{1}{2}\log.(1-x)=\tfrac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x}\ \text{u. f.}$$

II. Eben so hat man, wie schon für sich klar ist,

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\log.(a+bx),$$

$$\int(a+bx)^m dx=\frac{1}{(m+1)\,b}(a+bx)^{m+1},$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^m}=-\frac{1}{(m-1)\,b\,(a+bx)^{m-1}},$$

$$\int(a+bx^n)^m\,.\,x^{n-1}dx=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{nb\,(m+1)},$$

In diesen Ausdrücken ist die veränderliche Größe außer den Klammern das vollständige Differential derjenigen in den Klammern. So ist in dem letzten Beyspiele $x^{n-1}dx$ bis auf die constante Größe das Differential von x^n. Man vereinfacht diese Ausdrücke, wenn man $a+bx$ oder $a+bx^2$ gleich einer einfachen veränderlichen Größe z setzt.

§. 137. (Anwendung auf Binomialformeln.) Setzt man in den beyden vorhergehenden Gleichungen

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc.sin.}\,x \quad \text{und} \quad \int\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc.tang.}\,x$$

statt x die Größe $x\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\text{arc.sin.}\,x\sqrt{-1}$$

und

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\text{arc.tang.}\,x\sqrt{-1}.$$

Es ist aber (§. 68)

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(\cos.\alpha-\sqrt{-1}\,.\,\sin.\alpha).$$

Setzt man also $x\sqrt{-1}=\sin.\alpha$, so ist auch $\sqrt{1+x^2}=\cos.\alpha$, und daher

$$\text{arc.sin.}\,x\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(x+\sqrt{1+x^2}),$$

also auch die erste jener Gleichungen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log.(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Eben so war

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1+\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{tang.}\,\alpha}{1-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{tang.}\,\alpha},$$

also auch, wenn $\mathrm{tang.}\,\alpha = - x\sqrt{-1}$ ist,

$$\mathrm{arc.\,tang.}\, x\sqrt{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1+x}{1-x},$$

und daher die zweyte jener Gleichungen

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} \log. \frac{1+x}{1-x},$$

wie im §. 136, I.

I. Wir haben sonach die Integrale

$$\int \frac{dx}{1+x^2},\quad \int \frac{dx}{1-x^2},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man in ihnen $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x, so erhält man folgende vier Ausdrücke,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \mathrm{arc.\,tang.}\, x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log. \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log. \left[x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{1+\frac{bx^2}{a}}\right],$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \mathrm{arc.\,sin.}\, x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

und statt der dritten dieser Gleichungen kann man auch nehmen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log. [x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}] - \frac{1}{\sqrt{b}} \log. \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \log. [x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}],$$

da die Constante $\frac{1}{\sqrt{b}} \log. \sqrt{a}$, nach dem Vorhergehenden, ohnehin besonders bestimmt werden muß.

§. 138. (Anwendung auf Trinomialformeln.) Setzt man in den vorhergehenden vier Gleichungen $x+c$ statt x, und schreibt man, nach der Entwickelung dieses Ausdruckes,

statt a die Größe $\frac{4ac-b^2}{4c}$,
» b » » c,
» c » » $\frac{b}{2c}$,

so erhält man

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\text{ arc. tang. }\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log.\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\log.\left[b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}\right],$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\text{ . arc. sin. }\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}.$$

Von den beyden ersten dieser Formeln wird man die erste oder die zweyte nehmen, wenn $4ac-b^2$ positiv oder negativ ist, um imaginäre Ausdrücke zu vermeiden. Ist aber $4ac=b^2$, so wird für diesen besondern Fall $a+bx+cx^2=(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2$, und daher das algebraische Integral

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2}=-\frac{1}{cx+\sqrt{ac}}.$$

Setzt man aber in den beyden letzten dieser vier Formeln $-\frac{1}{x}$ statt x, also auch $\frac{dx}{x^2}$ statt dx, und verwechselt man die Buchstaben a, b, c mit c, —b, a, so erhält man die Formeln

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log.\frac{2\sqrt{a}\,.\sqrt{a+bx+cx^2}-2a-bx}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\text{ arc. sin. }\frac{bx-2a}{x\sqrt{4ac+b^2}}.$$

Ist in diesen Ausdrücken $a=0$, so hat man das algebraische Integral

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}}=-\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{bx}.$$

I. Ist der Kürze wegen $X = a + bx + cx^2$, so hat man überhaupt, wie man sich sogleich durch Differentiation überzeugen kann,

$$\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a} \log. \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$$

und

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2c} \log. X - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X},$$

so daß man also $\int \frac{dx}{xX}$ und $\int \frac{x\,dx}{X}$ findet, da man $\int \frac{dx}{X}$ bereits aus dem Vorhergehenden kennt.

II. Eben so ist auch

$$\int \frac{dx}{X^n} = \frac{b + 2cx}{(n-1)(4ac-b^2)X^{n-1}} + \frac{2(2n-3)c}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{X^{n-1}}$$

und

$$\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{-1}{2(n-1)cX^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^{n-1}},$$

und durch diese beyden Ausdrücke wird man, da man bereits $\int \frac{dx}{X}$ kennt, auch $\int \frac{dx}{X^2}$ und $\int \frac{x\,dx}{X^2}$ finden, wenn man $n = 2$ setzt, und dann eben so $\int \frac{dx}{X^3}$ und $\int \frac{x\,dx}{X^3}$, wenn man $n = 3$ setzt u. s. w. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{X} = \frac{B}{2c} \log. X + \frac{(2Ac - Bb)}{2c} \int \frac{dx}{X},$$

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{X^n} = \frac{2Ac(b + 2cx) - B(4ac - b^2)}{2(n-1)c.(4ac - b^2)X^{n-1}}$$
$$+ \left[\frac{2A(2n-3)c}{(n-1)(4ac - b^2)} - \frac{Bb}{2c}\right] . \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

III. Das vorzüglichste Geschäft der Integralrechnung, so fern sie sich auf Differential-Ausdrücke einer einzigen veränderlichen Größe bezieht, besteht, wie man schon aus dem bisher Gesagten sieht, in der Zurückführung jedes solchen gegebenen Ausdruckes auf jene ursprünglichen, die schon unmittelbar aus der Differentialrechnung durch bloße Reversion folgen, oder überhaupt auf der Reduktion des gegebenen Ausdruckes auf einfachere, wie sie im §. 136, I. zusammen gestellt worden sind.

Diesen Zweck erreicht man im Allgemeinen auf drey verschiedenen Wegen. I. Durch Zerlegung des gegebenen Differentials, in

Partialbrüche, wie wir sogleich im Kap. XX sehen werden. II. Durch Einführung anderer veränderlichen Größen, also durch Substitution, wie Kap. XXI u. f. Endlich III. durch Anwendung gewisser Formeln involutorischer Art, mit deren Hülfe ein vorgelegtes Integral unmittelbar auf ein einfacheres, und dieses wieder auf ein einfacheres u. f. gebracht wird, wovon wir im Kap. XXII. u. f. mehrere Beyspiele finden werden. Diese letzten Mittel, die fruchtbarsten von allen, beziehen sich beynahe durchaus auf die sogenannte theilweise Integration. Ist nämlich u sowohl als v irgend eine Funktion von x, so hat man (§. 27)

$$d \,.\, uv = u\,dv + v\,du,$$

also ist auch, wenn man von jedem Gliede dieses Ausdruckes das Integral nimmt,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ist daher von den beyden Integralen $\int u\,dv$ oder $\int v\,du$ das eine bereits aus dem Vorhergehenden bekannt, so ist durch diese Gleichung sofort auch das andere gegeben.

Um dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, sey das Integral $y = \int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2}$ zu suchen.

Nimmt man die Größen u und v so, daß man hat $u = \frac{1}{2}x$ und $dv = \frac{2x\,dx}{(1-x^2)^2}$, also auch $v = \frac{1}{1-x^2}$, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$y = \frac{\frac{1}{2}x}{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Allein das Integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ haben wir schon oben gleich $\frac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x}$ gefunden, also ist auch das gesuchte Integral

$$y = \int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2} = \frac{\frac{1}{2}x}{1-x^2} - \frac{1}{4}\log.\frac{1+x}{1-x}.$$

XX.

Integration der rationellen Funktionen.

§. 139. (Zerlegung gebrochener rationaler Funktionen in ihre binomischen Partialbrüche.) Wenn in dem Integrale $\int X\,dx$ die Größe X eine ganze oder auch eine gebrochene rationale Funktion von x ist, so läßt sich ein solches Integral immer auf die Form

$$\int (a+bx)^m dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{(a+bx)^m}$$

zurückführen, und da diese Integrale schon oben (§. 136, I) gegeben sind, so kann auch die Integration der rationellen Funktionen als gegeben angesehen werden.

Sey nämlich $y=\int \frac{X}{X'}dx$ und X sowohl als auch X′ eine ganze rationelle Funktion von x. Man kann diesen Bruch $\frac{X}{X'}$ immer so annehmen, daß die höchste Potenz von x im Zähler kleiner ist, als im Nenner, da, wenn dieses nicht statt haben sollte, die Division von X durch X′ sofort einen anderen Bruch geben wird, welcher die angeführte Eigenschaft hat. Wäre z. B.

$$y=\int \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$$

gegeben, so erhält man durch Division

$$y=\int x\,dx+\int \frac{x+1}{x^2-1}dx,$$

wo der erste Theil $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$ sich nach §. 136 integriren läßt.

Einen solchen Bruch $\frac{X}{X'}$, also vorausgesetzt, zerlege man den Nenner desselben in seine einfachen Faktoren

$$a+bx,\quad a'+b'x,\quad a''+b''x\ \ldots$$

und unterscheide dann folgende Fälle.

I. Wenn alle diese Faktoren unter sich ungleich sind, so setze man

$$\frac{X}{X'}=\frac{A}{a+bx}+\frac{A'}{a'+b'x}+\frac{A''}{a''+b''x}+\ldots,$$

wo A, A', A'' ... constante Größen sind, die sich durch Vergleichung der beyden Formen des Bruches auf die bekannte Weise bestimmen lassen.

Ex. Sey $y = \int \frac{x^2+1}{x^3-7x-6} dx$ gegeben, so hat man

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

woraus man sofort findet $A = -\frac{1}{2}$, $B = 1$ und $C = \frac{1}{2}$, so daß man daher hat

$$y = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

oder

$$y = \log.(x+2) \cdot \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}.$$

II. Wenn der Nenner X' des Bruches $\frac{X}{X'}$ mehrere z. B. n gleiche Faktoren von der Form $a+bx$ und überdieß die unter sich ungleichen Faktoren hat,

$$\alpha + \beta x,\ \alpha' + \beta' x,\ \alpha'' + \beta'' x \ldots,$$

so wird man annehmen

$$\frac{X}{X'} = \frac{A}{(a+bx)^n} + \frac{A'}{(a+bx)^{n-1}} + \frac{A''}{(a+bx)^{n-2}} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{a+bx}$$
$$+ \frac{B}{\alpha+\beta x} + \frac{B'}{\alpha'+\beta' x} + \frac{B''}{\alpha''+\beta'' x} + ,$$

wo dann die Größen A, A'... und B, B'... wie zuvor bestimmt werden.

Ex. Sey $y = \int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$, so hat man

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x} + \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x},$$

woraus folgt $A = B = -1$ und $C = 1$, also ist auch

$$y = -\int \frac{dx}{(1+x)^2} - \int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{x}$$

oder

$$y = \frac{1}{1+x} + \log. \frac{x}{1+x}.$$

§. 140. (Zerlegung gebrochener rationeller Funktionen in trinomische Partialbrüche.) Unter den einfachen binomischen Faktoren, die wir im §. 139 betrachtet haben, wird es öfter imaginäre Größen geben. Diese zu vermeiden, wird man daher je zwey der zusammen gehörenden binomischen Faktoren dieser Art durch einen einzelnen trinomischen Faktor darstellen, der, wie bekannt, immer eine reelle Form hat.

Hat also der Nenner X' des Bruches $\frac{X}{X'}$ die unter sich ungleichen trinomischen Faktoren

$$a + bx + cx^2,\quad a' + b'x + c'x^2 + \ldots,$$

so wird man annehmen

$$\frac{X}{X'} = \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} + \frac{A' + B'x}{a' + b'x + c'x^2} + \ldots$$

Hat aber der Nenner dieses Bruches mehrere z. B. n gleiche Faktoren der Form $a + bx + cx^2$, und überdieß die unter sich ungleichen Faktoren

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2,\quad \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots,$$

so wird man annehmen

$$\frac{X}{X'} = \frac{A + Bx}{(a + bx + cx^2)^n} + \frac{A' + B'x}{(a + bx + cx^2)^{n-1}} + \frac{A'' + B''x}{(a + bx + cx^2)^{n-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{A^{n-1} + B^{n-1}x}{a + bx + cx^2} + \frac{C + Dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{C' + D'x}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2} + \ldots$$

und durch dieses Verfahren wird man das Integral $y = \int \frac{X}{X'} dx$ auf die Form bringen

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a + bx + cx^2} \quad \text{oder} \quad \int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a + bx + cx^2)^m},$$

die wir schon oben (§. 138, II) gegeben haben.

Ex. Ist $y = \int \frac{(2 - x^2)\,dx}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}$ gegeben, so hat man

$$\frac{2 - x^2}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B + Cx}{x^2 - 4x + 5}.$$

Dieß gibt $A = B = \frac{1}{2}$ und $C = -\frac{3}{2}$, also ist auch

$$y = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{2}\int \frac{(1 - 3x)\,dx}{x^2 - 4x + 5} \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{1}{2}\log.(x - 1) - \frac{3}{2}\log.\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \frac{5}{2}\,\text{arc. tang.}\,(x - 2)$$

XXI.

Reduktion der irrationalen Binomialformeln auf rationale.

---

§. 141. (Wenn X bloß eine Art von irrationalen Binom enthält.) Wenn in dem Ausdrucke $dy = X dx$ die Größe X bloß die irrationalen Größen

$$\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{m}},\ \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{p}}\ \text{u. f.}$$

enthält, so setze man

$$\frac{a+bx}{f+gx} = z^{mnp\ldots},$$

wodurch man, wenn $mnp \ldots = t$ ist, erhält

$$dx = \frac{t(bf-ag) \cdot z^{t-1} dz}{(b-gz^t)^2},$$

so daß also dy rational wird und nach Kap. XX integrirt werden kann.

§. 142. (Die Grösze $x^m dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ rational machen.) Der Ausdruck

$$dy = x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

läßt sich in folgenden Fällen rational machen.

I. Wenn $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl bezeichnet, wie für sich klar ist.

II. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist. Denn setzt man

$$a + bx^n = z^q,$$

so wird

$$dy = \frac{1}{nb} q z^{p+q-1} \cdot \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Ex. Ist $dy = x^3 dx \sqrt{1-x^2}$, so findet man

$$y = \tfrac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

III. Wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. Denn der gegebene Ausdruck von dy kann auch so geschrieben werden

$$dy = x^{m+\frac{np}{q}} (b + a x^{-n})^{\frac{p}{q}} dx,$$

und dieser ist, nach II, rational, wenn $\frac{m + \frac{np}{n} + 1}{n} = \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Ex. Ist $dy = \frac{dx}{x^3 (1+x^2)^2}$, so findet man

$$y = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \log.\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

§. 143. (Andere Grössen rational machen.) Wenn in dem Ausdrucke

$$dy = X \, . \, dx$$

die Grösse X bloss die irrationale Grösse $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthält, so kann man dy rational machen, wenn man annimmt

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a} + xz$$

oder

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = x\sqrt{c} + z.$$

I. Um auch den transcendenten Ausdruck

$$dy = \frac{dx}{a + b \cos. x}$$

auf eine rationale Form zu bringen, sey $\cos. x = 1 - z \sin. x$, so ist

$$\sin. x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos. x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \text{ und daher } dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Wir haben demnach

$$dy = \frac{2dz}{a+b+(a-b)z^2},$$

und dieser Ausdruck lässt sich nach den in §. 137 angeführten Formeln integriren. Man findet

für $a > b$ $\quad y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ arc. cos. } \frac{b + a\cos. x}{a + b\cos. x},$

für $a < b$ $\quad y = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log. \frac{b + a \cos. x + \sin. x . \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos. x}$,

für $a = b$ $\quad y = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \cos. x} = \frac{1}{a} \operatorname{tang.} \frac{1}{2} x.$

Daraus folgt auch sofort das Integral $\int \frac{dx}{(a + b \cos. x)^m}$, wenn m eine ganze positive Zahl ist.

XXII.

Reduktion algebraischer Ausdrücke auf einfachere Formen.

---

§. 144. (Reduktion der Grösze $x^m dx (a + bx^n)^p$. Sey der Ausdruck gegeben

$$dy = x^m dx (a + bx^n)^p,$$

wo m, n und p willkürliche ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bezeichnen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$a + bx^n = X \quad \text{und} \quad x^{m+1} . X^p = U,$$

so ist

$$dU = (m + 1) x^m . X^p dx + p x^{m+1} . X^{p-1} dX$$

oder

$$dU = (m + 1) x^m . X^p dx + npb x^{m+n} . X^{p-1} dx \ldots (1).$$

Ferner ist

$$X^p = X^{p-1} . (a + bx^n),$$

also auch, wenn man diesen Werth von X^p in (1) substituirt,

$$dU = (m + 1) a x^m . X^{p-1} dx \\ + (m + 1 + np) b x^{m+n} . X^{p-1} dx \ldots (2).$$

Endlich ist $bx^n = X - a$, also auch die Gleichung (1)

$$dU = (m + 1 + np) x^m . X^p dx - npa x^m . X^{p-1} dx \ldots (3).$$

Integrirt man die einzelnen Glieder dieser Gleichungen (1, 2, 3) nach der Ordnung, so hat man aus (1)

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} \cdot X^{p-1} dx,$$

$$\int x^{m+n} X^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{npb} - \frac{m+1}{npb} \int x^m X^p dx,$$

und aus (2)

$$\int x^m X^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{(m+1)a} - \frac{(m+1+n)b}{(m+1)a} \int x^{m+n} \cdot X^{p-1} dx,$$

$$\int x^{m+n} \cdot X^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{(m+1+np)b} - \frac{(m+1)a}{(m+1+np)b} \int x^m \cdot X^{p-1} dx,$$

und endlich aus (3)

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np} \int x^m \cdot X^{p-1} dx,$$

$$\int x^m \cdot X^{p-1} dx = -\frac{x^{m+1} X^p}{npa} + \frac{m+1+np}{npa} \int x^m X^p dx.$$

Setzt man in der zweyten und vierten dieser sechs Gleichungen $m-n$ statt m und $p+1$ statt p, und in der dritten und sechsten derselben bloß $p+1$ statt p, so erhält man

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} \cdot X^{p-1} dx \ldots \text{(I.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m-n+1} \cdot X^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)}{nb(p+1)} \int x^{m-n} X^{p+1} dx \ldots \text{(II.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{(m+n+np+1)b}{a(m+1)} \int x^{m+n} \cdot X^p dx \ldots \text{(III.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m-n+1} \cdot X^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)} \int x^{m-n} \cdot X^p dx \ldots \text{(IV.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{m+np+1} + \frac{npa}{m+np+1} \int x^m \cdot X^{p-1} dx \ldots \text{(V.)}$$

$$\int x^m \cdot X^p dx = -\frac{x^{m+1} \cdot X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{(m+n+np+1)}{an(p+1)} \int x^m \cdot X^{p+1} dx \ldots \text{(VI.)}$$

wo immer $X = a + bx^n$ ist.

Diese sechs Gleichungen sind sehr nützlich, um das Integral

$$y = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

auf einfachere und schon aus dem Vorhergehenden bekannte Integrale zurück zu führen.

In der Gleichung (I.) wird der Exponent p von X^p um die Einheit vermindert, aber dabey der Exponent m der Größe x^m um die Größe n vermehrt, oder das Integral

$$\int x^m X^p dx \quad \text{wird auf} \quad \int x^{m+n} \,.\, X^{p-1} dx$$

gebracht. Setzt man dann, in derselben Gleichung (I.), statt m und p die Größe $m + n$ und $p - 1$, so wird dadurch das Integral

$$\int x^m X^p dx \quad \text{auf} \quad \int x^{m+2n} \,.\, X^{p-2} dx$$

gebracht, und wenn man in (I.) statt m und p die Größe $m + 2n$ und $p - 2$ setzt, so wird dadurch das Integral

$$\int x^m X^p dx \quad \text{auf} \quad \int x^{m+3n} \,.\, X^{p-3} dx$$

gebracht, und so kann man fortfahren, bis man zu einem letzten Integral der Form

$$\int x^{m+rn} \,.\, X^{p-r} dx$$

kömmt, das man bereits aus dem Vorhergehenden integriren kann, wodurch also auch die Größe

$$\int x^m \,.\, X^p dx$$

selbst integrirt seyn wird.

Ähnliche Bemerkungen gelten auch für die übrigen fünf Gleichungen. In der Gleichung (II.) z. B. wird der Exponent von X immer um die Einheit vermehrt und der von x und n vermindert, daher diese Formel gut anwendbar ist, wenn p negativ und m positiv ist. In den Gleichungen (III) und (IV.) bleibt im Gegentheile der Exponent von X ungeändert, während der von x vermehrt oder vermindert wird. In den Gleichungen (V.) und (VI.) endlich wird der Exponent von X stets um die Einheit vermindert oder vermehrt, während der Exponent von x ganz ungeändert bleibt.

Wir wollen auf diese wichtigen Formeln einige Beyspiele anwenden, um den Gebrauch derselben deutlicher zu machen.

§. 145. (Beyspiele zu den vorhergehenden sechs Gleichungen.) Sey $dy = x^{-6} \,.\, (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx$ gegeben.

Hier ist also

$$m = -6,\; n = 2,\; a = -b = 1 \text{ und } p = \tfrac{5}{2}.$$

Wendet man darauf die Gleichung (I.) an, so hat man

$$y = -\frac{X^{\frac{5}{2}}}{5x^5} - \int x^{-4} \,.\, X^{\frac{3}{2}} dx.$$

Setzt man in derselben Gleichung (I.) $m = -4$ und $p = \frac{3}{2}$, während a, b und n wie zuvor bleiben, so ist

$$\int x^{-4} \,.\, X^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{X^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \int x^{-2} \,.\, X^{\frac{1}{2}} dx.$$

Setzt man endlich in (I.) $m = -2$ und $p = \frac{1}{2}$, so ist

$$\int x^{-2} \,.\, X^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} - \int X^{-\frac{1}{2}} \,.\, dx.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, so erhält man

$$y = -\frac{X^{\frac{5}{2}}}{5x^5} + \frac{X^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Auf diese Weise ist also das gegebene Integral auf das einfache

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin. x$$

zurückgebracht, und man hat daher

$$y = \int x^{-6} (1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5x^5} + \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} - \text{arc. sin. } x$$

1. Beyspiel zu der Gleichung II.

Sey $dy = x^4 (1+x^2)^{-3} dx$ gegeben. Setzt man in der Gleichung (II.)

$$a = b = 1, \quad n = 2 \quad \text{und} \quad m = 4, \quad p = -3,$$

so erhält man

$$\int x^4 \,.\, X^{-3} dx = -\tfrac{1}{4} x^3 X^{-2} + \tfrac{3}{4} \int x^2 \,.\, X^{-2} dx.$$

Ist dann $m = 2$, $p = -2$, so hat man eben so

$$\int x^2 \,.\, X^{-2} dx = -\tfrac{1}{2} x \,.\, X^{-1} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2},$$

und da $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. tang. } x$ ist, so hat man

$$y = \int x^4 (1+x^2)^{-3} dx$$

$$= -\frac{x^3}{4(1+x^2)^2} - \frac{3x}{8(1+x^2)} + \tfrac{3}{8} \text{arc. tang. } x$$

Eben so findet man nach der Gleichung (IV.)

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{4} (x^2 + \tfrac{3}{2}) \sqrt{1+x^2} + \tfrac{3}{8} \text{arc. sin. } x,$$

und nach der Gleichung (V.), wenn man $n = 2$ und $m = 0$ setzt,

$$\int dx\sqrt{a+bx^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\log.[x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}]$$

und

$$\int dx\sqrt{a-bx^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\text{arc. sin. } x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

§. 146. (**Allgemeines Beyspiel zu den vorhergehenden sechs Gleichungen.**) Nützlicher noch ist es, statt den einzelnen Beyspielen, wie sie der §. 145 enthält, ganze zusammengehörende Gattungen von Formeln wenigstens bis auf eine gewisse Gränze zu entwickeln, um sie dann bey vorkommenden Fällen anwenden zu können.

Ein solcher Ausdruck ist der folgende

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo m nach der Ordnung die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... bezeichnet.

Setzt man in der Gleichung (IV.) $a = -b = 1$, $n = 2$ und $p = -\tfrac{1}{2}$, so erhält man

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke zuerst $m = 1, 3, 5, 7 \ldots$, und bemerkt, daß

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \quad\text{und}\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin. } x$$

ist, so findet man

$$\int\frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3}+\frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^5.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5}+\frac{1.4}{3.5}x^2+\frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^7.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^6}{7}+\frac{1.6}{5.7}x^4+\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2+\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2}$$

u. s. f.

Setzt man dann in demselben Ausdrucke $m = 2.4.6\ldots$, so erhält man

$$\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\text{arc. sin. } x,$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1.3}{2.4}\,\text{arc. sin. }x,$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^5}{6}+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{arc. sin. }x \quad \text{u. s. f.}$$

Eben so wird man den Werth von

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$$

für $m = 1, 2, 3\ldots$ bestimmen, wenn man in der Gleichung (III) $a = -b = 1$, $p = -\frac{1}{2}$ und m negativ setzt, wodurch man erhält:

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)\,x^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man dann in den so erhaltenen Ausdrücken

$$x = \frac{1}{x'},\quad\text{also}\quad dx = -\frac{dx'}{x'^2},\quad\text{so wird}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{dx'}{x'\sqrt{x'^2-1}} = -\,\text{arc. sin. }\frac{1}{x'},$$

wodurch man also auch die Werthe von

$$\int\frac{dx'}{x'^m\sqrt{x'^2-1}}$$

für $m = 1, 2, 3\ldots$ erhält.

Das Vorhergehende wird hinreichen, die am Ende dieser Schrift gesammelten Integralformeln Nr. I., II. und III. zu erläutern.

XXIII.

Reduktion des Ausdrucks $\int x^m (a+bx+cx^2)^p\,.\,dx$ auf einfachere Formen.

---

§. 147. (Das Integral $\int dx\,(a+bx+cx^2)^p$ auf $\int dx\,(a+bx+cx^2)^{p-1}$ zurückzuführen.) Setzt man in den

vorhergehenden Gleichungen (V) des §. 144 die Größe $m=0$ und $n=2$ und $x=c+x$, so erhält man

$$\int[a+b(c+x)^2]^p dx = \frac{(c+x)[a+b(c+x)^2]}{2p+1} + \frac{2pa}{2p+1}\int[a+b(c+x)^2]^{p-1}dx.$$

Setzt man aber in diesem Ausdrucke, wie oben §. 138,

statt a die Größe $\frac{4ac-b^2}{4c}$,
» b » » c,
» c » » $\frac{b}{2c}$,

so geht $a+b(c+x)^2$ über in $a+bx+cx^2$, und man erhält sofort

$$\int dx(a+bx+cx^2)^p = \frac{(b+2cx)(a+bx+cx^2)^p}{2c(2p+1)} + \frac{p(4ac-b^2)}{2c(2p+1)}\int(a+bx+cx^2)^{p-1}dx.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch aus der Gleichung (VI), wenn man überdieß p negativ setzt,

$$\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p} = \frac{b+2cx}{(p-1)(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{2c(2p-3)}{(p-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{p-1}}.$$

Durch diese Ausdrücke wird man also auch das Integral

$$\int dx\sqrt{a+bx\pm cx^2}$$

auf das schon in §. 138 gegebene Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx\pm cx^2}}$$

zurückführen.

§. 148. (Trinomische Integrale auf binomische bringen.) Da sich das Trinom $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ auf das Binom $a+bz^2$ zurückbringen läßt, wenn man $x=z-\frac{\beta}{2\gamma}$ setzt, wo dann $a=\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma}$ und $b=\gamma$ wird, so hat man

$$\int x^m dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p = (-1)^m\int\left(\frac{\beta}{2\gamma}-z\right)^m.(a+bz^2)^p.dz.$$

Ist aber m eine ganze positive Zahl, so läßt sich das Binom

$\left(\frac{\beta}{2\gamma}-z\right)^m$ in eine endliche Anzahl Glieder entwickeln, und man wird dann eine eben so große Anzahl von Integralen der Form

$$\int z^r \cdot (a + b z^2)^p dz$$

erhalten, die man nach dem Vorhergehenden (§. 144) angeben kann.

§. 149. (Das Integral $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{X}}$ auf $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ bringen.) Setzt man auch hier, der Kürze wegen, $X = a + bx + cx^2$, und differentiirt man die Größe $x^{m-1} X$, so erhält man

$$d.x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} = \frac{(m-1) x^{m-2} X dx}{\sqrt{X}} + \frac{x^{m-1}(b+2cx) dx}{2\sqrt{X}} \quad \text{oder}$$

$$d.x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} = \frac{a(m-1)}{\sqrt{X}} x^{m-2} dx + \frac{b(2m-1)}{2\sqrt{X}} x^{m-1} dx + \frac{c m x^m dx}{\sqrt{X}},$$

also auch, wenn man vor jedes dieser Glieder das Integralzeichen $\int$ setzt, da

$$\int d.x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} = x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} \quad \text{ist,}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{m-1} X^{\frac{1}{2}}}{cm} - \frac{b(2m-1)}{2cm} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{X}} - \frac{a(m-1)}{cm} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{X}}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck m statt $2-m$, so erhält man

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a(m-1)x^{m-1}} - \frac{b(2m-3)}{2a(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{X}} - \frac{c(m-2)}{a(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{X}}.$$

I. Um eben so das Integral $\int x^m dx \sqrt{X}$ auf $\int x dx \sqrt{X}$ und $\int dx \sqrt{X}$ zu bringen, differentiirt man das Produkt $x^{m-1} X^{\frac{3}{2}}$, so hat man

$$d.x^{m-1} X^{\frac{3}{2}} = (m-1) x^{m-2} X^{\frac{3}{2}} dx + \tfrac{3}{2} x^{m-1} (b+2cx) X^{\frac{1}{2}} dx,$$

woraus, wie zuvor, folgt:

$$\int x^m dx \sqrt{X} = \frac{x^{m-1} X^{\frac{3}{2}}}{c(m+2)} - \frac{b(2m+1)}{2c(m+2)} \int x^{m-1} dx \sqrt{X} - \frac{a(m-1)}{c(m+2)} \int x^{m-2} dx \sqrt{X},$$

wo $X = a + bx + cx^2$ ist.

Das Vorhergehende genügt, die Formeln der Nr. IV. der erwähnten Tafel zu erklären.

§. 150. (Integral der Form $\int x^q dx (ax^r + bx^s)^p$.) Da sich dieses Integral auch so darstellen läßt:

$$\int x^{q+rp} dx (a + bx^{s-r})^p,$$

so setze man $q + rp = m$ und $s - r = n$, wodurch man wieder die Form

$$\int x^m dx (a + bx^n)^p$$

erhält, die wir schon oben (Kap. XXII.) behandelt haben, so daß sich aus den dort (§. 144) gegebenen Ausdrücken auch leicht die folgenden Reductionsformeln ableiten lassen, wo der Kürze wegen

$X = 2ax - x^2$ gesetzt wurde,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{X}}{m} + \frac{(2m-1)a}{m} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(2m-1)ax^m} + \frac{(m-1)}{(2m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{X}} \text{ u. s. w.}$$

M. s. die am Ende beygefügte Tafel Nr. III.

§. 151. (Integrale der Form $\int \frac{x^r dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$.) Integrale dieser Form lassen sich durch Zerlegung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

in seine Partialbrüche, nach §. 139 und 140, auf die bereits früher betrachteten Ausdrücke

$$\int \frac{x^m dx}{(a+x)^p} \quad \text{oder} \quad \int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^p}$$

zurückführen. Ist z. B. $dy = \frac{x dx}{(x+a)(x+b)}$ gegeben, so findet man

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x+a} - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x+b},$$

also ist auch

$$y = \frac{1}{b-a} \int \frac{x dx}{x+a} - \frac{1}{b-a} \int \frac{x dx}{x+b}.$$

Da aber

$$\int \frac{x dx}{x+a} = x - a \log. (x+a), \quad \text{und eben so}$$

$$\int \frac{x dx}{x+b} = x - b \log. (x+b) \quad \text{ist, so hat man}$$

$$y = \frac{1}{b-a} [b \log. (x+b) - a \log. (x+a)].$$

Ist in einem zweyten Beyspiele

$$dy = \frac{dx}{(x^2 + ax + b)(x + c)},$$

gegeben, so setze man nach §. 139 und 140,

$$\frac{1}{(x^2 + ax + b)(x + c)} = \frac{A + Bx}{x^2 + ax + b} + \frac{C}{x + c},$$

so ist $A = \frac{c-a}{m}$, $B = -\frac{1}{m}$ und $C = \frac{1}{m}$, wo $m = c^2 - ac + b$ ist.

Dieß gibt daher

$$y = \frac{c-a}{m}\int\frac{dx}{x^2 + ax + b} - \frac{1}{m}\int\frac{x\,dx}{x^2 + ax + b} + \frac{1}{m}\int\frac{dx}{x + c}.$$

Da aber

$$\int\frac{dx}{x + c} = \log.(x + c) \quad \text{und}$$

$$\int\frac{(2x + a)\,dx}{x^2 + ax + b} = \log.(x^2 + ax + b)$$

ist, so hat man auch

$$y = \frac{c - \frac{1}{2}a}{c^2 - ac + b}\left[\int\frac{dx}{x^2 + ax + b} + \frac{1}{2c - a}\log.\frac{(x + c)^2}{x^2 + ax + b}\right],$$

wo das Integral

$$\int\frac{dx}{x^2 + ax + b}$$

schon in §. 138 gegeben ist.

Auf diese Weise wird man die Formeln der Nr. V. der erwähnten Tabelle erläutern.

XXIV.

Integration der trigonometrischen und logarithmischen Differentialausdrücke.

---

§. 152. (Integrale $\int dx \sin.^m x \cos.^n x$, $\int dx \sin.^m x$, $\int dx \cos.^m x$.) Setzt man in den sechs Gleichungen des §. 144

statt p die Größe $\frac{1}{2}(n-1)$,
» n » » 2,
» $a = -b$ » » 1,
» x » » $\sin. x$,

so erhält man sofort die sechs ersten Formeln der Nr. VI. der angehängten Tafel. Diese Formeln führen, wenn m und n ganze Zahlen sind, das gegebene Integral

$$\int dx \sin.^m x \cos.^n x,$$

zuletzt auf die einfachen Formeln zurück:

$$\int dx \sin. x = - \cos. x,$$
$$\int dx \cos. x = \sin. x,$$
$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \tang. \frac{x}{2},$$
$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = \log. \tang. x \quad \text{und}$$
$$\int dx \tang. x = - \log. \cos. x.$$

I. Ausdrücke der Form

$$dx \sin.^m x \quad \text{und} \quad dx \cos.^m x$$

lassen sich sofort integriren, wenn man statt $\sin.^m x$ und $\cos.^m x$ die oben (§. 49) gegebenen Werthe dieser Größen in Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel x verwandelt.

Ist z. B. $dy = dx \sin.^3 x$ gegeben, so hat man

$$\sin.^3 x = \tfrac{3}{4} \sin. x - \tfrac{1}{4} \sin. 3x, \quad \text{also auch}$$
$$y = - \tfrac{3}{4} \cos. x + \tfrac{1}{12} \cos. 3x.$$

II. Eben so wird man

$$dy = \int dx \sin. mx \cos. nx$$

integriren, wenn man nach einem bekannten Ausdruck setzt:

$$\sin. mx \cos. nx = \tfrac{1}{2} \sin. (m+n) x + \tfrac{1}{2} \sin. (m-n) x.$$

§. 153. (Integrale $\int X (\log. x)^n . dx$.) Da das Produkt $u\nu$ von zwey veränderlichen Größen u und ν das Differential gibt:

$$d . u\nu = u d\nu + \nu du,$$

so hat man auch, wenn man von jedem Gliede dieser Ausdrücke das Integral nimmt:

$$\int u d\nu = u\nu - \int \nu du \quad . \; . \; . \quad (A),$$

woraus folgt, daß in allen den Fällen, wo eines der beyden Integrale

$$\int u d\nu \quad \text{oder} \quad \int \nu du$$

bekannt ist, auch das andere als gegeben betrachtet werden kann. Diese sogenannte theilweise Integration, deren wir uns schon öfter

im Vorhergehenden bedient haben, kann besonders hier mit Nutzen angewendet werden (vergl. §. 138, III.).

Ist der Ausdruck

$$y = \int X (\log. x)^n . dx$$

gegeben, wo X irgend eine Funktion von x bezeichnet, so setze man

$$u = (\log. x)^n \quad \text{und} \quad dv = X dx, \quad \text{so wird}$$

$$du = n (\log. x)^{n-1} \frac{dx}{x} \quad \text{und} \quad v = \int X dx.$$

Setzt man der Kürze wegen den letzten Ausdruck

$$\int X dx = X',$$

so erhält man, nach der Gleichung (A)

$$\int X (\log. x)^n . dx = X' (\log. x)^n - n \int \frac{X'}{x} (\log. x)^{n-1} dx \ldots (a),$$

oder auch, wenn man in diesem Ausdrucke $1 - n$ statt n setzt:

$$\int \frac{X' dx}{x (\log. x)^n} = \frac{-X'}{(n-1) (\log. x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{X dx}{(\log. x)^{n-1}} \ldots (b),$$

wo also $X = \frac{d . X'}{dx}$ ist.

Ex. Ist $X = x^m$, so ist

$$X' = \int X dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

also auch die erste (a) der vorhergehenden Gleichungen

$$\int x^m (\log. x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\log. x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log. x)^{n-1} dx.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke statt n die Größen $n-1$, $n-2$, $n-3 \ldots$, so erhält man

$$\int x^m (\log. x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big[(\log. x)^n - \frac{n}{m+1} (\log. x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} (\log. x)^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} (\log. x)^{n-3} + \ldots \Big]$$

eine endliche Reihe, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Für den besondern Fall $m = -1$ hat man

$$\int \frac{(\log. x)^n dx}{x} = \frac{(\log. x)^{n+1}}{n+1}.$$

Eben so erhält man durch die zweyte (b) der vorhergehenden Gleichungen

$$\int \frac{x^m dx}{(\log. x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{n-1}\left[\frac{1}{(\log. x)^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-2)(\log. x)^{n-2}} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)(\log. x)^{n-3}} + \ldots\right],$$

auf welchem Wege man endlich zu dem letzten Gliede oder zu deren Integral kömmt:

$$\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}\int \frac{x^m dx}{\log. x}.$$

I. Setzt man $z = x^{m+1}$, so wird dieses Integral

$$\int \frac{x^m dx}{\log. x} = \int \frac{dz}{\log. z}.$$

Um das letzte Integral zu finden, hat man, nach dem Vorhergehenden (§. 43),

$$a^x = 1 + x \log. a + \frac{x^2}{2}(\log. a)^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}(\log. a)^3 + \ldots$$

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdrucks durch $\frac{dx}{x}$ und integrirt diese Produkte, so hat man

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \log. x + x \log. a + \frac{(x \log. a)^2}{2^2} + \frac{(x \log. a)^3}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x \log. a)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4^2} + \ldots$$

Ist nun $a^x = z$, so ist

$$x \log. a = \log. z, \quad dx = \frac{dz}{z \log. a} \quad \text{und}$$

$$\log. x = \log. (\log. z) - \log. (\log. a).$$

Läßt man daher die constante Größe $-\log. (\log. a)$ weg, da man sie als in der allgemeinen Constante C der Integration begriffen annehmen kann, die überhaupt jedem Integral (nach §. 135) beygefügt werden muß, so erhält man

$$\int \frac{dz}{\log. z} = \log. (\log. z) + \log. z + \frac{(\log. z)^2}{1 \cdot 2^2} + \frac{(\log. z)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3^2} + \frac{(\log. z)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2},$$

und man nennt diesen Ausdruck $\int \frac{dz}{\log. z}$ den Integral-Logarithmus von z.

§. 154. (Integral $\int X a^x dx$.) Setzt man in der Gleichung (A) des §. 153 die Größe $u = X$ und $dv = a^x dx$, also auch

$$du = dX \quad \text{und} \quad v = \frac{a^x}{\log. a},$$

so erhält man

$$\int X a^x dx = \frac{X a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int \left(\frac{dX}{dx}\right) a^x dx,$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrucke statt X die Größe $\left(\frac{dX}{dx}\right)$ setzt:

$$\int\left(\frac{dX}{dx}\right)a^x dx = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)a^x dx,$$

und eben so

$$\int\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)a^x dx = \frac{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)a^x dx \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, so erhält man

$$\int X a^x dx =$$
$$\frac{a^x}{\log. a}\left[X - \frac{1}{\log. a}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{1}{(\log. a)^2}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \frac{1}{(\log. a)^3}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) + \ldots\right].$$

Ist nun X eine solche Funktion von x, daß für irgend einen Werth von n der Differential-Coefficient $\left(\frac{d^nX}{dx^n}\right)$, also auch alle folgenden verschwinden, so bricht die vorhergehende Reihe ab.

Ex. I. Ist $X = x^n$, so findet man

$$\int x^n . a^x dx =$$
$$\frac{a^x}{\log. a}\left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{\log. a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(\log. a)^2} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(\log. a)^n}\right].$$

Ex. II. Ist aber $X = \frac{1}{x^n}$, so setze man wieder

$$u = a^x \quad \text{und} \quad dv = \frac{dx}{x^n}, \text{ also auch}$$

$$v = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},$$

wodurch die Gleichung (A) des §. 153 in folgende übergeht:

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log. a}{(n-1)}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}.$$

Behandelt man diesen Ausdruck wie zuvor, indem man n in n — 1, n — 2, n — 3... übergehen läßt, so findet man

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}\left[1 + \frac{x\log. a}{n-2} + \frac{(x\log. a)^2}{(n-2)(n-3)}\right.$$
$$\left. + \frac{(x\log. a)^3}{(n-2)(n-3)(n-4} + \ldots + \frac{(x\log. a)^{n-2}}{(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1}\right]$$
$$+ \frac{(\log. a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1}\int\frac{a^x x d}{x}.$$

Wir kommen daher hier in dem letzten Gliede der Entwicklung auf das Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$, oder auf den bereits oben (§. 153, I) angeführten Integral-Logarithmus, da man, wenn man $a^x = z$ setzt, erhält:

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \int \frac{dz}{\log. z}.$$

Über die vorhergehenden Integrale s. m. die Nr. VI. der angehängten Tabelle.

XXV.

Integration durch Reihen.

§. 155. (Integral $\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n}$ durch eine Reihe.) Wenn alle vorhergehenden Versuche, ein vorgelegtes Differential auf einen einfacheren Ausdruck, dessen Integral man bereits kennt, zurückzuführen, nicht zum Zwecke führen, so bleibt nichts mehr übrig, als das gegebene Differential durch Entwicklung desselben in eine Reihe aufzulösen, und dann die Glieder desselben einzeln zu integriren. Daß die so erhaltenen Reihen zur Ausübung nur brauchbar sind, wenn sie convergiren, ist für sich klar.

Wäre z. B. $dy = \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2}$ gegeben, so würde man, wenn auch das gesuchte Integral $y = a$ arc. tang. $\frac{x}{a}$ noch nicht bekannt wäre, durch die Division der Einheit durch $a^2 + x^2$ erhalten:

$$y = dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{x^4 dx}{a^4} - \ldots,$$

wo dann die Integration der einzelnen Glieder gibt:

$$y = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \ldots,$$

wenn man annimmt, daß x mit y zugleich verschwindet, oder daß die Constante der Integration (§. 135) gleich Null ist. Dieß ist aber derselbe Ausdruck, welchen wir oben (§. 46) für a arc. tang. $\frac{x}{a}$ erhalten haben.

Ist $dy = \frac{x^m dx}{a^n + x^n}$ gegeben, so findet man

$$\frac{x^m}{a^n + x^n} = \frac{x^m}{a} - \frac{x^{m+n}}{a^{2n}} + \frac{x^{m+2n}}{a^{3n}} - \ldots \text{ oder auch}$$

$$\frac{x^m}{x^n + a^n} = x^{m-n} - a^n x^{m-2n} + a^{2n} x^{m-3n} - \ldots$$

und daher

$$\text{entweder } y = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)\,a^{2n}} + \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)\,a^{3n}} - \ldots$$

$$\text{oder } y = \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} - \frac{a^n . x^{m-2n+1}}{m-2n+1} + \frac{a^{2n} . x^{m-3n+1}}{m-3n+1} - \ldots$$

Ist x sehr klein, so convergirt die erste dieser Reihen, und die zweyte, wenn x sehr groß ist.

§. 156. (Integral $y = \int x^m dx\, (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$.) Wir haben bereits oben (§. 142 und 144) die Fälle angegeben, in welchen sich dieser Ausdruck integriren läßt. Für alle anderen Fälle wird man ihn daher in Reihen entwickeln.

Es ist aber, nach Newtons Binom

$$(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} \left(1 + \frac{b}{a} x^n\right)^{\frac{r}{s}}$$

$$= a^{\frac{r}{s}} \left[1 + \frac{r}{s} . \frac{b}{a} x^m + \frac{r(r-s)}{2s^2} . \frac{b^2}{a^2} x^{2m} + \ldots\right],$$

oder auch

$$(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{rn}{s}} (b + ax^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$= x^{\frac{rn}{s}} . b^{\frac{r}{s}} \left[1 + \frac{r}{s} . \frac{a}{b} x^{-m} + \frac{r(r-s)}{2s^2} . \frac{a^2}{b^2} x^{-2m} + \ldots\right],$$

so daß man daher hat:

$$y = a^{\frac{r}{s}} \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{r}{s} . \frac{b}{a} . \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{r(r-s)}{2s^2} . \frac{b^2}{a^2} . \frac{x^{2m+n+1}}{2m+n+1} + \ldots\right]$$

und

$$y = b^{\frac{r}{s}} \left[\frac{sx^t}{rn + s(m+1)} + r . \frac{a}{b} . \frac{x^{t-m}}{rn + s(m-n+1)} + \frac{r(r-s)}{2s} . \frac{a^2}{b^2} . \frac{x^{t-2n}}{rn + s(m-2n+1)} + \ldots\right],$$

wo $t = m + 1 + \frac{rn}{s}$ ist, und wo die erste Reihe nach den steigenden, die zweyte aber nach den fallenden Potenzen von x fortgeht.

§. 157. (Integral $y = \int dx \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}$.) Da

$$\sqrt{1 - e^2 x^2} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \ldots,$$

so findet man sofort

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \tfrac{1}{2} e^2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \ldots.$$

Allein diese Integrale sind bereits oben (§. 146) gefunden worden. Substituirt man sie daher in der gegenwärtigen Reihe, so erhält man

$$y = \text{arc. sin. } x + \tfrac{1}{2} e^2 \left[\tfrac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} - \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } x\right]$$
$$+ \frac{1.1}{2.4} e^4 \left[\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1.3}{2.4} x\right) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1.3}{2.4} \text{arc.sin.} x\right]$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left[\left(\frac{x^5}{6} + \frac{1.5}{4.6} x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x\right) \sqrt{1 - x^2}\right.$$
$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6} \text{arc. sin. } x\right] + \ldots,$$

und diese Reihe convergirt, wenn e sehr klein ist.

I. Eben so findet man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(a + x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4 a^2 \sqrt{a}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \ldots.$$

§. 158. (Bernoulli's und Taylor's Reihen.) Wenn man in der Gleichung (A) des §. 153, das heißt, wenn man in der Gleichung

$$\int u\, d\nu = u\nu - \int \nu\, du \quad \text{setzt:}$$
$$u = X \quad \text{und} \quad \nu = x, \quad \text{so erhält man}$$
$$\int X dx = Xx - \int x \left(\frac{dX}{dx}\right) dx.$$

Dieselbe Gleichung (A) gibt aber, wenn

$$u = \left(\frac{dX}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \nu = \tfrac{1}{2} x^2 \quad \text{ist:}$$
$$\int x \left(\frac{dX}{dx}\right) dx = \frac{x^2}{2} \left(\frac{dX}{dx}\right) - \tfrac{1}{2} \int x^2 \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) dx,$$

und eben so, wenn

$$u = \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) \quad \text{und} \quad \nu = \tfrac{1}{3} x^3 \quad \text{ist:}$$
$$\int x^2 \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) - \tfrac{1}{3} \int x^3 \left(\frac{d^3 X}{dx^3}\right) dx.$$

Setzt man dieß fort, und substituirt dann diese Größen in einander, so erhält man

$$\int X\,dx = Xx - \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \frac{x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) - \ldots,$$

welches die gesuchte, von Joh. Bernoulli gegebene Reihe ist, durch welche man jedes Integral der Form $\int X\,dx$ in eine nach den Potenzen von x fortgehende Reihe entwickeln kann.

Ex. Ist $X = \frac{1}{1+x}$, also auch

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2},\quad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) = \frac{1.2}{(1+x)^3}\quad \text{u. f.},$$

so findet man

$$y = \int \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \ldots,$$

welche Reihe also auch gleich $\log.(1+x)$ ist, wie man findet, wenn man in dem Ausdrucke $\log.(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots$ des §. 42 die Größe x in $\frac{x}{1+x}$ verwandelt.

I. Da die Quotienten $\left(\frac{dX}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)\ldots$ öfter eine unbequeme Gestalt annehmen, so kann man die Größe X von einer anderen ω abhängen lassen, die selbst wieder eine Funktion x ist, so daß man hat (§. 30, I.)

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right).$$

Setzen wir überdieß, der Kürze wegen,

$$dp = x\,d\omega,\quad dp' = p\,d\omega,\quad dp'' = p'\,d\omega\quad \text{u. f.}$$

Sey nun wieder in der Gleichung (A) des §. 153 die Größe $u = X$ und $v = x$, so erhält man, wie zuvor,

$$\int X\,dx = Xx - \int\left(\frac{dX}{dx}\right)x\,dx,$$

oder nach unserer eingeführten Bezeichnung

$$\int X\,dx = Xx - \int\left(\frac{dX}{d\omega}\right)dp.$$

Ist dann in der Gleichung (A) die Größe

$$u = \left(\frac{dX}{d\omega}\right)\quad \text{und}\quad v = p,$$

so hat man

$$\int\left(\frac{dX}{d\omega}\right)dp = \left(\frac{dX}{d\omega}\right)p - \int\left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right)dp'.$$

Ist ferner

$$u = \left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right) \quad \text{und} \quad d\nu = dp' = p\,d\omega \quad \text{oder} \quad \nu = p',$$

so hat man

$$\int\left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right)dp' = \left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right)p' - \int\left(\frac{d^3X}{d\omega^3}\right)p'' \quad \text{u. s. f.}$$

Auf diese Weise erhält man

$$\int X\,dx = Xx - p\left(\frac{dX}{d\omega}\right) - p'\left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right) - p''\left(\frac{d^3X}{d\omega^3}\right) - \ldots,$$

welches die von Taylor für das Integral $\int X\,dx$ gegebene Reihe ist.

Ex. Sey

$$dy = dx\sqrt{a^2 - x^2}$$

gegeben. Hier ist also

$$X = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{und daher} \quad \left(\frac{dX}{dx}\right) = -\frac{x}{X}.$$

Setzt man daher $d\omega = x\,dx$, so wird man haben

$$\left(\frac{dX}{d\omega}\right) = -\frac{1}{X}, \quad \left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right) = -\frac{1}{X^3},$$

$$\left(\frac{d^3X}{d\omega^3}\right) = -\frac{3}{X^5}, \quad \left(\frac{d^4X}{d\omega^4}\right) = -\frac{3.5}{X^7} \quad \text{u. s.}$$

Ferner ist

$$p = \int x\,d\omega = \int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3,$$

$$p' = \frac{1}{3.5}x^5, \quad p'' = \frac{1}{3.5.7}x^7 \quad \text{u. s.},$$

so daß man daher für das gesuchte Integral erhält:

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = Xx + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{X} - \frac{1.1}{3.5}\cdot\frac{x^5}{X^3} + \frac{1.1.3}{3.5.7}\cdot\frac{x^7}{X^5} - \ldots$$

XXVI.

Allgemeine annähernde Methode, begränzte Integrale zu bestimmen.

---

§. 159. (**Begränzte Integrale.**) Sey Xdx ein gegebener Differentialausdruck, dessen Integral die Größe

$$X' + C$$

vorstellen mag, wo C die Constante der Integration bezeichnet, die, nach dem Vorhergehenden (§. 135), jedem Integrale hinzugefügt werden muß. Da diese Constante im Allgemeinen unbestimmt ist, und ihr Werth erst dann angegeben werden kann, wenn man den Werth des Integrals X' für einen bestimmten Werth von x kennt (wenn man z. B. weiß, daß $X' = A$ für $x = a$ wird), so nennt man diese Integrale *unbestimmte* oder unbegränzte Integrale.

Hat man z. B. den Differentialausdruck $dy = x^2 dx$ gegeben, so ist bekanntlich das Integral desselben

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 + C,$$

ein unbestimmtes Integral, da der letzte Ausdruck gilt, wo man auch, das x zu zählen, anfangen oder aufhören mag. Nehmen wir aber z. B. an, daß wir diese Größe x mit dem Werthe $x = a$ zu zählen anfangen, und daß für diesen Werth von x die Größe y oder das gesuchte Integral gleich Null sey, so hat man

$$o = \tfrac{1}{3}a^3 + C,$$

und dadurch ist die Constante C der Integration bestimmt worden, da man hat $C = -\tfrac{1}{3}a^3$, so daß also unser, wenigstens in seinem Anfange bestimmte Integral gleich ist

$$y = \tfrac{1}{3}(x^3 - a^3),$$

und dieser Ausdruck von y gilt für *jeden* Werth von x, wie groß oder wie klein man auch denselben annehmen mag. Er ist daher in Beziehung auf seine Ausdehnung, auf das *Ende* von der veränderlichen Größe x, noch immer unbestimmt. Will man aber auch dieses Ende von x, oder will man auch die zweyte Gränze des Integrals festsetzen, und nimmt man z. B. an, daß das Integral mit $x = a$ anfangen, und mit $x = b$ enden soll, so hat man ein an seinen beyden Gränzen be-

stimmtes Integral, und solche Integrale werden begränzte Integrale (Intégrales définies) genannt. Man pflegt sie auf folgende Art zu bezeichnen:

$$\int_b^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3),$$

indem man dem Integralzeichen $\int$ die beyden Werthe von x beyfügt, für welchen das Integral anfangen und enden soll.

Wir haben oben (§. 146) die unbestimmten Integrale des Ausdrucks

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

gegeben, wo m die natürlichen Zahlen 1, 2, 3... bezeichnet. Sucht man aber die begränzten Integrale dieses Ausdrucks, und zwar zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$, so hat man das unbestimmte Integral

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + C;$$

für $x = 0$ wird $y' = 1$, und für $x = 1$ wird $y'' = 0$. Subtrahirt man also den zweyten dieser Werthe von y von dem ersten, so erhält man das begränzte Integral

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 1.$$

Eben so war das unbestimmte Integral

$$y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{arc. sin. } x.$$

Da aber arc. sin. $0 = 0$ und arc. sin. $1 = \frac{1}{2}\pi$ ist, so hat man für das begränzte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Behandelt man eben so alle übrigen, in §. 146 angeführten Integrale, so erhält man, wenn man der Kürze wegen X statt $\sqrt{1 - x^2}$ schreibt:

$$\int_0^1 \frac{dx}{X} = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{X} = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{X} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{"} \qquad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{X} = \tfrac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{X} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{"} \qquad \int_0^1 \frac{x^5\,dx}{X} = \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\,dx}{X} = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{"} \qquad \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{X} = \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7} \quad \text{u. f.}$$

so daß man daher allgemein erhält:

$$\int_0^{\prime} \frac{x^{2n}\,dx}{X} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\quad 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{und}$$

$$\int_0^{\prime} \frac{x^{2n+1}\,dx}{X} = \frac{2.4.6.8\ldots\quad 2n}{3.5.7.9\ldots(2n+1)},$$

und daher auch

$$\int_0^{\prime} \frac{x^{2n}\,dx}{X} \cdot \int_0^{\prime} \frac{x^{2n+1}\,dx}{X} = \frac{1}{2n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wir werden diese durch das gesammte Gebiet der mathematischen Analysis sehr wichtigen begränzten Integrale in einem der folgenden Abschnitte dieser Schrift näher betrachten.

§. 160. **(Analogie der Integrale mit den Summen der Differentiale.)** Nennt man $F(x) + C$ das unbestimmte Integral des Differentialausdrucks $f(x)\,dx$, und nimmt man dieses Integral zwischen den beyden Gränzen $x = a$ und $x = b$, so hat man, nach §. 159, für dieses so begränzte Integral den Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Wenn man nun der Größe x nach und nach unzählig viele Werthe beylegt, die in unendlich kleinen Abstufungen von $x = a$ bis $x = b$ wachsen, und wenn man diese allmähligen Vergrößerungen von x durch dx bezeichnet, so läßt sich leicht zeigen, daß die Summe aller so entstehender Werthe von $f(x)\,dx$ gleich dem begränzten Integrale

$$F(b) - F(a) \quad \text{ist.}$$

Denn wenn man, nach dem Geiste der Differentialrechnung, die höheren Differentiale gegen das erste wegläßt, so hat man, schon nach dem ersten Begriff eines Differentials, den Ausdruck

$$F(x + dx) - F(x) = f(x)\,dx.$$

Bezeichnet man demnach durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ eine unbegränzte Anzahl von unendlich kleinen Größen, so daß man hat

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n = b - a,$$

und nimmt man für die beyden Größen x und dx nach und nach die Größenpaare

$$a \quad \text{und} \quad \delta_1,$$
$$a + \delta_1 \quad » \quad \delta_2,$$

$$a + \delta_1 + \delta_2 \text{ und } \delta_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b - \delta_n \text{ , } \delta_n,$$

so erhält man

$$F(a+\delta_1) - F(a) = f(a).\delta_1,$$
$$F(a+\delta_1+\delta_2) - F(a+\delta) = f(a+\delta_1).\delta_2,$$
$$F(a+\delta_1+\delta_2+\delta_3) - F(a+\delta+\delta_2) = f(a+\delta_1+\delta_2).\delta_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(b) - F(b-\delta_n) = f(b-\delta_n).\delta_n,$$

und die Summe dieser Gleichungen ist

$$F(b)-F(a) = f(a).\delta_1 + f(a+\delta_1).\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2).\delta_3 + \ldots + f(b-\delta_n).\delta_n,$$

wodurch der oben ausgesprochene Satz bestätiget wird.

Man kann sich diesen Satz versinnlichen, wenn man sich durch die Größen δ_1, δ_2 ... die Zuwachse der Abscissen, und durch $f(a)$, $f(a+\delta_1)$... die zu diesen Abscissen gehörenden Ordinaten einer Curve MNPQ (Fig. 31) vorstellt, so daß $AB=a$, $AU=b$ und $BC=\delta_1$, $CD=\delta_2$ ...; ferner $BM=f(a)$, $CN=f(a+\delta_1)$..., und endlich die Flächenräume $AHMB = F(a)$, $AHNC = F(a+\delta_1)$... und $AHVU = F(b)$ ist.

Übrigens setzt das Vorhergehende, wie man sieht, voraus, daß die Funktion $f(x)$ zwischen den beyden Gränzen $x=a$ und $x=b$ stetig fortgehe, und nicht etwa irgendwo unendlich groß werde. Wir werden auf diese wichtige Bemerkung später wieder zurückkommen.

§. 161. (Allgemeine annähernde Integration.) Alle bisher betrachteten Integralausdrücke lassen sich unter der Form $\int f(x)\,dx$ darstellen, und man kann, nach §. 89, diesen Ausdruck immer als die Fläche einer Curve betrachten, von welcher x die Abscisse und $y=f(x)$ die dazu gehörende Ordinate ist. Nimmt man die Quadratur dieser Fläche zwischen den beyden Gränzen $x=a$ und $x=b$, so erhält man das begränzte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Es sey also der Ausdruck

$$y = \int f(x)\,dx$$

gegeben, wo dieses Integral durch keines der bisher angeführten Mit-

tel; selbst nicht durch Reihen (§. 155), zu finden ist, ja wo selbst die Funktion f(x) noch unbekannt seyn kann, so daß man bloß die Werthe dieser Funktion für einige gegebene Werthe ihrer Stammgröße x kennt. Nehmen wir z. B. an, daß man folgende zusammenhängende Werthe von x und f(x) habe:

$$\begin{array}{llllll} x \ldots & o, & a, & b, & c, & d \ldots \\ f(x) \ldots & A, & B, & C, & D, & E \ldots \end{array}$$

Dieß vorausgesetzt, sieht man leicht, daß f(x) unter die folgende Form gebracht werden kann:

$$f(x) = \frac{x-a \,.\, x-b \,.\, x-c \,.\, x-d \ldots}{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d} A$$
$$+ \frac{x \,.\, x-b \,.\, x-c \,.\, x-d \ldots}{a \,.\, a-b \,.\, a-c \,.\, a-d \ldots} B$$
$$+ \frac{x \,.\, x-a \,.\, x-c \,.\, x-d \ldots}{b \,.\, b-a \,.\, b-c \,.\, b-d \ldots} C + \text{u. f.}$$

(M. s. Cauchy's Cours d'Analyse. I. p. 525.)

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdrucks durch dx, und setzt ihnen dann das Integralzeichen ∫ vor, so erhält man

$$y = \int f(x)\, dx = \frac{A}{a.b.c.d\ldots} \int dx.a-x.b-x.c-x.d-x\ldots$$
$$+ \frac{B}{a.b-a.c-a.d-a\ldots} \int xdx.b-x.c-x.d-x\ldots$$
$$+ \frac{C}{b.a-b.c-b.d-b\ldots} \int xdx.a-x.c-x.d-x\ldots$$
$$+ \frac{D}{c.a-c.b-c.d-c\ldots} \int xdx.a-x.b-x.d-x\ldots$$

u. s. w.

Hat man daher nur zwey Werthe von f(x) = A, und B für x = o und a, so wird der vorhergehende Ausdruck

$$y = \int_o^a f(x)\, dx = \frac{A}{a} \int dx\,(a-x) + \frac{B}{a} \int x\, dx;$$

also auch, wenn man nach den Integrationen x = a setzt:

$$y = \tfrac{1}{2} a\,(A + B),$$

so daß dann die Fläche y, gleich dem arithmetischen Mittel, zwischen den Größen aA und aB ist.

Hat man aber drey Werthe von f(x) = A, B, C... für x = o, a, b, so geht der vorhergehende allgemeine Ausdruck in den folgenden über:

$$y = \int_0^b f(x)\,dx = \frac{A}{ab}\int dx\,(a-x)(b-x)$$
$$+ \frac{B}{a(b-a)}\int x\,dx\,(b-x) + \frac{C}{b(a-b)}\int x\,dx\,(a-x).$$

Setzt man hier, nach den Integrationen $x = b$, so erhält man für den gesuchten Werth des gegebenen Integrals

$$y = \frac{Ab}{6a}(3a-b) + \frac{Bb^3}{6a(b-a)} + \frac{Cb(3a-2b)}{6(a-b)},$$

und so kann man fortgehen, indem man vier, fünf und mehr der gegebenen Größen $A, B, C \ldots$ in Betrachtung zieht. Allein viel einfacher werden diese resultirenden Gleichungen, wenn man die Differenzen der auf einander folgenden Werthe von x unter sich gleich groß nimmt, d. h. wenn man $b - a = c - b = d - c \ldots$ setzt. Auf diese Weise findet man für das Integral $y = \int f(x)\,dx$ zwischen den beyden Gränzen $x = a$ und $x = a + m$ nach der Ordnung folgende Ausdrücke:

$$\int_a^{a+m} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}m\,[f(a) + f(a+m)]$$
$$= \tfrac{1}{6}m\,[f(a) + 4f(a+\tfrac{1}{2}m) + f(a+m)]$$
$$= \tfrac{1}{8}m\,[f(a) + 3f(a+\tfrac{1}{3}m) + 3f(a+\tfrac{2}{3}m) + f(a+m)]$$

u. s. f.

Läßt man also die Größe $x = a$ durch gleiche Intervalle δ wachsen, so daß x nach der Ordnung gleich a, $a + \delta$, $a + 2\delta$, $a + 3\delta \ldots$ wird, bis endlich der letzte dieser Werthe von $x = b$ wird, so wird man unser zwischen diesen beyden Gränzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossenes Integral, auf folgende Weise darstellen.

I. Wenn man bloß zwey Werthe von x, nämlich $x = a$ und $x = b$ kennt:

$$y = \int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\delta\,[f(a) + f(b)].$$

II. Wenn man drey Werthe $x = a$, $a + \delta$ und b kennt:

$$y = \tfrac{1}{3}\delta\,[f(a) + 4f(a+\delta) + f(b)].$$

III. Wenn man vier Werthe $x = a$, $a + \delta$, $a + 2\delta$ und b kennt:

$$y = \tfrac{3}{8}\delta\,[f(a) + 3f(a+\delta) + 3f(a+2\delta) + fb].$$

IV. Wenn man fünf Werthe $x = a$, $a + \delta$, $a + 2\delta$, $a + 3\delta$ und b kennt:

$$y = \tfrac{2}{45}\delta\,[7f(a) + 32f(a+\delta) + 12f(a+2\delta) + 32f(a+3\delta) + 7f(b)]$$

u. s. f.

Ex. Um auf die vorhergehenden Ausdrücke ein specielles Beyspiel anzuwenden, sey

$$y = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

gegeben, so daß man daher das Integral $\int \frac{dx}{x}$ zwischen den beyden Gränzen $x = 1$ bis $x = 2$ in Zahlen angeben soll. Es ist bekannt, daß $y = \log. \text{nat.}\, 2 = 0.6931472$ ist, eine Zahl, welche die vorhergehenden Ausdrücke desto genauer wieder geben sollen, je weiter man in ihnen fortgeht.

Für unser Beyspiel ist $a = 1$ und $b = 2$, $f(a) = \frac{1}{a} = 1$, $f(a + \delta) = \frac{1}{a + \delta}$ und $f(b) = \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

Setzt man also in I. die Größe $\delta = 1$, so ist

$$y = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}) = 0.75.$$

In II. aber ist $\delta = \frac{1}{2}$, also auch

$$y = \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{2}) = 0.694.$$

In III. ist

$$\delta = \tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{8}(1 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{5} + \tfrac{1}{2}) = 0.69375.$$

In IV. endlich ist

$$\delta = \tfrac{1}{4} \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{90}(7 + \tfrac{128}{5} + \tfrac{48}{6} + \tfrac{128}{7} + \tfrac{7}{2}) = 0.693174,$$

also das letzte Resultat nur mehr um 0.000027 zu groß.

§. 162. (Andere Darstellung des Vorhergehenden.) Da diese ganz allgemeine Methode der Integration von so großer Wichtigkeit ist, so wird es nicht unangemessen seyn, sie noch auf eine andere Weise darzustellen.

Nehmen wir, wie zuvor, an, daß die Größe $x = a$ nach und nach um die kleine Größe δ wachse und in a, $a + \delta$, $a + 2\delta$, $a + 3\delta$, ... übergehe, bis sie endlich $a + n\delta = b$ wird, so daß demnach zwischen den beyden äußersten Werthen a und b eine Anzahl von $n - 1$ Zwischengliedern enthalten ist, und daß wieder, wie oben (§. 160), $F(x)$ das unbestimmte Integral von $\int f(x)\,dx$, also auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

das begränzte Integral $\int f(x)\,dx$ von $x = a$ bis $x = b$ ausdrücke.

Wenn nun a in seinen nächstfolgenden Werth $a + \delta$ übergeht, so

hat man, nach Taylor's Theorem (§. 39):

$$F(a+\delta) = Fa + \delta \cdot \frac{dFa}{da} + \frac{\delta^2}{1.2} \cdot \frac{d^2Fa}{da^2} + \frac{\delta^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3Fa}{da^3} + \ldots$$

Setzen wir der Kürze wegen $\frac{dfx}{dx} = f'x$, $\frac{d^2fx}{dx^2} = f''x$, u. s.

Da nun $Fx = \int fx.dx$ ist, so hat man auch $\frac{d.Fx}{dx} = fx$, und eben so $\frac{d.Fa}{da} = fa$, $\frac{d^2Fa}{da^2} = \frac{d.fa}{da} = f'a$ u. s., so daß daher der vorhergehende Ausdruck von $F(a+\delta)$ auch so geschrieben werden kann:

$$F(a+\delta) = Fa + \delta.fa + \tfrac{1}{2}\delta^2.f'a + \tfrac{1}{6}\delta^3.f''a + \ldots,$$

und ganz eben so erhält man auch für die nächstfolgenden Werthe

$$F(a+2\delta) = F(a+\delta) + \delta.f(a+\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2.f'(a+\delta) + \ldots$$
$$F(a+3\delta) = F(a+2\delta) + \delta.f(a+2\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2.f'(a+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(a+n\delta) = F(a+n\delta-\delta) + \delta.f(a+n\delta-\delta)\,\tfrac{1}{2}\delta^2.f+(a+n\delta-\delta) + \ldots$$

Addirt man aber alle diese Reihen zusammen und bemerkt, daß $n\delta = b - a$ ist, so erhält man

$$F(b) - F(a) = \delta.\Sigma f(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2.\Sigma f'(a+i\delta) + \tfrac{1}{6}\delta^3.\Sigma f''(a+i\delta) + \ldots \quad (a),$$

wo i nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., und wo Σ das Summenzeichen anzeigt, das sich auf die n Werthe von δ bezieht, die zwischen $i = 0$ und $i = n - 1$ enthalten sind, so daß man z. B. hat

$$\Sigma f(a+i\delta) = fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+n\delta-\delta).$$

Nimmt man nach und nach die Größen fx und f'x, oder f'x und f''x u. s. w. statt den Größen Fx und fx, so erhält man eben so

$$fb - fa = \delta.\Sigma f'(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2\,\Sigma f''(a+i\delta) + \ldots,$$
$$f'b - f'a = \delta.\Sigma f''(a+i\delta) + \ldots$$

Dieß vorausgesetzt, wird man, wenn man die dritten und höheren Potenzen der sehr kleinen Größe δ wegläßt, in der Gleichung (a)

statt $\tfrac{1}{2}\delta^2.\Sigma f'(a+i\delta)$ setzen können $\tfrac{1}{2}\delta(fb-fa) - \tfrac{1}{4}\delta^2(f'b-f'a)$,
und statt $\tfrac{1}{6}\delta^3.\Sigma f''(a+i\delta)$ » » $\tfrac{1}{6}\delta^2(f'b-f'a)$.

Diesem gemäß wird also auch die Gleichung (a) in folgende übergehen:

$$F(b) - F(a) = \delta.\Sigma f(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta.(fb - fa) - \tfrac{1}{1.2}\delta^2.(f'b - f'a);$$

oder was dasselbe ist, man wird haben

$$y=\int_a^b f(x)\,dx$$
$$=\delta.\left[\tfrac{1}{2}fa+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+n\delta-\delta)+\tfrac{1}{2}fb\right]$$
$$-\tfrac{1}{12}\delta^2.(f'b-f'a)\;.\;.\;.\;(A),$$

und dieser Ausdruck wird das gesuchte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ desto genauer darstellen, je kleiner die Größe δ oder $\frac{1}{n}(b-a)$ ist, und je langsamer die Funktion $f(x)$ zwischen ihren beyden Gränzen a und b sich ändert. In den meisten Fällen wird man das letzte, in δ^2 multiplicirte Glied, ganz weglassen können, so daß dann die Gleichung (A) nur die besondern Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben seyn können, ohne daß die Form dieser Funktion bekannt zu seyn braucht.

Ex. Wenden wir dieses auf unser vorhergehendes Beyspiel an, wo $y=\int_1^2\frac{dx}{x}$ zu suchen ist, so hat man $f(x)=\frac{1}{x}$, also auch

$$fa=\frac{1}{a},\quad fb=\frac{1}{b},\quad f(a+\delta)=\frac{1}{a+\delta},\quad f(a+2\delta)=\frac{1}{a+2\delta},\ \text{u. s.}$$

Nimmt man auch noch das letzte in δ^2 multiplicirte Glied der Gleichung (A) in Rücksicht, so ist

$$f'a=-\frac{1}{a^2}\quad\text{und}\quad f'b=-\frac{1}{b^2}.$$

Theilt man dann das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile, und nennt jeden dieser Theile δ, so ist $\delta=\frac{1}{n}(b-a)$, und daher die Gleichung (A)

$$\int_a^b\frac{dx}{x}=\delta.\left[\frac{1}{2}.\frac{1}{a}+\frac{1}{a+\delta}+\frac{1}{a+2\delta}+\frac{1}{a+3\delta}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a+(n-1)\delta}+\frac{1}{2}.\frac{1}{a+n\delta}\right]-\frac{1}{12}\delta^2\left[\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right],$$

oder da $a=1$ und $b=2$ ist:

$$y=\int_1^2\frac{dx}{x}=\delta\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{1+2\delta}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+(n-1)\delta}+\frac{1}{2(n+n\delta)}\right]-\frac{1}{16}\delta^2.$$

Nimmt man bloß drey Theile, oder ist $n=3$ und $\delta=\frac{1}{3}$, so hat man

$$y=\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{4}\right]-\tfrac{1}{144}=0.693056.$$

Nimmt man aber vier Theile, oder ist $n=4$ und $\delta=\frac{1}{4}$, so hat man

$$y=\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{5}+\tfrac{4}{6}+\tfrac{4}{7}+\tfrac{1}{4}\right]-\tfrac{1}{256}=0.69312\ \text{u. s. w.}$$

XXVII.

Integration der vollständigen Differentialausdrücke von zwey oder mehr veränderlichen Größen.

---

§. 163. (**Integration der vollständigen Differentialausdrücke für zwey Variable.**) Ist u eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y, so hat das Differential dieser Funktion (nach §. 54) die Form

$$du = Pdx + Qdy,$$

wo $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$ die partiellen Differential-Coefficienten von u in Beziehung auf x und y sind. Soll nun der gegebene Ausdruck $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential seyn, d. h. soll sich in der That ein endlicher Ausdruck von x und y angeben lassen, der das Integral von $Pdx + Qdy$ ist, so muß, nach §. 58, die Bedingungsgleichung bestehen:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Nehmen wir daher an, daß diese Bedingungsgleichung in der That Statt habe, und suchen wir das Integral u des gegebenen Ausdrucks $du = Pdx + Qdy$.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst die Gleichung $P = \frac{du}{dx}$ oder $du = Pdx$ bloß in Beziehung auf x integriren, so daß man hat

$$u = \int^{x} Pdx + Y,$$

wo Y, als eine noch unbestimmte Funktion von y, die Stelle der Constante der Integration (§. 135) vertritt. Setzen wir, der Kürze wegen, dieses Integral $\int^{x} Pdx = U$, so daß man hat

$$u = U + Y.$$

Um nun die Constante Y zu bestimmen, so gibt die letzte Gleichung, wenn man sie in Beziehung auf y differentiirt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dU}{dy}\right) + \frac{dY}{dy},$$

oder da $\left(\frac{du}{dy}\right) = Q$ ist:

$$dY = \left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right],$$

oder, wenn man integrirt:

$$Y = \int\left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right] dy.$$

Substituirt man aber den so gefundenen Werth von Y in der vorhergehenden Gleichung $u = U + Y$, so hat man für das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung $du = Pdx + Qdy$

$$u = U + \int\left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right] dy;$$

ein Ausdruck, der vollständig bestimmt werden kann, da die Größe $\left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right] = S$ bloß eine Funktion von y ist, die kein x enthält. Denn differentiirt man diese Größe bloß in Beziehung auf x, so hat man

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{d^2U}{dydx}\right),$$

oder da $\left(\frac{d^2U}{dydx}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right)$ ist:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right),$$

also vermöge der oben aufgestellten Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = 0,$$

zum Zeichen, daß die Größe S von x ganz unabhängig seyn muß.

I. Wäre man, statt von P, von der Größe Q ausgegangen, und hätte man das in Beziehung auf y genommene Integral

$$\int^{y} Qdy = V$$

gesetzt, so würde man für das gesuchte Integral des Ausdruckes $du = Pdx + Qdy$ erhalten haben

$$u = V + \int\left[P - \left(\frac{dV}{dx}\right)\right] dx,$$

wo wieder die Größe $P - \left(\frac{dV}{dx}\right)$ eine bloße Funktion von x ohne y ist.

Ex. I. Ist der Ausdruck $du = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ gegeben, welcher der Bedingungsgleichung (I) genügt, da $P = \frac{y}{x^2+y^2}$ und $Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$

ist, so hat man

$$U = \int^{x} \frac{y\,dx}{y^2 + x^2} = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} \text{ und } \left(\frac{dU}{dy}\right) = - \frac{x}{x^2 + y^2},$$

also auch

$$Q - \left(\frac{dU}{dy}\right) = 0,$$

und daher für das gesuchte Integral

$$u = \text{arc. tang.} \frac{x}{y}.$$

Ex. II. Ist der Ausdruck

$$du = \frac{dx}{x} + \frac{dx + dy}{2(x+y)} - \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

gegeben, welcher der Gleichung (I) ebenfalls genug thut, so hat man

$$Q = \frac{1}{2(x+y)} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ also auch}$$

$$V = \int^{y} Q\,dy = \tfrac{1}{2}\log.(x+y) - \sqrt{x^2+y^2} \text{ und } P - \left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{1}{x},$$

und daher das gesuchte Integral

$$u = \tfrac{1}{2}\log.(x+y) + \log.x - \sqrt{x^2+y^2}.$$

§. 164. (**Integration der vollständigen Differentialausdrücke von drey Variablen.**) Die Differentiale dieser Gattung haben die allgemeine Form

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

und wenn dieser Ausdruck ein vollständiges Differential, d. h. wenn er in der That integrabel seyn soll, so müssen zwischen den Größen P, Q, R die drey oben (§. 58, I) aufgestellten Bedingungsgleichungen Statt haben.

Dieß vorausgesetzt, wird man, um das Integral u zu finden, zuerst nach §. 163 das Integral von $P\,dx + Q\,dy$ suchen. Sey dieses Integrale gleich W, so hat man

$$u = \int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = W + Z,$$

wo Z bloß eine Funktion von Z seyn wird. Das vollständige Differential der letzten Gleichung ist aber, da W eine Funktion von x, y und z ist:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \left(\frac{dW}{dx}\right)dx + \left(\frac{dW}{dy}\right)dy + \left(\frac{dW}{dz}\right)dz + dZ.$$

Nimmt man daher je zwey der Variablen x, y, z als constant an, so erhält man

$$P = \left(\frac{dW}{dx}\right),\quad Q = \left(\frac{dW}{dy}\right) \quad \text{und} \quad R = \left(\frac{dW}{dz}\right) + \frac{dZ}{dz}.$$

Die letzte dieser drey Gleichungen gibt sofort

$$Z = \int \left[B - \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] dz,$$

und somit ist das gesuchte Integral

$$u = W + \int \left[R - \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] dz,$$

wo wieder $R - \left(\frac{dW}{dz}\right)$ eine bloße Funktion von z ist.

Ex. Sey die Gleichung gegeben

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zdx - xdz}{x^2 + z^2} + zdz,$$

die, wie man sieht, den drey Bedingungsgleichungen des §. 58, I. entspricht.

Setzt man nun $Pdx + Qdy = dW$, so erhält man, nach §. 163

$$W = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc. tang.} \frac{x}{z};$$

also ist auch

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x}{x^2 + z^2} \quad \text{und} \quad R - \left(\frac{dW}{dz}\right) = z$$

so wie

$$\int \left[R - \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] dz = \tfrac{1}{2} z^2,$$

und daher das gesuchte Integral

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc. tang.} \frac{x}{z} + \tfrac{1}{2} z^2.$$

Man sieht, wie sich dieß auch auf Funktionen von mehr als drey Variablen fortsetzen läßt.

XXVIII.

Integration der Differentialausdrücke der zweyten und höheren Ordnung.

---

§. 165. (Integral von $d^2 y = X dx^2$). Bisher haben wir nur die Ausdrücke der Form

$$dy = X dx$$

behandelt, wo X irgend eine Funktion von x bezeichnet. Es sey nun der Differentialausdruck

$$d^2 y = X dx^2$$

gegeben, wo X wieder eine Funktion von x ist. Da man diesen Ausdruck auch so schreiben kann:

$$\frac{d^2 y}{dx} = X dx,$$

so hat man sofort, wenn man dx als constant betrachtet, für das Integral des letzten Ausdrucks

$$\frac{dy}{dx} = \int X dx + C.$$

Setzt man dann $P = \int X dx$, so ist $dy = P dx + C dx$, und daher, wenn man wieder integrirt:

$$y = \int P dx + Cx + C',$$

wo C und C' die Constanten der beyden Integrationen sind. Stellt man den Werth von P wieder her, so hat man

$$y = \int dx \int X dx + Cx + C' \quad . \; . \; . \quad (I).$$

1, Man kann aber auch, mittelst der theilweisen Integration (§. 153), dieses doppelte Integral auf zwey einfache zurückführen. Denn setzt man in der Gleichung $\int u dv = uv - \int v du$ die Größe $u = P$ und $x = v$, so hat man

$$\int P dx = Px - \int x dP = x \int X dx - \int X x dx,$$

also auch für das gesuchte Integral

$$y = x \int X dx - \int X x dx \quad . \; . \; . \quad (II),$$

in welchem Ausdrucke man eigentlich

$$\int X dx + C \quad \text{statt} \quad \int X dx, \quad \text{und}$$

$$\int X x dx + C' \text{ statt } \int X x dx$$

setzen muß.

Ex. Ist die Gleichung $d^2 y = x^2 dx^2$ gegeben, so ist $X = x^2$ also auch

$$\int X dx = \tfrac{1}{3} x^3 \quad \text{und} \quad \int dx \int X dx = \int dx \,.\, \tfrac{1}{3} x^3 = \frac{x^4}{3\,.\,4},$$

und daher, nach der Gleichung (I):

$$y = \frac{x^4}{3\,.\,4} + Cx + C'.$$

Eben so ist

$$x \int X dx = x \int x^2 dx = x(\tfrac{1}{3} x^3 + C) \quad \text{und}$$
$$\int X x dx = \tfrac{1}{4} x^4 + C',$$

also auch beyder Differenz nach der Gleichung (II):

$$y = \frac{x^4}{3\,.\,4} + Cx - C'$$

wie zuvor, da die Größe C' positiv oder negativ seyn kann.

§. 166. (**Differentialausdrücke der dritten und höhern Ordnung.**) Ist ein Differentialausdruck $d^3 y = X dx^3$ gegeben, und X eine Funktion von x, und wo dx constant vorausgesetzt wird, so hat man auch

$$\frac{d^3 y}{dx^2} = d\,.\,\frac{d^2 y}{dx^2} = X dx, \text{ und daher } \frac{d^2 y}{dx^2} = \int X dx + C.$$

Aus der letzten Gleichung aber folgt

$$\frac{d^2 y}{dx} = dx \int X dx + C dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \int dx \int X dx + Cx + C'$$

und daher, wenn man noch einmal integrirt:

$$y = \int dx \int dx \int X dx + Cx^2 + C'x + C'',$$

da man offenbar statt $\tfrac{1}{2} C$ auch die unbestimmte Constante C substituiren kann. Eben so wird man für $d^4 y = X dx^4$ das Integral erhalten

$$y = \int dx \int dx \int dx \int X dx + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C''' \text{ u.s.w.}$$

Ex. Die Gleichung $d^3 y = x^2 dx^3$ gibt $X = x^2$, also auch

$$\int X dx = \tfrac{1}{3} x^3 + C,$$

$$\int dx \int X dx = \int (\tfrac{1}{3} x^3 + C) dx = \frac{x^4}{3\,.\,4} + Cx + C',$$

$$\int dx \int dx \int X dx = \int \left(\frac{x^4}{3\,.\,4} + Cx + C'\right) dx$$
$$= \frac{x^5}{3\,.\,4\,.\,5} + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C'x + C''.$$

I. Auch kann man, wie in §. 165, I., diese zusammengesetzten tegrale auf einfache zurückbringen. So haben wir aus der Gleichung $\frac{y}{2} = X$ am angeführten Orte bereits erhalten:

$$y = x\int X dx - \int X x dx = \int\int X dx^2.$$

Ist nun die nächstfolgende Gleichung $d^3 y = X dx^3$ gegeben, so ten wir bereits oben für das Integral derselben gefunden

$$y = \int dx \int dx \int X dx = \int dx \int\int X dx^2.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den vorhergehenden Werth ı $\int\int X dx^2$, so erhält man

$$y = \int x dx \int X dx - \int dx \int X x dx.$$

Setzt man aber in der Gleichung $\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$

$$u = \int X dx \text{ und } \nu = \tfrac{1}{2}x^2, \text{ so ist}$$

$$\int x dx \int X dx = \tfrac{1}{2}x^2 \int X dx - \tfrac{1}{2}\int x^2 X dx.$$

tzt man in derselben Gleichung

$$u = \int X x dx \text{ und } \nu = x, \text{ so ist}$$

$$\int dx \int X x dx = x\int X x dx - \int x^2 X dx.$$

Substituirt man endlich diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von y, so erhält man für das Integral der Gleichung $d^3y = Xdx^3$

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 \int X dx - x\int X x dx + \tfrac{1}{2}\int X^2 dx.$$

Fährt man so fort, so erhält man die folgenden Integrale:

on der Gleichung ist das Integral:

$dy = X dx$ $\quad y = \int X dx$,

$d^2 y = X dx^2$ $\quad y = \frac{1}{1}[x\int X dx - \int X x dx]$,

$d^3 y = X dx^3$ $\quad y = \frac{1}{1.2}[x^2\int X dx - 2x\int X x dx + \int X x^2 dx]$,

$d^4 y = X dx^4$ $\quad y = \frac{1}{1.2.3}[x^3\int X dx - 3x^2\int X x dx + 3x\int X^2 dx - \int X^3 dx]$ u. f.,

› die numerischen Coefficienten die des Binomiums sind, und wo das esetz des Fortgangs dieser Reihen für sich deutlich ist. Übrigens müs- ı auch hier die Constanten jeder einzelnen Integration besonders be- ꝛcksichtiget werden, wie dieß schon oben (§. 165, I) bemerkt worden ist.

XXIX.

Quadratur der Curven.

§. 167. (**Quadratur der Parabeln und Hyperbeln.**) Wir wollen nun in diesem und den zwey nächstfolgenden Abschnitten die bisher vorgetragenen Vorschriften der Integralrechnung auf die Geometrie anwenden.

Nennt man F die Fläche, welche zwischen zwey Ordinaten einer ebenen Curve enthalten und auf der einen Seite von der Abscissenaxe, auf der andern aber durch den Bogen der Curve begränzt ist, so haben wir bereits oben (§. 89) für das Differential dieser Fläche den Ausdruck

$$dF = y\,dx$$

gefunden. Wenn man daher aus der gegebenen Gleichung der Curve diesen Ausdruck auf die Form

$$dF = X\,dx$$

bringt, wo X irgend eine Funktion von x ist, so wird man, durch die Integration dieser Gleichung, nach den vorhergehenden Regeln, den Werth der erwähnten endlichen Fläche F, durch x oder y ausgedrückt, bestimmen, und in dieser Bestimmung besteht die sogenannte Quadratur der Curven.

§. 168. (**Quadratur der Parabel.**) So haben wir a. a. O. für die Apollonische Parabel, deren halber Parameter p ist, die Gleichung $y^2 = 2px$, also auch

$$dF = dx \,.\, \sqrt{2px}$$

erhalten. Das Integral dieser Gleichung ist

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} + C \quad \text{oder}$$
$$F = \tfrac{2}{3}xy + C.$$

Zählt man diese Fläche φ von dem Scheitel der Parabel, so ist $\varphi = 0$ für $x = 0$, also auch $C = 0$, und man erhält

$$F = \tfrac{2}{3}xy.$$

Zählt man aber diese Fläche von derjenigen Ordinate, die durch den Brennpunkt der Parabel geht, und für die $y = p$, also auch $x = \tfrac{1}{2}p$ ist, so verschwindet das Integral

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} + C$$

für $x = \tfrac{1}{2}p$, wodurch die Constante $C = -\tfrac{1}{3}p^2$, und daher die gesuchte Fläche

$$F = \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{3}p^2$$

wird. Sucht man endlich diejenige Fläche, welche zwischen den beyden Ordinaten $y = a$ und $y = b$ enthalten ist, so findet man

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{3p}(b^3 - a^3).$$

I. Die Parabeln der höheren Ordnungen haben die Gleichung

$$y^n = a x^m,$$

woraus folgt

$$F = \int y\,dx = \int a^{\frac{1}{n}} . x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n a^{\frac{1}{n}}}{m+n} . x^{\frac{m+n}{n}} + C.$$

II. Eben so hat man für die Hyperbeln der höheren Ordnungen

$$x^m y^n = a,$$

also auch

$$F = \int y\,dx = \frac{n a^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} + C.$$

§. 169. (Quadratur des Kreises und der Ellipse.) Ist $BP = x$ (Fig. 11), $PM = y$ und der Halbmesser des Kreises $BA = a$, so ist die Fläche des Abschnittes BMP

$$F = \int y\,dx = \int dx\sqrt{2ax - x^2},$$

also auch

$$F = -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a} + C.$$

Da für $x = 0$ auch $F = 0$ wird, so ist auch $C = 0$. Man erkennt leicht in dem ersten Theile dieses Integrals die Fläche des Dreyecks APM, und in dem zweyten die Fläche des Kreissectors BMA. Für $x = 2a$ erhält man die Fläche des Halbkreises $= \tfrac{1}{2}a^2\pi$, also auch die des ganzen Kreises $= a^2\pi$.

Ist aber der Anfang der Coordinaten im Mittelpunkte A des Kreises und $AP = x'$, $PM = y$, so hat man für die Fläche NAPM oder

$$F = \int dx'\sqrt{a^2 - x'^2} = \tfrac{1}{2}x'\sqrt{a^2 - x'^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{x'}{a} + C.$$

I. Für die Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, hat man, wenn

der Anfang der Coordinaten im Scheitel der großen Axe 2a ist:

$$y^2 = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

also auch für die Fläche BMP

$$F = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax - x^2},$$

woraus durch Integration folgt

$$F = \tfrac{1}{2}ab \text{ arc. cos. } \frac{a-x}{a} - \frac{b(a-x)}{2a}\sqrt{2ax - x^2}.$$

Wenn man also über der großen Axe der Ellipse, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, so verhält sich der elliptische Abschnitt zu dem des Kreises, wenn beyde dieselbe Abscisse haben, wie $\frac{b}{a}$ zur Einheit. Also ist auch die Fläche der ganzen Ellipse gleich $\frac{b}{a} . a\pi = ab\pi$.

II. Eben so findet man für das Differential des elliptischen Ausschnittes

$$d . BAM = -\frac{ab\,dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = dF.$$

Verlängert man die Ordinate PM, bis sie den erwähnten Kreis in M′ schneidet, und nennt F′ den Kreisausschnitt BAM′, so ist

$$d . BAM' = -\frac{a^2\,dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = dF',$$

also wieder $\frac{dF}{dF'} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$, und daher auch $\frac{F}{F'} = \frac{b}{a}$.

III. Für die Hyperbel, deren Halbaxen a und b sind, hat man

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

also ist auch der hyperbolische Ausschnitt, der zwischen der halben Axe a, zwischen einem Bogen der Hyperbel und zwischen der geraden Linie enthalten ist, welche den Endpunkt dieses Bogens mit dem Mittelpunkte der Hyperbel verbindet, gleich

$$\tfrac{1}{2}ab\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \tfrac{1}{2}ab \log.(2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}).$$

Zieht man diese Fläche von der des rechtwinkligen Dreyecks ab, dessen Catheten x und y sind, so erhält man für die Fläche OBM der Hyperbel (Fig. 33), deren Scheitel in O liegt:

$$OBM = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab\log.(2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}) + C;$$

oder da $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ist, und da diese Fläche OBM für $x = a$ verschwinden soll:

$$OBM = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}ab\log.\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

§. 170. (Quadratur der transcendenten Curven.) I. Für die Logistik ist $y = \log. x$, wo $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 21), also auch

$$\int y\,dx = \int dx \log. x = x\log. x - x + C.$$

Soll die Fläche zugleich mit x verschwinden, so findet man $C = 0$. Endlich hat man für $x = AB = 1$ den asymptotischen Raum $ABmn = -1$.

II. Für die Cycloïs hat man (Fig. 43), wenn $CQ = x$, $QM = y$ ist (§. 22, I):

$$y = a\,\text{arc.cos.}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2},$$

also auch

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Es ist daher die Fläche $CMQ = \int y\,dx = xy - \int x\,dy$.

Allein das Integral $\int x\,dy = \int dx\sqrt{2ax - x^2}$ ist gleich der Kreisfläche CNQ des die Cycloïs erzeugenden Kreises. Vollendet man daher das Rechteck CQMG, dessen Fläche xy ist, so ist die cycloidische Fläche GMC gleich der Kreisfläche CNQ. Für $x = CD = 2a$ ist die Fläche des Halbkreises $\frac{1}{2}a^2\pi$ gleich der Fläche AMCE, und da die Fläche des Rechteckes $ADCE = 2a^2\pi$ ist, so ist auch die Fläche AMCD der halben Cycloïs gleich $\frac{3}{2}a^2\pi$.

§. 171. (Quadratur der Spiralen.) Für die Spiralen (§. 23) wird es bequemer seyn, die Quadratur derselben nach den Polarcoordinaten (§. 93, II) vorzunehmen. Nach diesen hat man für die Fläche F, die der Radius Vector zurücklegt, während er um den Pol einen Winkel ν beschreibt:

$$F = \frac{1}{2}\int r^2\,d\nu.$$

Um dieß auf die Spiralen anzuwenden, deren allgemeine Glei-

chung $r = a \cdot \nu^n$ ist, so hat man sofort

$$F = \frac{a^2 \cdot \nu^{2n+1}}{2(2n+1)} + C.$$

Ist die Größe n positiv und wird die Fläche F von der festen Geraden CA (Fig. 27) gezählt, von welcher auch die Winkel ν gerechnet werden, so verschwindet die Constante C der Integration, und man hat

$$F = \frac{a^2 \cdot \nu^{2n+1}}{2(2n+1)}.$$

Für die Spirale des Archimedes (§. 23, I) ist $n = 1$ und $a = \frac{1}{2\pi}$, also auch $r = \frac{\nu}{2\pi}$, und daher

$$F = \frac{\nu^3}{24\pi^2}.$$

Nach einer vollen Drehung des Radius oder für $\nu = 2\pi$ ist die Fläche $F' = \frac{1}{3}\pi$. Nach zwey Revolutionen ist $\nu = 4\pi$ und $F'' = \frac{8}{3}\pi$. Nach drey Revolutionen ist $F = \frac{27}{3}\pi$. Überhaupt hat man nach der n^{ten} Drehung $F^n = n^3 \cdot \frac{1}{3}\pi$, und nach der $(n+1)^{sten}$ Drehung $F^{n+1} = (n+1)^3 \cdot \frac{1}{3}\pi$, so daß also die Fläche, die zunächst nach der n^{ten} Drehung noch zu den vorhergehenden hinzukömmt, gleich ist

$$F^{n+1} - F^n = [(n+1)^3 - n^3]\,\tfrac{1}{3}\pi.$$

Für die logarithmische Spirale (§. 23, II) ist $\nu = \log. r$, also auch

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2\, d\nu = \tfrac{1}{4} r^2 + C.$$

§. 172. (Quadratur zwischen schiefwinkligen Coordinaten.) Man bemerke noch, daß sich die Quadratur der Curven auch zwischen schiefwinkligen Coordinaten auf dieselbe Weise vornehmen läßt. Ist nämlich α der Winkel, welchen die beyden Coordinaten x und y unter sich bilden, so wird man nun in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme statt y die Größe $y \sin. \alpha$ setzen, und dann für den Raum, der von diesen schiefen Coordinaten und von der Curve begränzt wird, den Ausdruck haben

$$F = \int (y \sin. \alpha)\, dx,$$

oder da α constant ist:

$$F = \sin. \alpha \int y\, dx.$$

Sind a und b die Halbaxen einer Hyperbel AM (Fig 44), und nimmt man die Abscissen $CP = x$ von dem Mittelpunkte C der Hyperbel auf der einen Asymptote derselben und die Ordinaten $PM = y$

der andern Asymptote parallel, so ist die bekannte Gleichung dieser Curve

$$yx = \varepsilon^2, \text{ wo } \varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \text{ ist.}$$

Dieß gibt

$$F = \varepsilon^2 \sin.\alpha \int \frac{dx}{x} = \varepsilon^2 \sin.\alpha \,.\, \log. x + C,$$

wo log. x den natürlichen Logarithmus von x bezeichnet. Ist die Abscisse des Scheitels A der Hyperbel oder ist $x = CB = \varepsilon$, so hat man, wenn man die Fläche $F = ABPM$ von der Ordinate AB aus zählt, $C = -\varepsilon^2 \sin.\alpha \log.\varepsilon$, also auch

$$F = ABPM = \varepsilon^2 \sin.\alpha \,.\, \log.\frac{x}{\varepsilon}.$$

Setzt man $\varepsilon = 1$, so ist $F = \sin.\alpha \,.\, \log. x$, also $\sin.\alpha$ der Model des Systems.

Für $\alpha = 45^0\, 44'\, 25''$ ist $\sin.\alpha = 0.434294$ der Model des Briggischen Systems.

Für $a = b$ ist die Hyperbel gleichseitig und $xy = \tfrac{1}{2}a^2$, also auch, da hier $\alpha = 90^0$ ist:

$$F = \int y\, dx = \tfrac{1}{2}a^2 \log. x + C.$$

Zählt man auch hier die Fläche φ von der Ordinate AB des Scheitels A, so ist $F = 0$ für $x = CB = AB = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$, also

$$C = -\tfrac{1}{2}a^2 \log.\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} \text{ oder}$$

$$F = ABPM = \tfrac{1}{2}a^2 \log.\frac{x\sqrt{2}}{a}.$$

Nimmt man $AB = BC = 1$ oder $a = \sqrt{2}$, so ist

$$F = ABPM = \log. x.$$

§. 173. (**Vereinfachung dieses Verfahrens, wenn die Curve durch zwey Gleichungen ausgedrückt wird.**) Öfter ist es, zu bestimmten Zwecken, bequemer, den analytischen Ausdruck einer ebenen Curve, nicht wie bisher, durch eine einzige Gleichung zwischen x und y, sondern durch zwey Gleichungen zu geben, deren eine den Werth von x und die andere von y durch eine dritte Größe φ bezeichnet. Ein Beyspiel einer solchen Zerlegung haben wir bereits oben (Einl. §. 22) bey der Cycloid gesehen, deren zwey Gleichungen sind

$$x = a(\varphi - \sin.\varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \cos.\varphi).$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$dx = a\,d\varphi\,(1 - \cos.\varphi),$$

also ist auch sofort

$$F = \int y\,dx = a^2 \int d\varphi\,(1 - \cos.\varphi)^2 \quad \text{oder}$$

$$F = a^2\left(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin.\varphi + \tfrac{1}{4}\sin.2\varphi\right).$$

Für $\varphi = \pi$, d. h. für die halbe Cycloide, hat man

$$F = \tfrac{3}{2}a^2\pi, \text{ wie zuvor.}$$

I. Auf gleiche Art läßt sich auch die Ellipse behandeln, deren Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man $x = a\cos.\varphi$ und $y = b\sin.\varphi$, so kann man der vorhergehenden Gleichung diese beyden substituiren, und da dann $dx = -a\,d\varphi\,\sin.\varphi$ ist, so hat man

$$F = \int y\,dx = ab\int d\varphi\,\sin.^2\varphi = \tfrac{1}{2}ab\int d\varphi\,(1 - \cos.2\varphi)$$

$$\text{oder} \quad F = \tfrac{1}{2}ab\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin.2\varphi\right).$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Fläche des elliptischen Quadranten gleich $\frac{1}{4}ab\pi$, also auch die Fläche der ganzen Ellipse gleich $ab\pi$, wie zuvor.

II. Bemerken wir bey dieser Gelegenheit, daß dasselbe Verfahren auch oft vortheilhaft auf die Gleichungen der Flächen angewendet werden kann, die man auf diese Weise durch drey Gleichungen zwischen zwey willkürlichen Hülfsgrößen φ und ψ ausdrücken wird.

So hat man für die Fläche, welche durch die Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe b entstanden ist, die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

und dieser Gleichung kann man auch die drey folgenden substituiren:

$$x = a\cos.\varphi\cos.\psi, \quad y = a\sin.\varphi\cos.\psi, \quad z = b\sin.\psi.$$

Für das Ellipsoid mit drey Axen endlich, oder für die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kann man auch folgende drey Gleichungen setzen:

$$x = a\cos.\varphi\cos.\psi, \quad y = b\sin.\varphi\cos.\psi, \quad z = c\sin\psi,$$

wo man über die Bedeutung dieser Hülfsgrößen φ und ψ dasjenige nachsehen kann, was wir oben (Einl. §. 12, II) gesagt haben.

§. 174. (**Fläche, die zwischen zwey Curven enthalten ist.**) Seyen zwey Curven gegeben, die beyde dieselbe Axe der x und in dieser Axe denselben Anfangspunkt der Coordinaten haben. In dem Endpunkte P der beyden Curven gemeinschaftlichen Abscisse x errichte man auf die Abscissenaxe eine senkrechte Gerade, welche die erste Curve in dem Punkte M, und die zweyte in dem Punkte M′ schneidet. Setzt man diese zwey Ordinaten PM = y und PM′ = y′, so hat man für die erste Curve, deren Gleichung zwischen x und y gegeben ist, für das Differential der zwischen ihr und der Abscissenaxe enthaltenen Fläche, wie bisher, den Ausdruck $\int y\,dx$. Für die zweyte Curve, deren Gleichung zwischen x und y′ gegeben ist, wird die analoge Fläche gleich $\int y'\,dx$ seyn, so daß man daher für diejenige Fläche, welche zwischen diesen beyden Curven und zwischen denjenigen zwey Ordinaten enthalten ist, die zu den gemeinschaftlichen Abscissen α und β gehören, den Ausdruck haben wird

$$F = \int_\beta^\alpha (y - y')\,dx,$$

der y größer als y′ voraussetzt. Für den entgegengesetzten Fall $y < y'$ wird man haben

$$F = \int_\beta^\alpha (y' - y)\,dx.$$

Sey z. B. AMBDC (Fig. 46) ein Kreis des Halbmessers a. Auf den Durchmesser AD = 2a dieses Kreises sey die Ellipse AM′B′D beschrieben, deren halbe große und kleine Axe AC = CD = a und CB′ = b ist. Nimmt man die gemeinschaftliche Abscisse AP = x von dem Scheitel beyder Curven, so hat man für den Kreis

$$PM = y = \sqrt{2ax - x^2},$$

und für die Ellipse

$$PM' = y' = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

und daher für die zwischen Kreis und Ellipse enthaltene Fläche AM′M

$$F = \int (y - y')\,dx \quad \text{oder}$$

$$F = \int\left(\sqrt{2ax - x^2} - \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}\right)dx$$
$$= \left(1 - \frac{b}{a}\right)\int dx\sqrt{2ax - x^2}.$$

Das Integral $\int dx\sqrt{2ax - x^2}$ wurde aber schon oben (§. 170) gleich

$$\frac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a-x}{a} - \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$$

gefunden, so daß man daher hat

$$F = AMM' = \frac{1}{2}a(a-b) \text{ arc. cos. } \frac{a-x}{a}$$
$$- \frac{1}{2a}(a-b)(a-x)\sqrt{2ax-x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Für $x=a$ gibt dieser Ausdruck die Fläche $ABB' = \frac{1}{4}a(a-b)\pi$, und wenn man diesen Werth vier Mal nimmt, so erhält man für den Raum, der zwischen dem Kreise und der ganzen Ellipse enthalten ist, den Ausdruck

$$a(a-b)\pi.$$

I. Noch einfacher gelangt man zu demselben Resultate, wenn man die oben (§. 174, I) für den Kreis und für die Ellipse eingeführten Bezeichnungen gebraucht. Dann ist nämlich

$$x = a \cos.\varphi, \quad y = a \sin.\varphi \quad \text{und} \quad y' = b \sin.\varphi,$$

also auch

$$F = \int(y-y')\,dx = a(a-b)\int d\varphi \sin.^2\varphi \quad \text{oder}$$
$$F = \frac{1}{2}a(a-b)(\varphi - \frac{1}{2}\sin.2\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

wenn F mit φ zugleich verschwindet. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Fläche $ABB' = \frac{1}{4}a(a-b)\pi$, wie zuvor.

Setzt man in dem letzten Ausdrucke (II) von F für $\cos.\varphi$ den Werth $\frac{a-x}{a}$, so ist $\sin.\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{2ax-x^2}$ und

$$\sin.2\varphi = 2\sin.\varphi\cos\varphi = \frac{2(a-x)}{a^2}\sqrt{2ax-x^2}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\varphi = \text{arc. cos. } \frac{a-x}{a}$ und von $\sin.2\varphi$ in der Gleichung (II), so erhält man die Gleichung (I) wieder.

II. Denselben Ausdruck der Quadratur

$$F = \int(y-y')\,dx$$

wird man auch in allen denjenigen Fällen anwenden, wo die Curve, deren Quadratur man sucht, von der Axe der x nicht geschnitten wird, sondern z. B. als eine geschlossene krumme Linie ganz über oder unter dieser Axe liegt, vorausgesetzt, daß die Ordinate y der Curve für jede Abscisse x einen doppelten Werth gibt. So hat man für einen Kreis des Halbmessers a, wenn man die Abscissen $AP = x$ (Fig. 47) auf einer seiner Tangenten nimmt, für die Ordinate $y = a \pm \sqrt{a^2-x^2}$. Setzt man daher

$PM = y = a + \sqrt{a^2 - x^2}$ und $PM' = y' = a - \sqrt{a^2 - x^2}$,
so hat man

$$dF = (y - y')\,dx = 2\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx,$$

also auch für die Fläche $F = ABMM'$ den Ausdruck

$$F = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc.sin.} \frac{x}{a}.$$

Für $x = a$ ist $F = \frac{1}{2} a^2 \pi$ die Fläche des Halbkreises, wie zuvor.

III. Wenn die beyden oben erwähnten Curven sich in zwey Punkten schneiden oder auch berühren, und wenn $x = \alpha$ und $x = \beta$ die Abscissen dieser zwey Punkte sind, so wird auch hier der Ausdruck

$$F = \int_\beta^\alpha (y - y')\,dx$$

die zwischen den beyden Curven eingeschlossene Fläche geben, und dieß wird auch noch der Fall seyn, wenn y und y' zwey verschiedene Ordinaten einer einzigen, geschlossenen Curve bezeichnen, wo dann α und β die kleinste und die größte aller Abscissen sind, die den verschiedenen Punkten der Curve entsprechen. Wäre z. B. die Gleichung

$$x^{2m} + y^{2m} = 1$$

einer Curve gegeben, so findet man daraus

$$y = -(1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}} \quad \text{und} \quad y' = (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}},$$

und daher auch

$$F = 2\int_\beta^\alpha (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx.$$

Da übrigens $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{2m-1}$ ist, so wird die Tangente der Curve mit der Axe der y parallel seyn, wenn man hat $y = 0$, das heißt, wenn $x = -1$ und $x = +1$ ist, und diese beyden Werthe von x sind offenbar auch die kleinste und größte unter allen möglichen Abscissen. Demnach hat man

$$F = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx,$$

wofür man auch setzen kann (s. unten §. 240)

$$F = 4\int_0^1 (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx.$$

Für den besondern Fall $m = 1$ wird die Curve ein Kreis des

Halbmessers 1, und daher $F = \pi$, wie zuvor. Für den Fall $m = \frac{1}{3}$ aber ist die Gleichung der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \text{ und daher}$$

$$F = 4\int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx.$$

Setzt man $x = \sin.^3 \varphi$, so wird

$$F = 12\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos.^4 \varphi - \cos.^6 \varphi)\, d\varphi = 6\pi\left(\frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) = \frac{3}{8}\pi.$$

IV. Der vorhergehende allgemeine Ausdruck für F wird selbst dann noch bestehen, wenn die Größen y und y′ ihre Form mit der Abscisse x ändern, und nach und nach anderen Curven zugehören. Um dieß durch ein Beyspiel deutlich zu machen, sey die Gleichung gegeben

$$y = 1 - x^2,$$

die einer Parabel m D n (Fig. 22) zugehört, deren Scheitel in D, und wo der Anfangspunkt der Coordinaten in A ist, so daß man hat $AC = AC' = 1$.

Zieht man durch diesen Punkt A eine Gerade A M, deren Gleichung $y = \frac{5}{6}x$ ist, und zieht man auf der andern Seite von A D eine zweyte Gerade, deren Gleichung $y = -\frac{3}{2}x$ ist, so hat man für die Differenz der Ordinaten der Parabel und dieser beyden Geraden auf der ersten Seite der positiven x

$$y = 1 - x^2 - \frac{5}{6}x,$$

und auf der Seite der negativen x

$$y' = 1 - x^2 + \frac{3}{2}x.$$

Von diesen beyden Werthen ven y verschwindet der erste für $x = \frac{2}{3}$, und der zweyte für $x = -\frac{1}{2}$. Will man daher die Fläche bestimmen, die, auf der Seite CDC′ der positiven y, zwischen der Parabel und zwischen jenen beyden geraden Linien enthalten ist, so wird man in dem allgemeinen Ausdrucke von F die Größen $\alpha = \frac{2}{3}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$ nehmen, und sonach erhalten

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (y' - y)\, dx$$

oder auch (s. unten §. 240)

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} y'\, dx + \int_0^{\frac{2}{3}} y\, dx,$$

das heißt

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1 - x^2 + \tfrac{3}{2}x)\,dx + \int_{0}^{\frac{2}{3}} (1 - x^2 - \tfrac{5}{6}x)\,dx.$$

Nimmt man diese Integrale zwischen den angezeigten Gränzen, so erhält man

$$F = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{16} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{8}{81} - \tfrac{5}{27} = \tfrac{847}{1296}.$$

XXX.

Rectification der Curven.

---

§. 175. (**Rectification der Parabel.**) Da für rechtwinklige Coordinaten x und y das Differential des Bogens s einer ebenen Curve bereits oben (§. 88) gleich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

gefunden worden ist, so wird man auch die Länge dieses Bogens zwischen zwey gegebenen Punkten desselben erhalten, wenn man mittelst der gegebenen Gleichung der Curve den vorhergehenden Ausdruck von ds auf die Form $f(x).dx$ oder $f(y).dy$ bringt, und dann diesen Ausdruck zwischen den beyden gegebenen Gränzen desselben integrirt.

Für die Parabel hat man $y^2 = ax$, also ist auch

$$dy = \tfrac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}} \quad \text{und} \quad ds = \tfrac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a+4x}{x}},$$

oder auch, wenn man $a = 4b$ setzt:

$$ds = \int dx\sqrt{\frac{b+x}{x}}.$$

Es ist aber

$$\sqrt{\frac{b+x}{x}} = \frac{x}{\sqrt{bx+x^2}} + \frac{b}{\sqrt{bx+x^2}},$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{bx+x^2}} = \sqrt{bx+x^2} - \tfrac{1}{2}b\int \frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}} = \log.(b + 2x + 2\sqrt{bx+x^2}),$$

also hat man auch, wenn man dieses Integral mit x zugleich verschwinden läßt:

$$s = \sqrt{bx + x^2} + \tfrac{1}{2} b \log. \frac{b + 2x + 2\sqrt{bx + x^2}}{b},$$

wo man wieder den Werth von $b = \frac{1}{4}a$ substituiren kann. Auch hat man $ds = \frac{dy}{a}\sqrt{a^2 + 4y^2}$, und daher

$$s = \frac{y}{2a}\sqrt{a^2 + 4y^2} + \tfrac{1}{4} a \log. \frac{2y + \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a}.$$

§. 176. (**Rectification der Ellipse.**) Für die Ellipse hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also auch, wenn man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ setzt:

$$ds = \frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

oder wenn man $x = ax'$ setzt:

$$ds = dx'\sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x'^2}{1 - x'^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdrucks wurde aber schon oben (§. 157) gegeben, so daß man daher hat

$$s = a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a} + \tfrac{1}{2} a \varepsilon^2 \left[\frac{x}{2a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \tfrac{1}{2} \text{arc. sin.} \frac{x}{a}\right]$$

$$+ \frac{1.1}{2.4} . a\varepsilon^4 \left[\left(\frac{x^3}{4a^3} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{1.3}{2.4} \text{arc. sin.} \frac{x}{a}\right] + \text{etc.}$$

wo die Constante der Integration verschwindet, wenn $s = 0$ für $x = 0$ ist. Für den Quadranten der Ellipse wird man in dem vorhergehenden Ausdrucke $x = a$ setzen. Nimmt man dann den so erhaltenen Bogen vier Mal, so erhält man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$2a\pi \left[1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2 - \ldots\right].$$

Für $a = b$ oder $\varepsilon = 0$ erhält man den Umfang des Kreises $= 2a\pi$, wie bekannt.

Legt man aber, wie zuvor (§. 174, I), für die Ellipse die bey-

den Gleichungen zu Grunde

$$x = a \sin.\varphi \quad \text{und} \quad y = b \cos.\varphi,$$

so erhält man sofort

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\,d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\varphi}.$$

Löst man diese Wurzelgröße nach dem Binom auf, und substituirt dann statt $\sin.^2\varphi$, $\sin.^4\varphi$, $\sin.^6\varphi$, ... die oben (§. 49) gegebenen Ausdrücke in Sinus der vielfachen Bogen φ, so erhält man sofort

$$\frac{s}{a} = \varphi - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2^2}\sin.2\varphi\right)$$
$$- \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4 \left(\frac{1.3}{2.4}\varphi - \frac{4}{2^4}\sin.2\varphi + \frac{1}{2^4.2}\sin 4\varphi\right)$$
$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \frac{15}{2^6}\sin.2\varphi + \frac{6}{2^6.2}\sin.4\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^6.3}\sin.6\varphi\right) \text{ u. s. f.}$$

Oft ist es auch nothwendig, den Bogen $OM = s$ (Fig. 33) der Ellipse nicht durch den vorhergehenden Winkel φ, sondern durch den Winkel $MRO = \omega$ ausgedrückt zu erhalten, welchen die Normale MR der Ellipse in dem Punkte M mit der großen Axe derselben bildet.

Behält man die vorhergehende Bedeutung von a, b und ε bey, so findet man aus der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ der Ellipse

$$x = \frac{a \cos.\omega}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\omega}} \quad \text{und} \quad y = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin.\omega}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\omega}},$$

so daß

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{\frac{1 + (1-\varepsilon^2)\,\text{tang.}^2\omega}{1 + (1-\varepsilon^2)\,\text{tang.}^2\omega}}$$

wird, wo dann die Normale

$$MR = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\omega}},$$

und der Krümmungshalbmesser ρ der Ellipse in dem Punkte M

$$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

wird. Differentiirt man die vorhergehenden Ausdrücke von x und y in Beziehung auf ω, und substituirt dann diese Werthe von dx und dy in der Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

so erhält man

$$ds = \frac{a(1-\varepsilon^2)\,d\omega}{(1-\varepsilon^2 \sin.^2\omega)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus zugleich folgt, daß für die Curven der zweyten Ordnung auch

$$ds = \rho \,.\, d\omega$$

ist. Entwickelt man aber in diesem Ausdrucke von ds die Wurzelgröße $(1-\varepsilon^2 \sin.^2\omega)^{-\frac{3}{2}}$ nach dem Binom, und integrirt man dann die einzelnen Glieder, wie zuvor, so erhält man, wenn man der Kürze wegen setzt

$$\alpha = \frac{3}{2^2},\quad \beta = \frac{3\,.\,5}{4^2}\alpha,\quad \gamma = \frac{5\,.\,7}{6^2}\beta,\quad \delta = \frac{7\cdot 9}{8^2}\gamma \text{ u. s. w.},$$

für den elliptischen Bogen $AM = s$ oder für

$$\begin{aligned}\frac{a\,.\,s}{b^2} = {} & (1 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots)\frac{\pi\omega}{180} \\ & - (\alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots)\sin.\omega \cos.\omega \\ & - \tfrac{2}{3}(\beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots\ldots)\sin.^3\omega \cos.\omega \\ & - \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}(\gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots\ldots)\sin.^5\omega \cos.\omega \\ & - \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}(\delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots\ldots)\sin.^7\omega \cos.\omega \\ & \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Für $\omega = 90^\circ$ verschwinden alle Glieder dieser Reihen, außer den ersten, und wenn man dann dieses Glied vier Mal nimmt, so erhält man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$\frac{2b^2\,.\,\pi}{a}(1 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots).$$

§. 177. (Rectification der Hyperbel.) Für diese Curve hat man

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ also auch}$$

$$dy = \frac{b^2 x}{a^2 y}dx \quad\text{und}\quad ds = \frac{dx}{\varepsilon}\sqrt{\frac{x^2 - \varepsilon^2 a^2}{x^2 - a^2}},$$

wenn $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$ gesetzt wird.

Entwickelt man die Wurzelgröße $\sqrt{x^2 - \varepsilon^2 a^2}$ nach dem Binom, so erhält man

$$\sqrt{x^2 - a^2\varepsilon^2} = x - \frac{1}{2}\,.\,\frac{a^2\varepsilon^2}{x} - \frac{1}{8}\,.\,\frac{a^4\varepsilon^4}{x^3} - \ldots,$$

so daß dann die einzelnen Glieder, in welche d s aufgelöst wird, alle die Form

$$\frac{dx}{x^m \sqrt{x^2 - a^2}}$$

erhalten, wo m eine ungerade Zahl ist. Man hat aber aus dem Vorhergehenden

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{(m-1)a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^{m-1}} + \frac{m-2}{(m-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{x^2 - a^2}},$$

durch welchen Ausdruck man endlich auf das Glied

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ arc. cos. } \frac{a}{x} \quad \text{oder} \quad = a \text{ arc. sec. } \frac{x}{a}$$

kömmt. Nimmt man die angezeigte Entwicklung vor, und setzt man der Kürze wegen

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1.1}{2.4}, \quad \gamma = \frac{1.1.3}{2.4.6}, \quad \delta = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \text{ u. f.,}$$

so erhält man für den gesuchten hyperbolischen Bogen, von dem Scheitel der Curve gezählt, wo $x = a$ ist, den folgenden Ausdruck

$$s = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \tfrac{1}{2}\beta\varepsilon^4 . \frac{a^2}{x^2} - \tfrac{1}{4}\gamma\varepsilon^6 \left(\frac{a^4}{x^4} + \frac{3}{2} . \frac{a^2}{x^2} \right) \\ - \tfrac{1}{6}\delta\varepsilon^8 \left(\frac{a^6}{x^6} + \frac{5}{4} . \frac{a^4}{x^4} + \frac{5.3}{4.2} . \frac{a^2}{x^2} \right) - \ldots \end{array} \right\}$$

$$- \varepsilon \left[\alpha + \tfrac{1}{2}\beta\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4}\gamma\varepsilon^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\delta\varepsilon^6 + \ldots \right] a \text{ arc. sec. } \frac{x}{a}.$$

Setzt man auch hier, wie bey der Ellipse, $x = a \sin. \varphi$ und $y = b\sqrt{-1} . \cos. \varphi$, so erhält man für den Bogen der Hyperbel

$$s = \int a\, d\varphi . \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2 \varphi},$$

wo $a^2 + b^2 = a^2 \varepsilon^2$ ist.

Man sieht, daß die elliptischen und hyperbolischen Bogen eine eigene Klasse transcendenter Größen bilden, da sie aus einer unendlichen Reihe von Gliedern bestehen, deren jedes selbst wieder eine unendliche Reihe ist. Die Parabel ist, wie wir gesehen haben, durch einen einfachen logarithmischen Ausdruck rectificabel, aber nicht die beyden andern Curven der zweyten Ordnung, die weder unmittelbar von dem Kreise, noch von den Logarithmen abhängen.

§. 178. (**Rectification der höheren Parabeln.**) Diese Curven haben die Gleichung

$$x = a \,.\, y^m,$$

wo m eine ganze oder gebrochene positive Zahl bezeichnet. Daraus folgt

$$ds = dy\sqrt{1 + a^2 m^2 y^{2m-2}},$$

und das Integral dieses Ausdrucks ist, nach dem Vorhergehenden, algebraisch, wenn m gleich $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, ... ist.

Für $m = \frac{3}{2}$ ist $x^2 = a^2 y^3$, oder, wenn man $\frac{1}{a}$ statt a^2 setzt, $a x^2 = y^3$ die Gleichung der Neil'schen Parabel. Für sie ist

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{9y}{4a}},$$

also auch

$$s = \frac{8}{27}a\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}a.$$

§. 179. (**Rectification der Cissois.**) Für sie hat man die Gleichung (Einl. §. 14, Fig. 6)

$$y^2(a-x) = x^3.$$

Dieß gibt

$$ds = \frac{a\,dx}{2(a-x)}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}.$$

Setzt man $\frac{4a-3x}{a-x} = u^2$, so folgt

$$a - x = \frac{a}{u^2-3} \quad \text{und} \quad dx = \frac{2au\,du}{(u^2-3)^2},$$

also auch

$$ds = \frac{au^2\,du}{u^2-3} = a\,du + \frac{3a\,du}{u^2-3},$$

und davon ist das Integral

$$s = au + \frac{1}{2}a\sqrt{3}\,.\,\log.\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$ oder für $u = 2$, so ist die Constante der Integration

$$\text{Const.} = -2a - \frac{1}{2}a\sqrt{3}\,.\,\log.\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$$

und daher

$$s = a(u-2) + a\sqrt{3}\,.\,\log.\frac{(2+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}{\sqrt{u^2-3}},$$

wo man statt u seinen Werth $\frac{4a-3x}{a-x}$ substituiren kann.

§. 180. (**Rectification der Evolute der Ellipse.**) Für diese Curve haben wir oben (§. 99, III., Fig. 18) die Gleichung erhalten

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{a^2 - b^2}{b} = c \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = m,$$

so hat man

$$m x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}},$$

woraus sofort folgt

$$ds = dx \sqrt{1 - m^3 + m^2 c^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}},$$

wovon, nach §. 141, das Integral rational ist. Man findet

$$s = \frac{1}{1 - m^3} \left[(1 - m^3)\, x^{\frac{2}{3}} + m^2 c^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$, so ist $\text{Const.} = -\frac{m^3 c}{1 - m^3}$.

§. 181. (**Rectification derselben Curve für $m = 1$.**) Mit dieser Curve ist diejenige nahe verwandt, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist. Man findet sie als Auflösung des folgenden Problems.

Eine Gerade von gegebener Länge a bewege sich so, daß ihre beyden Endpunkte immer auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben. Man suche die Curve, welche diese Gerade in allen ihren Lagen berührt, oder was dasselbe ist, die Curve, welche durch die auf einander folgenden Durchschnitte dieser beweglichen Geraden entsteht.

Sind die Schenkel des rechten Winkels zugleich die Axen der Coordinaten x und y, und ist der Scheitel des Winkels der Anfang der Coordinaten, so hat man für die Größe der gegebenen Geraden

$$a = \frac{x\,ds}{dx} - \frac{y\,ds}{dy} \quad . \; . \; . \quad (I.)$$

oder auch, da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist,

$$\frac{dx^2}{x\,dy\,ds} - \frac{dx}{y\,ds} = \frac{dx}{a\,dy}.$$

Dieser Gleichung Differential, für ein constantes dx, ist

$$\left(\frac{x\,ds}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{x\,dy}{dx} - y\right)\frac{d^2s}{dx^2} = 0,$$

oder da $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{dy\,d^2y}{dx^2\,ds}$ ist,

$$\left(\frac{x\,ds}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{x\,dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx^2}\cdot\frac{d^2y}{ds} = 0.$$

Da die letzte Gleichung durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ theilbar ist, so ist sie den folgenden zwey Gleichungen gleichgeltend

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{x\,ds}{ds} - a + \left(\frac{x\,dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{ds} = 0 \;\ldots\; \text{(II.)}$$

Die erste dieser zwey Gleichungen gibt nach einer doppelten Integration

$$y = Cx + C',$$

wo C und C' constante Größen bezeichnen. Diese Gleichung gehört also für eine gerade und zwar für die gegebene gerade Linie a selbst.

Wenn man aber die beyden Gleichungen (I.) und (II.) im Zusammenhange betrachtet, und aus ihnen die Constante a eliminirt, so erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = 0,$$

wovon das Integral ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$$

Es ist aber $y = a$ für $x = 0$, also hat man für die gesuchte Gleichung der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gestalt derselben ist nahe die in Fig. 18 gegebene.

Um noch die Rectification dieser Curve zu finden, so ist das Differential der letzten Gleichung

$$x^{-\frac{1}{3}}dx + y^{-\frac{1}{3}}dy = 0,$$

also auch

$$ds = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx \quad \text{oder} \quad s = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{a x^2} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$, so verschwindet auch diese Constante, und man hat

$$s = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{ax^2} \quad \text{oder endlich} \quad s = \tfrac{3}{2} a \left[1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

§. 182. (Rectification der transcendenten Curven.) Für die Logistik hat man

$$x = a \log. y,$$

also ist auch

$$ds = \frac{dy}{y} \sqrt{a^2 + y^2},$$

wovon das Integral ist

$$s = \sqrt{a^2 + y^2} + a \log. \frac{\sqrt{a^2 + y^2} - a}{y} + C.$$

Ist $y = b$ für $s = 0$, so ist die Constante der Integration

$$C = - \sqrt{a^2 + b^2} - a \log. \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}.$$

Dieselbe Gleichung $x = a \log. y$ gibt auch

$$y = e^{\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}}.$$

Setzt man aber $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\, \omega$, so ist

$$ds = \frac{dx}{\cos. \omega} \quad \text{und} \quad dx = \frac{a\, d\omega}{\sin. \omega \ \cos. \omega},$$

also auch

$$s = a \int \frac{d\omega}{\sin. \omega \ \cos.^2 \omega}.$$

Da aber

$$\frac{1}{\sin. \omega \ \cos.^2 \omega} = \frac{1}{\sin. \omega} + \frac{\sin. \omega}{\cos.^2 \omega} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin. \omega} = \log. \text{tang.} \frac{\omega}{2}, \quad \int \frac{d\omega \sin. \omega}{\cos.^2 \omega} = \frac{1}{\cos. \omega} \quad \text{ist,}$$

so hat man auch für den gesuchten Bogen

$$s = a \left(\frac{1}{\cos. \omega} + \log. \text{tang.} \frac{\omega}{2}\right) + \text{Const.}$$

I. Für die Cycloid hat man (Einl. §. 22, I.)

$$y = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2},$$

wo (Fig. 26) $CQ = x$, $QM = y$ ist. Dieß gibt

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{und} \quad ds = dx \sqrt{\frac{2a}{x}},$$

so daß man daher hat

$$s = 2\sqrt{2ax},$$

wo s mit x zugleich verschwindet. Für $x = 2a$ ist $s = 4a$, also ist auch der ganze Bogen der Cycloid

$$ACB = 8a.$$

Auch findet man aus den beyden Gleichungen (§. 174)

$$x = a(\varphi - \sin.\varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \cos.\varphi)$$

für $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ den Ausdruck

$$ds = 2a\,d\varphi \sin.\tfrac{1}{2}\varphi, \text{ also auch } s = -4a\cos.\frac{\varphi}{2} + C.$$

Ist $s = 0$ für $\varphi = 0$ so ist $C = 4a$ und daher

$$s = 4a(1 - \cos.\tfrac{1}{2}\varphi) = 8a\sin.^2\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Für $\varphi = \pi$ ist $\cos.\frac{1}{2}\varphi = 0$, also auch die Hälfte des ganzen elliptischen Bogens gleich $4a$, wie zuvor.

II. Für die Evolvente des Kreises endlich hatten wir oben (§. 99, IV.)

$$x = a\cos.\varphi + a\varphi\sin.\varphi \quad \text{und} \quad y = a\sin.\varphi - a\varphi\cos.\varphi.$$

Dieß gibt sofort

$$ds = a\varphi\,d\varphi, \text{ also auch } s = \tfrac{1}{2}a\varphi^2.$$

§. 183. (**Rectification für Polarcoordinaten.**) Da für solche Coordinaten das Differential des Bogens

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2}$$

ist (§. 93, III.), so hat man für die Archimedische Spirale, deren Gleichung (§. 23, I.)

$$r = \frac{\nu}{2\pi}$$

war, auch sofort

$$s = \frac{1}{2\pi} \int d\nu \,.\, \sqrt{1+\nu^2} \quad \text{oder}$$

$$s = \frac{1}{4\pi} \,.\, \nu \,.\, \sqrt{1+\nu^2} + \tfrac{1}{2} \log. (\nu + \sqrt{1+\nu^2}),$$

wenn s mit ν verschwindet.

Für die logarithmische Spirale ist $r = a^\nu$, also auch

$$ds = a^\nu d\nu \,.\, \sqrt{1 + \log.^2 a} \quad \text{oder}$$

$$s = r \,.\, \frac{\sqrt{1 + \log.^2 a}}{\log. a},$$

wenn wieder s mit r zugleich verschwindet. Ist $\log. a = 1$, so ist $s = r\sqrt{2}$.

§. 184. (Auffindung rectificabler Curven.) Um solche Curven zu finden, für welche der Ausdruck von $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ein algebraisches Integral gibt, hat man, wenn $dy = p\,dx$ gesetzt wird,

$$ds = \sqrt{1+p^2}.$$

Es ist aber der allgemeine Ausdruck für die Ordinate

$$y = \int p\,dx \quad \text{oder} \quad y = px - \int x\,dp,$$

und eben so ist auch

$$s = x\sqrt{1+p^2} - \int \frac{px\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Diese beyden Integralien kann man als Funktionen einer anderen veränderlichen Größe u ansehen. Nimmt man dann an

$$\int x\,dp = P \quad \text{und} \quad \int \frac{px\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = Q,$$

so hat man

$$x = \frac{dP}{dp}, \quad y = px - P \quad \text{und} \quad s = x\sqrt{1+p^2} - Q,$$

wo die Constante der Integration noch zu bestimmen ist.

Da aber $x\,dp = dP$ und $\frac{px\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = dQ$ ist, so hat man auch

$$p\,dP = dQ\sqrt{1+p^2} \quad \text{und} \quad p = \frac{dQ}{\sqrt{dP^2 - dQ^2}}.$$

Nimmt man nun für P und Q zwey Funktionen von u an, so

wird auch p und dp und daher auch x durch u ausgedrückt w
können, so wie auch y durch die Gleichung

$$y = px - P.$$

Eliminirt man aber dann aus diesen Werthen von x und y
Größe u, so findet man die gesuchte Gleichung der rectificablen C
zwischen x und y, und daraus auch den Bogen s derselben dur
Gleichung

$$s = x\sqrt{1+p^2} - Q.$$

Ex. Ist $P = u$ und $Q = \frac{u^2}{2a}$, so ist $dP = du$, $dQ = \frac{u}{}$

$p = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}$, $dp = a^2 (a^2-u^2)^{-\frac{3}{2}} du$, $x = \frac{1}{a^2} (a^2-$

und $y = -\frac{u^3}{a^2}$.

Eliminirt man die Größe u aus den beyden letzten Gleichung
so erhält man

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wie in §. 181, woraus man dann den Bogen s entweder durch

$$s = \int \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{ax^2} + \text{Const.},$$

oder auch durch die Gleichung erhält,

$$s = \sqrt{1+p^2} - Q.$$

XXXI.
Complanation der Flächen.

§. 185. (Rotationsflächen.) Wenn eine Curve OMN (Fi
33) sich um eine Gerade OC dreht, so beschreibt jeder Punkt M de
selben einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe O
und dessen Mittelpunkt in einem Punkte B dieser Axe liegt. Ist al
AB = x und BM = y der Halbmesser dieses Kreises, so ist der Um
fang desselben gleich $2\pi y$, wo die Axe der x zugleich die Rotation
axe der Curve ist. Dieß vorausgesetzt, wird das Element MN = d

Bogens dieser Curve die Oberfläche eines abgekürzten Kegels be-
reiben, dessen eine Grundfläche den Umfang $2\pi y$ hat, und das
lement der Oberfläche des so, durch Rotation einer Curve um die
e der x entstehenden Körpers wird seyn

$$\Phi = 2\pi \int y\, ds,$$

o $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist.

Die Complanation der Flächen besteht in der Bestimmung dieses
Berthes von Φ.

Ex. I. Für die Ellipse hat man die Gleichung, wenn die Ab-
issen x auf der großen Axe $2a$ von dem Mittelpunkte genommen
erden

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wird diese Ellipse um die Axe der x, also um ihre große Axe gedreht, so hat man, wenn $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ ist,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

und daher

$$\Phi = 2\pi \int y\, ds = \frac{2b\pi}{a}\int dx\sqrt{a^2 - e^2x^2}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist

$$\Phi = \frac{b\pi x}{a}\sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{ab\pi}{e}\,\text{arc. sin.}\frac{ex}{a}.$$

Dieses Integral von $x = 0$ bis $x = a$ doppelt genommen, gibt für die Oberfläche des ganzen verlängerten Sphäroids

$$2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{e}\,\text{arc. sin.}\, e.$$

Nimmt man $e = 0$ oder $a = b$, so wird $\frac{1}{e}\,\text{arc. sin.}\, e = 1$, und daher die Oberfläche der Kugel, deren Halbmesser a ist, gleich $4a^2\pi$.

Ex. II. Werden aber die Abscissen x auf der kleinen Axe $2b$ wieder vom Mittelpunkte genommen, so ist die Gleichung der Ellipse

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2},$$

also auch, wenn wieder $a^2e^2 = a^2 - b^2$ ist,

$$\Phi = 2\pi \int y\, ds = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx\sqrt{b^4 + a^2e^2x^2}.$$

Davon ist aber das Integral

$$\Phi = \frac{a\pi x}{b^2}\sqrt{b^4 + a^2e^2x^2} + \frac{b^2\pi}{e}\log.(aex + \sqrt{b^4 + a^2e^2x^2}) + \text{Const.}$$

Soll Φ mit x zugleich verschwinden, so ist

$$\text{Const.} = -\frac{2b^2\pi}{e}\log. b.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke zuerst $x = + b$ und dann $x = - b$, so erhält man für die Differenz dieser beyden Werthe, d. h. für die Oberfläche des ganzen abgeplatteten Sphäroids

$$2a^2\pi + \frac{b^2\pi}{e}\log.\frac{1+e}{1-e}.$$

Für $e = 0$ oder für $a = b$ ist $\frac{1}{e}\log.\frac{1+e}{1-e} = 2$, also ist auch die Oberfläche der Kugel, deren Halbmesser a ist, gleich $4a^2\pi$, wie zuvor.

Ex. III. Für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$, hat man, wenn sie sich um die Axe der x dreht,

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = \pi\int dx\sqrt{a^2 + 4ax},$$

also auch

$$\Phi = \frac{\pi}{6a}(a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6}a^2\pi,$$

wenn Φ mit x zugleich verschwindet.

Nimmt man aber die Ordinate y auf der Tangente der Parabel im Scheitel derselben, und ist diese Tangente die Axe der Abscissen und zugleich die Drehungsaxe der Curve, so ist

$$\Phi = 2\pi\int x\,ds \quad \text{oder} \quad \Phi = \pi\int dx\sqrt{ax + 4x^2},$$

und davon ist das Integral, wenn $a = 8b$ gesetzt wird,

$$\Phi = \pi(b + x)\sqrt{2bx + x^2} - \pi b^2\log.\frac{b + x + \sqrt{2bx + x^2}}{b},$$

wenn Φ mit x verschwindet.

Ex. IV. Für die Hyperbel hat man

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

und daher

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = \frac{a^2\pi}{2}\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{a^4 + 4x^4}.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\omega$, so ist

$$x^2 = \frac{a^2}{2\,\text{tang.}\,\omega} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{d\omega}{2\sin.\omega\cos.\omega},$$

also auch

$$\Phi = -\frac{a^2\pi}{2}\int\frac{d\omega}{\sin.\omega\cos.^2\omega}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in §. 182 erhaltenen, so sieht man, daß diese von dem hyperbolischen Bogen durch Rotation erzeugte Fläche gleich dem Produkte der Oberfläche eines Halbkreises des Radius a in den Bogen der Curve $y = e^x$ ist.

Ex. V. Die Cycloid (Fig. 26) drehe sich um die Axe CD. Ist $CQ = x$ und $QM = y$, so hat man

$$y = a\,\text{arc.}\cos.\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2},$$

also auch

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{und} \quad ds = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}.$$

Dieß vorausgesetzt ist die gesuchte Oberfläche der Cycloid

$$\Phi = 2\pi\,.\,(2a)^{\frac{1}{2}}\int\frac{y\,dx}{\sqrt{x}},$$

welches Integral für $x = 0$ verschwinden soll. Integrirt man theilweise und substituirt den vorhergehenden Werth von dy, so ist

$$\Phi = 4\pi y\sqrt{2ax} - 4\pi\,(2a)^{\frac{1}{2}}\,.\int dx\sqrt{2a - x},$$

also auch

$$\Phi = 4\pi y\sqrt{2ax} + \frac{8\pi}{3}\sqrt{2a(2a - x)^3} - \frac{32}{3}a^2\pi.$$

Für den halben Bogen CA der Cycloid ist $x = 2a$ und $y = a\pi$, also auch

$$\Phi = 8a^2\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Wenn sich aber der Bogen CM der Cycloid um eine durch den Punkt C mit der Geraden AB parallele Axe dreht, so sey die auf dieser Axe genommene Abscisse gleich x und die von M auf diese Axe gezogene Senkrechte gleich y. Dann wird man, wenn man die vorhergehende Differentialgleichung der Cycloid

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

beybehalten will, für die gesuchte Rotations-Fläche den allgemeinen Ausdruck haben

$$\Phi = 2\pi \int x\, ds,$$

oder da $ds = dx \sqrt{\frac{2a}{x}}$ ist,

$$\Phi = 2\pi \int dx \sqrt{2ax}, \text{ also auch}$$

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} x \,.\, \sqrt{2ax},$$

wenn wieder Φ mit x zugleich verschwindet. Für die halbe Cycloide CA ist $x = 2a$, $y = a\pi$ und daher

$$\Phi = \frac{16}{3} a^2 \pi$$

für die convexe Fläche, welche durch die Umdrehung des Bogens CMA um eine Axe entsteht, die durch C mit AB parallel gezogen wird.

Eben so findet man für die Logistik, deren Gleichung $y = e^{\frac{x}{a}}$ ist,

$$\Phi = a^2 \pi \left[\frac{\sin.\omega}{\cos.^2 \omega} + \log.\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)\right] + \text{Const.},$$

wenn man $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\omega$ oder $x = a \log.\text{tang.}\,\omega + a \log.a$ setzt, wie in §. 182.

Die Kettenlinie, deren Gleichung $y = \frac{1}{2} a \left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right]$ ist, gibt

$$\Phi = 2\pi \int y\, ds = 2\pi \left[x + \frac{1}{4} a \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

§. 186. (**Complanation der Flächen überhaupt.**) Um zu dem allgemeinen Ausdrucke des Flächeninhaltes einer krummen Oberfläche zu gelangen, kann man sich (wie in Fig. 42, §. 114) diese Oberfläche durch unendlich nahe Ebenen getheilt vorstellen, von welchen die eine, z. B. MM′Q′Q″, mit der Ebene der xz, und die anderen, wie MNRP, mit der Ebene der yz parallel sind. Diese Ebenen theilen die coordinirte Ebene der xy in unendlich kleine Rechtecke QQ′RR′, deren Flächeninhalt gleich $dx\,dy$ ist. Jedes dieser Rechtecke ist aber die Projektion des ihm entsprechenden Rechteckes MNM′N′, in welche, durch die erwähnten zwey Systeme von Ebenen, die gegebene Oberfläche selbst getheilt wird. Nennt man daher $d\Phi$ das Element MNM′N′

dieser Fläche, und bezeichnet man durch n den Winkel, unter welchem die Fläche dieses Elementes gegen eine mit der Ebene der xy parallelen Ebene geneigt ist, so hat man

$$dxdy = d\Phi \,.\, \cos. n.$$

Allein diese Neigung n des Elementes $d\Phi$ gegen die Ebene der xy ist identisch mit dem Winkel, welchen die in dem Punkte M die Fläche tangirende Ebene mit der coordinirten Ebene der xy bildet. Allein nach dem Vorhergehenden (§. 116, I.) hat man

$$\cos. n = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

wenn $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ die partiellen Differentialcoefficienten der Gleichung der Fläche sind, also ist auch

$$d\Phi = dxdy \,.\, \sqrt{1+p^2+q^2},$$

welcher Ausdruck zwey Mal, in Beziehung auf x und dann in Beziehung auf y, oder umgekehrt, integrirt werden muß.

Ex. I. Für die Kugel des Halbmessers a hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2, \text{ also auch}$$

$$p = -\frac{x}{z},\; q = -\frac{y}{z} \text{ und } \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{z}.$$

Wir erhalten demnach

$$\int dx \sqrt{1+p^2+q^2} = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

welcher Ausdruck in Beziehung auf x zu integriren ist, so daß y als eine constante Größe betrachtet wird. Setzt man der Kürze wegen $a^2 - y^2 = a'^2$, so ist dieses Integral

$$a \int \frac{dx}{\sqrt{a'^2 - x^2}} = a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a'}.$$

Ist nun in A (Fig. 42) der Mittelpunkt der Kugel, und sind AX, AY, AZ die drey als positiv vorausgesetzten Hälften der drey Coordinatenaxen, so wird man bemerken, daß man, so fern man von der Wurzelgröße $\pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ nur das positive Zeichen genommen hat, auch nur den über der Ebene XAY der xy enthaltenen Theil der Kugelfläche erhalten kann, und daß, von diesem Theile, das gefundene Integral $a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a'}$ gleichsam die Summe aller der

Elemente MNM′N′ oder die Zone darstellt, die zwischen den zwey der xz parallelen Ebenen M′Q′Q″ und N′R′R″ liegen und zu der Abscisse $AP = Q''Q = x$ gehören, für welche die Ordinate $PQ = AQ'' = y$ überall dieselbe oder constant ist. Nimmt man nun diese Zone, oder, was dasselbe ist, nimmt man dieses Integral von $x = 0$ bis $x = a'$, d. h. nimmt man es von der Ebene YAZ, zu der $x = 0$ gehört, bis zu der ihr parallelen Ebene, die zu $x = a' = \sqrt{a^2 - y^2}$, oder endlich, nimmt man diese Zone von dem höchsten Punkte derselben, über der Ebene xy, bis dort, wo sie diese Ebene xy schneidet, so erhält man für die Oberfläche dieser Zone den Ausdruck

$$\int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \tfrac{1}{2} a\pi.$$

Will man dann die Summe aller dieser Zonen haben, die zwischen der Ebene NN′R′R″ und der Ebene XAZ der xz enthalten sind, d. h. will man den Theil der Oberfläche der Kugel haben, dessen Projektion in xy das Rechteck AP′R′R″ ist, so hat man

$$\Phi = \int\int dy \,.\, dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \int dy \,.\, \int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$
$$= \int \tfrac{1}{2} a\pi \,.\, dy = \tfrac{1}{2} a\pi y,$$

und nimmt man dieses Integral von $y = 0$ bis $y = a$, so erhält man für den vierten Theil der über der Ebene liegenden Hälfte der Kugelfläche

$$\tfrac{1}{2} a^2 \pi,$$

und daher, wenn man diesen Werth achtmal nimmt, für die Oberfläche der ganzen Kugel den Ausdruck

$$4 a^2 \pi, \quad \text{wie zuvor.}$$

Ex. II. Ein Kegel, dessen Axe in der Axe der z und dessen Mittelpunkt der kreisförmigen Basis im Anfange der Coordinaten liegt, hat zur Gleichung

$$a^2 (b - z)^2 = b^2 (x^2 + y^2),$$

wo a der Halbmesser der Basis und b die Höhe des Kegels ist. Dieß gibt

$$p = -\frac{bx}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = -\frac{by}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + b^2},$$

so daß man daher hat

$$\Phi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int dx \,.\int dy = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int y\,dx,$$

oder, wenn man, wie zuvor, dieses Integral von $y = o$ bis $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ nimmt

$$\Phi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int dx\,\sqrt{a^2-x^2},$$

oder, wenn man integrirt,

$$\Phi = \frac{1}{2a}\sqrt{a^2+b^2}\,.\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc. sin. } \frac{x}{a}\right],$$

wenn Φ mit x verschwindet.

Dieser Ausdruck gibt also denjenigen Theil der Oberfläche des Kegels, der von zwey parallelen, auf der Axe der x senkrechten Ebenen begränzt wird, von welchen die eine die Ebene xz selbst ist, und die andere von ihr um die Größe x absteht.

Wird daher dieses Integral von $x = o$ bis $x = a$ genommen, so erhält man den vierten Theil der Oberfläche des Kegels, also ist auch diese ganze Kegelfläche, ohne die Basis, gleich

$$4a\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

§. 187. (Allgemeine Complanation durch Veränderung der Variablen.) Da die Integration des allgemeinen Ausdruckes

$$\Phi = \iint dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2},$$

mit dem aus der gegebenen Gleichung der Fläche erhaltenen Werthe von x, y, z und p, q oft großen Schwierigkeiten unterworfen ist, so wird es nützlich seyn, eine Methode zu kennen, wodurch man diesen Ausdruck auf einen anderen zurückführen kann, der von willkürlichen Variablen φ und ψ abhängt, die man daher so wählen kann, daß die Integration dadurch erleichtert wird.

Es sey zu diesem Zwecke

$$dx = P\,d\varphi + Q\,d\psi \text{ und } dy = P'd\varphi + Q'd\psi.$$

Da nun der vorhergehende Ausdruck von Φ seiner Natur nach so beschaffen ist, daß die erste Integration desselben, z. B. nach x, die Größe y constant voraussetzt, so wird man, um das Produkt $dx\,dy$ zu erhalten, nicht die beyden letzten Werthe von dx und dy ohne weiteres durch einander multipliciren, sondern man wird annehmen müssen, daß die beyden Gleichungen

$$dx = P d\varphi + Q d\psi \quad \text{und} \quad o = P' d\varphi + Q' d\psi$$

zusammen bestehen. Substituirt man dann den Werth von $d\psi$ aus der zweyten dieser Gleichungen in der ersten, so hat man

$$dx = \frac{PQ' - P'Q}{Q'} d\varphi.$$

Stellen wir dann den vorhergehenden Ausdruck von Φ der Kürze wegen so dar

$$\Phi = \iint U\, dx\, dy,$$

so wird man haben

$$U\, dx\, dy = \frac{(PQ' - P'Q)}{Q'} U\, d\varphi\, dy,$$

und dieser Ausdruck wird sich auf die Variablen y und φ beziehen, wenn man, mittelst der gegebenen Relationen, die Größe ψ eliminirt.

Um aber dann auch noch die Größe dy zu entfernen, wird man, in dem Werthe dieser Größe, $d\varphi = o$ machen, wodurch man erhält

$$dy = Q' d\psi,$$

und somit den gesuchten Ausdruck

$$\Phi = \iint U\, (PQ' - P'Q)\, d\varphi\, d\psi$$

erhalten.

Ex. Für das Ellipsoid mit drey Axen hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nimmt man, wie oben (§. 174), die Größen φ und ψ so an, daß man hat

$$x = a \sin.\varphi \cos.\psi, \quad y = b \sin.\varphi \sin.\psi, \quad z = c \cos.\varphi,$$

so ist

$$\begin{aligned} P &= a \cos.\varphi \cos.\psi, \\ Q &= -a \sin.\varphi \sin.\psi, \\ P' &= b \cos.\varphi \sin.\psi, \\ Q' &= b \sin.\varphi \cos.\psi, \\ PQ' - P'Q &= ab \sin.\varphi \cos.\varphi. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\Phi = \iint dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \iint dx\, dy \sqrt{1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}},$$

also auch

$$\Phi = ab \iint d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \cos.\varphi \sqrt{1 + \frac{c^2 \sin.^2\varphi \cos.^2\psi}{a^2 \cos.^2\varphi} + \frac{c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\psi}{b^2 \cos.^2\varphi}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Phi = ab \int\int d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \sqrt{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos.^2\psi - \frac{c^2}{b^2}\sin.^2\psi\right)\sin.^2\varphi}.$$

Setzt man in der Wurzelgröße dieses Ausdruckes statt 1 dessen Werth $\sin.^2\psi + \cos.^2\psi$, so erhält man, nach einigen einfachen Reduktionen

$$\Phi = ab \int\int d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \,.\, \sqrt{1 - (A^2 \cos.^2\psi + B^2 \sin.^2\psi)\sin.^2\varphi},$$

wo $A^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$ und $B^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ ist.

Setzt man, um noch mehr abzukürzen,

$$C^2 = A^2 \cos^2\psi + B^2 \sin.^2\psi,$$

so erhält man

$$\Phi = ab \int\int d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \sqrt{1 - C^2 \sin.^2\varphi}.$$

Löst man endlich diese Wurzelgröße nach dem Binom auf, so erhält man eine Reihe, deren einzelne Glieder man nach dem Vorhergehenden ohne Anstand integriren wird.

§. 188. (Complanation der Flächen nach Guldin's Regel.) Wir haben oben (§. 185) für die Oberfläche Φ derjenigen Körper, die durch die Rotation einer Curve um eine in ihren Ebenen liegende Gerade, als Axe, die zugleich die Abscissenaxe ist, entstehen, den Ausdruck gefunden

$$\Phi = 2\pi \int y\, ds.$$

Allein in der Lehre des Gleichgewichtes der Körper oder in der Statik wird gezeigt, daß die Coordinaten X, Y des Schwerpunktes einer ebenen Curve, auf dieselbe Coordinatenaxe bezogen, die Werthe haben

$$X = \frac{\int x\, ds}{s} \text{ und } Y = \frac{\int y\, ds}{s},$$

wo s oder $\int ds$ die Länge der erwähnten Curve oder die Peripherie des von ihr eingeschlossenen Raumes bezeichnet. Substituirt man den Werth von $\int y\, ds$ aus der zweyten dieser Gleichungen in den vorhergehenden Werth von Φ, so erhält man

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys.$$

Dieser Ausdruck wird uns also ein sehr bequemes Mittel geben, die Oberfläche Φ solcher Körper zu bestimmen, die durch Rotation einer geschlossenen Curve oder Figur entstanden ist, deren Umfang s

und deren senkrechte Entfernung Y des Schwerpunktes von der Rotationsaxe man bereits kennt, wie dieß z. B. bey dem Kreise, der Ellipse, bey den regelmäßigen Vielecken u. s. der Fall ist, wo der Schwerpunkt bekanntlich in die Mitte derselben fällt. — Dieses Theorem hat der Jesuit Guldin i. J. 1640 bekannt gemacht, obschon bereits Pappus, der im vierten Jahrhundert n. Ch. in Alexandrien lebte, dasselbe in seinen Schriften erwähnt hatte.

Ex. I. Sey AD (Fig. 48) ein Rechteck, dessen Seiten

$$AB = CD = a \quad \text{und} \quad AC = BD = b.$$

Sey ferner EP = c die senkrechte Entfernung der Seite CD von der Rotationsaxe PX und G der Schwerpunkt des Rechteckes. Da dieser Schwerpunkt in dem Durchschnitte der beyden Diagonalen des Rechteckes liegt, so ist seine Entfernung von der Rotationsaxe $Y = PG = \frac{1}{2} b + c$. Der Umfang des Rechteckes aber ist $s = 2(a + b)$, also ist auch die Oberfläche Φ des durch die Rotation dieses Rechteckes um die Axe PX entstandenen Körpers

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys = 2\pi\,(a + b)\,(b + 2c).$$

Für $c = 0$ ist $\Phi = 2b\pi\,(a + b)$ die Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe a und dessen Halbmesser der Basis b ist, die beyden Grundflächen mitgezählt.

Man bemerkt von selbst, daß diese Fläche Φ dieselbe bleibt, wenn auch das Rechteck vor seiner Drehung eine andere Lage gegen die Axe PX hat, wenn nur der Ort des Schwerpunktes G derselbe bleibt.

Auch setzt dieser Ausdruck von Φ voraus, daß die erzeugende Curve die Rotationsaxe PX nicht schneide, weil sonst die zwey Theile der Curve, von welchen der eine über und der andere unter der Rotationsaxe liegt, jeder für sich eine eigene Oberfläche erzeugt, deren Differenz dann durch die Gleichung

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys$$

ausgedrückt wird. Geht z. B. die mit PX parallele Rotationsaxe durch den Punkt P′, und setzt man wieder $EP' = c$ und wie zuvor $GE = \frac{1}{2} b$, so ist $s = 2\,(a + b)$ und $s = GP' = \frac{1}{2} b - c$, also auch

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys = 2\pi\,(a + b)\,(b - 2c),$$

und dieß ist der Ausdruck der Differenz der beyden Cylinder, die durch die Rotation der Rechtecke AD′ und CD′ um die Axe C′D′ entstehen.

Ex. II. Ein regelmäßiges Fünfeck ABD (Fig. 49) drehe sich um die Axe PX. Sey AG = a der Halbmesser des umschriebenen Kreises, so ist die Seite des Fünfeckes

$$AB = a \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

also auch das Loth $GE = \sqrt{AG^2 - \frac{1}{4} AB^2}$ oder

$$GE = \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ist endlich PE = c die Entfernung der Seite des Fünfeckes von der Drehungsaxe, so ist $s = 5 \,.\, AB$ und $Y = c + GE$, also auch die Oberfläche des durch Rotation des Polygons entstandenen Körpers

$$\Phi = 10\, a\, c\, \pi \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + 5 a^2 \pi \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Für $c = 0$ ist $\Phi = 5 a^2 \pi \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Ex. III. Ist endlich CP = c die Entfernung des Mittelpunktes eines Kreises des Halbmessers a von der Rotationsaxe PX (Fig. 50), so ist $Y = c$ und $s = 2 a \pi$, also auch die Oberfläche des durch die Rotation des Kreises erzeugten Körpers

$$\Phi = 4 a c \pi^2.$$

Berührt der Kreis die Rotationsaxe, so ist $c = a$, also auch

$$\Phi = 4 a^2 \pi^2.$$

I. Der vorhergehende Ausdruck $\Phi = 2\pi \int y\, ds$ bezieht sich auf die Fläche, die durch Rotation einer Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, um die Axe der x entsteht. Ist aber die Gleichung dieser Curve $y = b + fx$, wo b eine positive Constante bezeichnet, so wird der vorhergehende Ausdruck in den folgenden übergehen

$$\Phi' = 2\pi \int (b + y)\, ds \quad \text{oder} \quad \Phi' = \Phi + 2 b \pi \,.\, s.$$

Dreht sich also eine Curve zuerst um irgend eine Axe, und dann um eine andere, die mit der ersten parallel und von ihr um die Distanz b entfernt ist, so wird die Differenz der zwey so erzeugten Flächen gleich seyn dem Produkte der erzeugenden Curve in die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Distanz der beyden Rotationsaxen ist, vorausgesetzt, daß die beyden Axen den erzeugenden Bogen der Curve nicht schneiden, und daß sie beyde auf derselben Seite dieses Bogens

liegen. — Liegen aber diese Axen auf verschiedenen Seiten des erzeugenden Bogens der Curve, so findet man

$$\Phi' + \Phi = 2b\pi . s,$$

oder dann ist die Summe der beyden so erzeugten Flächen das Produkt des erzeugenden Bogens in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser die Distanz der beyden Axen ist.

XXXII.
Cubatur der Körper.

---

§. 189. (**Rotationsflächen.**) Nehmen wir wieder zuerst an, daß die Curve OMN (Fig. 33) sich um die Axe OC der x drehe, so wird jede Ordinate $BM = y$ eines Punktes M der Curve die Fläche eines Kreises beschreiben, dessen Mittelpunkt B in der Rotationsaxe, und dessen Halbmesser y ist. Die Fläche dieses Kreises wird daher gleich $y^2 . \pi$ seyn. Eben so wird auch die Ordinate $CN = y + dy$ des nächstfolgenden Punktes N der Curve einen Kreis beschreiben, dessen Fläche $(y + dy)^2 . \pi$ ist. Die zwischen diesen beyden Ordinaten enthaltene Fläche BCMN der Curve aber wird einen Cylinder beschreiben, dessen Basis im Mittel ein Kreis der Fläche gleich $(y + \frac{1}{2} dy)^2 . \pi$, oder was dasselbe ist, gleich $y^2 \pi$, und dessen Höhe gleich $BC = dx$, dessen körperlicher Inhalt oder dessen Volum also gleich $y^2 . \pi dx$ seyn wird. Da nun der ganze, durch die Rotation der Curve um die Axe der x entstandene Körper bloß aus solchen Cylindern zusammengesetzt gedacht werden kann, oder da jeder dieser Cylinder gleichsam das Element des gesuchten Körpers ist, so wird man für den körperlichen Rauminhalt, oder für das Volum V des Körpers den allgemeinen Ausdruck haben:

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

Ex. I. Der senkrechte Kegel mit kreisförmiger Basis entsteht durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyecks CPM (Fig. 1) um eine seiner Catheten CP. Ist $CA = x$, $AB = y$, $CP = a$ und $PM = b$, wo b der Halbmesser der Basis, und a die Höhe des Kegels ist, so hat man

$$y = \frac{bx}{a},$$

also auch

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2 \pi . x^3}{3 a^2},$$

wenn V mit x verschwindet. Für x=a ist das Volum des ganzen Kegels

$$V = \tfrac{1}{3} a b^2 \pi.$$

Ex. II. Für die Parabel ist $y^2 = ax$, also ist auch das Volum des Körpers, der durch Rotation der Parabel um die Axe der x entsteht:

$$V = a \pi \int x dx = \tfrac{1}{2} x . y^2 . \pi,$$

wenn wieder V mit x verschwindet.

Ex. III. Für die Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2),$$

wo (Fig. 44) AQ=x, QN=y ist. Dieß gibt sofort

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax + x^2) dx = \tfrac{1}{3} \pi x y^2 + \frac{1}{3a} b^2 x^2 . \pi.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist der von dem geradlinigen Dreyecke ANQ beschriebene Kegel, der entsteht, wenn sich dieses Dreyeck um die Axe AQ dreht. Der zweyte Theil ist daher das Volum, welches das hyperbolische Segment während der Drehung beschreibt, das von der Sehne AN und von dem Bogen AN begränzt ist.

Sey CR senkrecht auf CQ, und NR mit CQ parallel. Ist CQ=RN=x und CR=QN=y, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dreht sich nun die Hyperbel um die Axe CR, so ist das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi \int x^2 dy = \tfrac{2}{3} \pi a^2 y + \tfrac{1}{3} \pi x^2 y,$$

wenn V mit x verschwindet.

Eben so findet man für die Logistik $y = e^{\frac{x}{a}}$ das durch ihre Rotation entstandene Volum

$$V = \tfrac{1}{2} a \pi (y^2 - 1);$$

wenn V mit x zugleich verschwindet, und die Kettenlinie

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ gibt}$$

$$V = \frac{a^2\pi}{2}\left[x + \tfrac{1}{4}a\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

§. 190. (Anwendung des Vorhergehenden auf die Kugel.) Ist MAN (Fig. 51) ein Kreisbogen des Halbmessers $CA = a$, und ist $AP = x$, $PM = PN = y$, so hat man $y^2 = 2ax - x^2$. Heißt nun V' das Volum, welches durch die Umdrehung der Kreisfläche APM um die Axe AP entsteht, so ist

$$V' = \pi\int y^2 dx = \pi(ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3).$$

Für die Halbkugel ist $x = a$, also das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3}a^3\pi$.

Um eben so das Volum V des Körpers zu erhalten, der durch die Rotation des Kreissectors ACM um AC entsteht, so hat man für das Volum V'' des Kegels, der durch die Rotation des rechtwinkligen Dreyecks CPM um CP entsteht, nach dem Vorhergehenden,

$$V'' = \tfrac{1}{3}\pi(a - x)(2ax - x^2),$$

und da $V = V' + V''$ ist, so hat man auch für das gesuchte Volum des Kugelsectors MCN

$$V = \tfrac{2}{3}a^2\pi x.$$

Für die Halbkugel ist $x = a$, also auch das Volum derselben gleich $\frac{2}{3}a^3\pi$, wie zuvor.

II. Ist man ein dem ersten concentrischer Kreisbogen des Halbmessers $ca = a'$, und ist $ap = x'$, so ist das Volum v des von dem Sector aCm beschriebenen Körpers

$$v = \tfrac{2}{3}a'^2\pi x';$$

also ist auch das Volum des von der Fläche AMma um AC beschriebenen Körpers, oder das Volum des gegebenen Theils einer Kugelschale, deren Dicke $a - a'$ ist, gleich

$$V - v = \tfrac{2}{3}\pi(a^2x - a'^2x'),$$

oder da $\frac{x'}{x} = \frac{a'}{a}$ ist:

$$V - v = \frac{2\pi}{3a}(a^3 - a'^3)x,$$

und daher auch, wenn man $x = 2a$ setzt, das Volum der ganzen Kugelschale gleich

$$\frac{4\pi}{3}(a^3 - a'^3).$$

Setzt man in dem letzten Ausdrucke $a' = o$, so erhält man für die ganze Kugel $\frac{4}{3}a^3\pi$, wie zuvor.

III. Um eben so das Volum V des Körpers zu finden, der durch die Rotation des Kreissegments MAN (Fig. 51) um seine Chorde MN entsteht, sey $CP = b$, $PM = PN = c$ und $PQ = x$, $QR = y$, so ist die Gleichung des Kreises

$$(b + y)^2 + x^2 = a^2 \quad \text{oder}$$
$$y^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2by,$$

also ist auch

$$\int y^2 dx = (a^2 - b^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2b\int y dx.$$

Allein für $x = c$ ist

$$\int y dx = \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}bc,$$

also ist auch, wenn $x = c$ genommen wird, das gesuchte Volum

$$V = \tfrac{2}{3}\pi c(2a^2 + b^2) - 2\pi a^2 b \text{ arc. cos. } \frac{b}{a}.$$

Für $b = o$ ist $c = a$, wenn a den Halbmesser des Kreises bezeichnet; also auch das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3}a^3\pi$, wie zuvor.

§. 191. (Anwendung des Vorhergehenden auf das Sphäroid.) Wenn sich eine Ellipse, deren halbe große und kleine Axe a und b ist, um die große Axe, die zugleich jene der x ist, dreht, so hat man

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also ist auch

$$V = \pi\int y^2 dx = \frac{b^2\pi x}{a^2}(a^2 - \tfrac{1}{3}x^2),$$

wenn V mit x verschwindet. Für $x = a$ erhält man das halbe Sphäroid, also ist auch das Volum des ganzen Sphäroids gleich $\frac{4}{3}ab^2\pi$.

Nimmt man aber die Abscisse x vom Scheitel der Ellipse, so ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

und daher

$$V = \frac{\pi b^2 x^2}{a}\left(1 - \frac{x}{3a}\right).$$

Für das ganze Sphäroid ist $x = 2a$, also auch das Volum desselben gleich $\frac{4}{3}ab^2\pi$, wie zuvor.

I. Ist aber das Sphäroid durch Rotation der Ellipse um ihre

kleine Axe b entstanden, so ist, wenn diese kleine Axe zugleich die der x ist:

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2},$$

und daher

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2}\int(b^2 - x^2)\,dx = \frac{a^2\pi x}{b^2}(b^2 - \tfrac{1}{3}x^2).$$

Für die halbe Ellipse ist $x = b$; also ist auch das Volum des ganzen Sphäroids gleich $\frac{4}{3}a^2 b\pi$.

Nimmt man die Abscisse x vom Scheitel der Ellipse, so ist

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{2bx - x^2},$$

und daher

$$V = \frac{a^2\pi x^2}{b}\left(1 - \frac{x}{3b}\right).$$

Für das ganze Sphäroid hat man $x = 2b$, also auch $V = \frac{4}{3}a^2 b\pi$, wie zuvor. Man sieht daraus, daß sich das Volum des verlängerten Sphäroids zu dem des verkürzten verhält, wie b zu a.

§. 192. (Anwendung des Vorhergehenden auf die Cyclois.) Wenn die Cyclois ACB (Fig. 43) sich um die Axe CD dreht, so hat man (Einl. §. 22)

$$x = CQ = a(1 - \cos.\psi) \text{ und}$$
$$y = QM = a(\psi + \sin.\psi), \text{ also auch}$$
$$dx = a\,d\psi \sin.\psi,$$

und daher, wie man nach einigen einfachen Reduktionen findet:

$$\int y^2 dx = \tfrac{1}{2}a^3\psi^2(1 - 2\cos.\psi) + \tfrac{1}{2}a^3\psi(4\sin.\psi - \sin.2\psi)$$
$$+ a^3(\tfrac{4}{3}\cos.\psi - \tfrac{1}{4}\cos.2\psi - \tfrac{1}{3}\sin.^2\psi\cos.\psi - \tfrac{13}{12}),$$

wenn das Integral in dem Punkte C, das heißt, für $\psi = 0$ verschwindet. Also ist auch das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi\int y^2 dx.$$

Für die halbe Cyclois CMA ist $\psi = \pi$, also auch das Volum des durch die Rotation von CDA um CD entstandenen Körpers

$$V = \frac{a^3\pi}{3}\left(\frac{9\pi^2}{2} - 8\right).$$

I. Dreht sich aber die Cyclois um die Axe ADB, so ist (Einl. §. 22)

$$x = AP = a(\varphi - \sin.\varphi) \text{ und}$$
$$y = PM = a(1 - \cos.\varphi).$$

Mit diesen Werthen von x und y erhält man

$$V = \pi \int y^2 dx = a^3 \pi [\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3} \sin. \varphi + \tfrac{3}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi (1 - \tfrac{2}{9} \cos. \varphi)],$$

wenn das Integral mit φ zugleich verschwindet. Für die halbe Cyclois CAD ist $\varphi = \pi$, also auch

$$V = \tfrac{5}{2} a^3 \pi^2.$$

II. Dreht sich endlich die Cyclois um die mit AD parallele durch C gehende Axe CE, und setzt man $CG = x$ und $GM = y$, so hat man

$$x = a (\psi + \sin. \varphi) \quad \text{und} \quad y = a (1 - \cos. \psi),$$

also auch

$$\int y^2 dx = a^3 \int (1 - \cos. \psi)^2 . (1 + \cos. \psi) d\psi,$$

und daher

$$V = \pi \int y^2 dx = a^3 \pi (\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4} \sin. \psi - \tfrac{1}{4} \sin. 2\psi + \tfrac{1}{12} \sin. 3\psi).$$

Für die halbe Cyclois CMA hat man $\psi = \pi$, also auch

$$V = \tfrac{1}{2} a^3 \pi^2.$$

§. 193. (**Cubatur nach dem Ausdrucke $\int X dx$.**) Wenn der Körper, dessen Volum man bestimmen will, zu beyden Seiten einer durch ihn gehenden Geraden symmetrisch liegt, so wird man diese Gerade für eine der drey Coordinatenaxen, z. B. für die der x annehmen. Sey dann X die Fläche des Schnitts des Körpers, der durch eine auf diese Axe senkrechte Ebene entsteht, so wird man $X dx$ als das Volum eines der Elemente ansehen können, aus welchen der Körper besteht, so daß man hat $dV = X dx$, also auch

$$V = \int X dx.$$

Man sieht, daß dieser Fall alle durch Rotation einer Curve entstandenen Körper in sich begreift, da diese um die Rotationsaxe immer symmetrisch liegen.

Ex. I. Für das Sphäroid mit drey Axen hat man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo a, b, c die drey Halbaxen bezeichnen. Wenn dieses Ellipsoid durch eine auf die Axe der x senkrechte Ebene geschnitten wird, so wird dieser Schnitt, dessen Fläche X seyn soll, die Gestalt einer Ellipse haben. Da man aber

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

hat, so werden die Halbaxen dieses elliptischen Schnitts seyn:

$$b \,.\, \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad c \,.\, \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

so daß man daher (nach §. 170, I.) haben wird:

$$X = bc\pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

also auch

$$V = \int X dx = bc\pi \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right),$$

wenn V mit x verschwindet. Sucht man aber nun denjenigen Theil des Ellipsoids, der zwischen den zwey auf der Axe der x senkrechten Ebenen enthalten ist, zu welchen die Werthe $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehören, so hat man für das Volum dieses Theils

$$V = bc\pi \left(\beta - \alpha - \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3a^2}\right) \quad \text{oder}$$

$$V = bc\pi \, (\beta - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3a^2}\right).$$

Für das ganze Sphäroid ist $\beta = a$ und $\alpha = -a$, so daß daher das Volum des ganzen Sphäroids ist

$$V = \tfrac{4}{3} abc \,.\, \pi.$$

Für $a = b = c$ hat man $V = \frac{4}{3} a^3 \pi$ das Volum der Kugel, wie zuvor.

Ex. II. Der oben (§. 186, II.) betrachtete Kegel hat zur Gleichung

$$a^2 (b - z)^2 = b^2 (x^2 + y^2).$$

Der Kreis aber, der durch einen mit xy parallelen Schnitt des Kegels in der Höhe z entsteht, hat zum Halbmesser $\frac{a}{b}(b - z)$, also auch zur Fläche

$$X = \frac{a^2}{b^2} (b - z)^2 \,.\, \pi,$$

so daß man daher für das Volum des Kegels hat:

$$V = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int (b - z)^2 \, dz = \frac{a^2 \pi}{3 b^2} (b - z)^3.$$

Dieses Integral von $z = 0$ bis $z = b$ genommen, gibt für das Volum des ganzen Kegels

$$\tfrac{1}{3} a^2 b \pi,$$

oder dieses Volum ist gleich dem Produkte der Fläche $a^2 \pi$ der kreisförmigen Basis des Kegels in den dritten Theil seiner Höhe b.

§. 194. (Allgemeine Cubatur der Körper.) Es wurde bereits oben (§. 186) bemerkt, daß die Projektion jedes Elements MNM′N′ (Fig. 42) einer Fläche in der Ebene xy gleich dem Rechtecke

$$QRQ'R' = dxdy$$

ist. Das vierseitige Prisma MNRQ′, dessen Basis dieses Rechteck und dessen Höhe die Ordinate QM oder R′N′ = z ist, hat zu seinem Volum das Produkt z.dxdy, und dieses Produkt kann daher auch als das Element des Volums V des Körpers selbst angesehen werden, so daß man daher hat:

$$dV = zdxdy;$$

welcher Ausdruck so wie der von $d\Phi$, in §. 186, behandelt werden muß. Man substituirt nämlich in ihm zuerst den Werth von z in x und y aus der Gleichung der gegebenen Fläche, wodurch man für dV einen Ausdruck der Form

$$dV = f(x.y).dxdy$$

erhält. Nimmt man in diesem Ausdrucke zuerst die Größe y constant und z. B. gleich PQ = P′Q′ an, und integrirt bloß in Beziehung auf x, so erhält man die Reihe oder die Summe aller der Prismen, deren Grundfläche zwischen der mit AX parallelen Geraden Q′Q″ und R′R″ liegen, und welche von zwey auf AX senkrechten Ebene begränzt werden, die zu den Werthen $x = \alpha$ und $x = \alpha'$ gehören. Diesen Theil des gesuchten körperlichen Volums erhält man demnach durch das Integral

$$\int z dx,$$

indem man dasselbe von $x = \alpha$ bis $x = \alpha'$ nimmt, so daß also der analytische Ausdruck dieses Integrals nur noch als eine Funktion der Größe y erscheint. Um dann auch die andern Reihen der ähnlichen Prismen zu erhalten, deren Grundflächen in dem noch unberücksichtigten Raume APQQ″ der Ebene xy liegen, wird man den für $\int z dx$ durch die erste Integration erhaltenen endlichen Ausdruck mit dy multipliciren, und von dem so erhaltenen Produkte $dy \int z dx$ das Integral in Beziehung auf y suchen.

Nimmt man dieses letzte Integral von $y = \beta$ bis $y = \beta'$, so erhält man dadurch das Volum des Körpers

$$V = \int dy \int z dx,$$

oder vielmehr denjenigen endlichen Theil dieses Volums, der zwischen zwey auf AX senkrechten Ebenen, zu denen $x = \alpha$ und $x = \alpha'$ gehört,

und zwischen zwey anderen auf AY senkrechten Ebenen, zu denen $y=\beta$ und $y=\beta'$ gehört, enthalten ist.

Man sieht, daß man die Ordnung dieser Integration auch umkehren und zuerst in Beziehung auf y, und dann in Beziehung auf x integriren kann, wodurch man erhält:

$$V = \int dx \int z\,dy.$$

Auch kann man sich die Elemente des Körpers als Prismen vorstellen, die auf einer anderen der drey coordinirten Ebenen, z. B. auf der Ebene der xz senkrecht stehen, und deren Grundflächen in dieser Ebene Rechtecke des Ausdrucks $dx\,dz$, deren Höhe aber y ist, so daß dann das gesuchte Volum des Körpers

$$V = \int dz \int y\,dx$$

auf analoge Weise bestimmt werden wird. Mit Rücksicht auf die angezeigte theilweise Integration endlich kann man das Volum des Körpers allgemein durch das dreyfache Integral

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz$$

darstellen, vorausgesetzt, daß die Dichtigkeit der körperlichen Masse, aus welcher der Körper besteht, in allen seinen Punkten dieselbe ist, wo dann die in dem Körper enthaltene Quantität der Masse M dem Volum V desselben proportionirt seyn wird. Ist aber diese Dichtigkeit des Körpers veränderlich, so sey ρ die Dichtigkeit irgend eines Elements dV des Körpers, wo also ρ irgend eine Funktion von x, y und z seyn wird. Da nun überhaupt bey jedem Körper die Masse desselben sich verhält, wie das Produkt der Dichtigkeit in das Volum, so wird, wenn dM das entsprechende Element der Masse des Körpers ist,

$$dM = \rho\,.\,dV$$

seyn, und da $dV = dx\,dy\,dz$ ist, so wird man für die gesuchte Masse des Körpers den Ausdruck haben:

$$M = \int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz,$$

wo man für in allen ihren Theilen homogene Körper ρ gleich einer Constanten, oder auch gleich der Einheit annehmen kann, so daß dann $M = V = \int\int\int dx\,dy\,dz$ ist.

§. 195. (Anwendung des Vorhergehenden auf die Kugel und den Kegel.) Die Gleichung der Kugel des Halbmessers a ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

o daß man daher hat

$$V = \int dy \int dx \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Um das Integral $\int dx \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ zu erhalten, muß y als onstant angenommen werden. Sey also $a^2 - y^2 = a'^2$, so hat man ür dieses Integral

$$\int dx \sqrt{a'^2 - x^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a'^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a'^2 \text{ arc. sin. } \frac{x}{a},$$

ür die oben erwähnte Reihe der zwischen den Geraden Q′Q″ und R′R″ nthaltenen Prismen. Nimmt man diese Reihe von dem höchsten Punkte der Kugel bis zu demjenigen, wo sie von der Ebene der xy jeschnitten wird, d. h. nimmt man das letzte Integral von x = o bis $x = a$, so erhält man

$$\int dx \sqrt{a'^2 - x^2} = \tfrac{1}{4} a'^2 \pi = \tfrac{1}{4} (a^2 - y^2) \pi,$$

o daß daher das gesuchte Volum der Kugel seyn wird:

$$V = \int dy \int dx \sqrt{a'^2 - x^2} = \tfrac{1}{4} \pi \int dy \, (a^2 - y^2) \quad \text{oder}$$
$$V = \tfrac{1}{4} \pi \, (a^2 y - \tfrac{1}{3} y^3),$$

ınd dieß ist der Ausdruck für denjenigen Theil des körperlichen Inhalts der Kugel, der über der Ebene xy auf der Seite der positiven x und y, ınd zwar zwischen der Ebene xz und der mit ihr parallelen Ebene enthalten ist, die von der Ebene der xz um die Größe y absteht. Setzt nan daher in dem so erhaltenen Integral die Größe y = a, oder was dasselbe ist, nimmt man dieses Integral von y = o bis y = a, so erhält man für das Volum des achten Theils oder für das Volum eines Octanten der Kugel

$$V = \tfrac{1}{6} a^3 \pi;$$

ılso auch für das Volum det ganzen Kugel $\frac{4}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

I. Für den in §. 186 betrachteten Kegel hat man

$$a^2 (b - z)^2 = b^2 (x^2 + y^2) \quad \text{oder}$$
$$z = \frac{b}{a} (a - \sqrt{x^2 + y}) ;$$

ılso auch für das Volum desselben

$$V = \frac{b}{a} \int dx \int (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy.$$

Man hat aber

$$\int (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy = ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2 + y^2} - \tfrac{1}{2} x^2 \log. (y + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

welches Integral, von $y=0$ bis $y=\sqrt{a^2-x^2}$ genommen, gibt:

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 \log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Das gesuchte Volum des Kegels ist daher

$$V = \frac{b}{2a}\int dx\left[a\sqrt{a^2-x^2} - x^2\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right].$$

Das erste dieser Integrale ist

$$\int a\,dx\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}a\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc. sin.} \frac{x}{a}\right);$$

für das zweyte aber erhält man nach der Form $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ den Ausdruck

$$\int x^2 dx.\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \tfrac{1}{3}x^3 \log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{3}a\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Endlich ist noch

$$\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin.}\frac{x}{a}.$$

Nimmt man daher alles Vorhergehende zusammen, so erhält man für das Volum des Kegels

$$V = \tfrac{1}{3}bx\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{6}a^2 b \text{ arc. sin.}\frac{x}{a} - \frac{bx^3}{6a}\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

wenn V mit x zugleich verschwindet. Für $x=a$ erhält man den vierten Theil des Kegels $\frac{a^2 b\pi}{12}$, also auch den ganzen Kegel gleich $\frac{a^2 b\pi}{3}$, wie bekannt.

II. Suchen wir noch, in einem dritten Beyspiele, das Volum des Körpers, der zwischen der coordinirten Ebene der xy, zwischen der Fläche (des hyperbolischen Paraboloids) $xy=cz$, und zwischen einem Cylinder enthalten ist, dessen Basis ein Kreis des Halbmessers r, und dessen Axe mit der Axe der z parallel ist. Für diesen Körper geht der allgemeine Ausdruck $V=\int\int z\,dy\,dx$ in folgenden über:

$$V = \frac{1}{c}\int\int xy\,dy\,dx.$$

Integrirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf y von der bestimmten Ordinate y_0 bis zu der unbestimmten y, so hat man

$$V = \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}(y^2 - y_0^2)\,x\,dx.$$

Ist nun $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ die Gleichung des gegebenen Cylinders, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$P=\sqrt{r^2-(x-a)^2} \quad \text{setzt:}$$

$$y_0=b-P, \quad y=b+P \quad \text{und} \quad y^2-y_0^2=4b.P.$$

Ferner ist auch, für dieselben zwey Gränzen y_0 und y die Abscisse $x_0=a-r$ und $x=a+r$, und daher

$$V=\frac{2b}{c}\int_{a-r}^{a+r}\sqrt{r^2-(x-a)^2}\,.\,x\,dx.$$

Setzt man $x-a=rt$, so wird dieser Ausdruck

$$V=\frac{2b}{c}r^2\int_{-1}^{+1}(a+rt)\sqrt{1-t^2}\,.\,dt.$$

Allein es ist

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-t^2}\,.\,t\,dt=0 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1}\sqrt{1-t^2}\,.\,dt=\tfrac{1}{2}\pi,$$

so daß man daher für das gesuchte Volum hat:

$$V=\frac{abr^2.\pi}{c}.$$

§. 196. (Cubatur der Körper überhaupt.) Wendet man auf die Cubatur der Flächen die oben (§. 187) für die Complanation derselben gegebene Methode an, so wird man, indem man $U=z$ setzt, für den allgemeinen Ausdruck des Volums erhalten:

$$V=\iint z\,dx\,dy=\iint z\,(PQ'-P'Q)\,d\varphi\,d\psi.$$

Für das Sphäroid mit drey Axen, dessen Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ist schon daselbst der Werth von

$$PQ'-P'Q=ab\sin.\varphi\cos.\varphi$$

gegeben worden, so daß man daher für dieses Sphäroid hat:

$$V=abc\iint d\varphi\,d\psi\sin.\varphi\cos.^2\varphi.$$

Integrirt man diesen Ausdruck zuerst in Beziehung auf φ, so hat man

$$V=-\tfrac{1}{3}abc\int d\psi\cos.^3\varphi, \quad \text{oder}$$

$$V=\tfrac{1}{3}abc.\psi.\cos^3.\varphi.$$

Nimmt man dieses Integral von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi$, so erhält man

$$V = \frac{2}{3} abc . \psi,$$

und nimmt man diesen Ausdruck von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$, so hat man für das gesuchte Volum des Sphäroids

$$V = \frac{4}{3} abc . \pi,$$

wie schon zuvor (§. 193) erhalten wurde.

§. 197. (**Allgemeine Cubatur durch Polarcoordinaten.**) Sey M (Fig 52) ein Punkt des Körpers, und O der Anfang der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z. Ist dann $OM = r$ die Entfernung dieses Punktes M von O, und ist $MOX = \theta$ der Winkel des Radius Vectors r mit der Axe der positiven x, und ist ψ die Neigung der Ebene MOX gegen die coordinirte Ebene der xy, oder überhaupt gegen eine durch die Axe AX willkürlich gelegte fixe Ebene, so hat man (Einleit. §. 12, III.)

$$x = r \cos. \theta, \quad y = r \sin. \theta \cos. \psi \quad \text{und} \quad z = r \sin. \theta \sin. \psi.$$

Man verlängere die Gerade OM bis zu einem andern Punkte m des Körpers, und setze $Om = r'$. Dann beschreibe man aus dem Mittelpunkte O in der Ebene MOX oder mOX die zwey Kreisbogen MN und mn, und bezeichne durch θ' den Winkel NOX. Endlich drehe man die Ebene dieses Winkels NOX um die Axe OX, und nenne ψ' die Neigung dieser Ebene in ihrer neuen Lage mit jener fixen Ebene. Während dieser Bewegung wird der vierseitige Raum MmnN einen Körper, eine abgestumpfte Pyramide Mq beschreiben, dessen Volum wir U nennen wollen.

Allein dieses Viereck MmnN hat einen Flächeninhalt, der gleich dem der Differenz der beyden Kreissectoren mOn und MON, also gleich

$$f = \frac{1}{2}(r'^2 - r^2)(\theta' - \theta) = \frac{1}{2}(r' + r)(r' - r)(\theta' - \theta)$$

ist. Durch die erwähnte Drehung der Ebene NOX um die Axe OX beschreibt aber auch jeder Punkt M dieses Vierecks einen Kreisbogen MP, dessen Halbmesser das Loth MR von M auf die Axe OX ist, so daß also dieser Kreisbogen $MP = RM . (\psi' - \psi)$ seyn wird. Nimmt man dieses Viereck sehr klein an, so ist das Volum des so entstehenden Elements U des Körpers gleich

$$U = f . PM.$$

Es ist aber $RM = OM \sin. MOX$, oder $RM = r \sin. \theta$, und

daher $MP = r(\psi' - \psi) \sin.\theta$. Substituirt man diese Werthe von MP und f in dem letzten Ausdrucke von U, so erhält man

$$U = \tfrac{1}{2} r (r' + r)(r' - r)(\theta' - \theta)(\psi' - \psi) \sin.\theta.$$

Werden nun die drey Dimensionen des Volums U unendlich klein, oder setzt man

$$Mm = r' - r = dr,$$

und eben so die Winkel

$$MON = \theta' - \theta = d\theta \quad \text{und} \quad MRP = \psi' - \psi = d\psi,$$

so wird auch der Factor $(r' + r)$ in $2r$ übergehen, und man wird für das Volum U, d. h. für das Element dV des Volums des gegebenen Körpers

$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr\, d\theta\, d\psi$$

erhalten.

Auf diese Weise wird daher das Volum des Körpers in Elemente zerlegt, deren jedes die Gestalt einer abgekürzten vierseitigen Pyramide oder eines rechtwinkligen Parallelepipeds hat, dessen drey Seiten sind: erstens die Gerade $Mm = dr$, zweytens der Kreisbogen $MN = r d\theta$, dessen Mittelpunkt O ist, und drittens der Kreisbogen

$$MP = RM \,.\, d\psi = r \sin.\theta \,.\, d\psi,$$

dessen Mittelpunkt der Fußpunkt R des Lothes ist, das von M auf die Axe OX herabgelassen wird.

I. Nennt man dS die Fläche der Basis MNPQ der Pyramide, so ist

$$dS = MN \,.\, MP = r d\theta \,.\, RM d\psi,$$

wo $RM = r \sin.\theta$, also auch

$$dS = r^2 \sin.\theta \,.\, d\theta\, d\psi \quad \text{ist.}$$

Die Höhe dieser abgekürzten Pyramide aber ist $Mm = dr$, also ist auch das Volum derselben, oder das Volum des Elements des gegebenen Körpers

$$dV = dr \,.\, dS \quad \text{oder}$$
$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr\, d\theta\, d\psi, \quad \text{wie zuvor.}$$

II. Wäre aber $MNPQ = d\omega$ das Element einer Kugelfläche, deren Halbmesser $MO = 1$ ist, so hätte man

$$d\omega = MP \,.\, MN, \quad \text{oder da}$$
$$MP = d\psi \sin.\theta \quad \text{und} \quad MN = d\theta \quad \text{ist,}$$
$$d\omega = \sin.\theta \,.\, d\theta\, d\psi.$$

Ist dann $d\omega'$ das analoge Element einer Kugelfläche, deren Halbmesser r ist, so hat man

$$d\omega : d\omega' = 1 : r^2 \quad \text{oder} \quad d\omega' = r^2 d\omega;$$

also ist auch das Element Mq des körperlichen Volums

$$dV = dr \,.\, d\omega' = r^2 dr d\omega,$$

oder wenn man den vorhergehenden Werth von $d\omega$ substituirt:

$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr d\theta d\psi, \text{ wie zuvor.}$$

§. 198. (Allgemeine Cubatur der Körper durch Veränderung der Variablen.) Es gibt aber noch eine andere, allgemeine Darstellung des Elements eines körperlichen Volums, die mit der des §. 187 analog ist, und von welcher das so eben (§. 197) angezeigte Verfahren nur ein besonderer Fall ist.

Sey der Ausdruck

$$U dx dy dz$$

gegeben, wo U eine Funktion von x, y und z bezeichnet. Man verwandle diesen Ausdruck in einen ihm gleichbedeutenden, der aber von drey anderen veränderlichen Größen abhängt, die wir durch r, φ und ψ bezeichnen wollen.

Zu diesem Zwecke nehme man an:

$$\left.\begin{aligned} dx &= P d\varphi + Q d\psi + R dr \\ dy &= P' d\varphi + Q' d\psi + R' dr \\ dz &= P'' d\varphi + Q'' d\psi + R'' dr \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (I),$$

wo P, Q... Funktionen von r, φ und ψ seyn sollen.

Da der gegebene Ausdruck $\int\int\int U dx dy dz$ dreymal integrirt werden soll, das erste Mal z. B. in Beziehung auf x, wo also die Größen y und z als constant angesehen werden, oder wo $dy = dz = 0$ gesetzt wird, so findet man den entsprechenden Werth von dx durch die drey folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx &= P d\varphi + Q d\psi + R dr, \\ 0 &= P' d\varphi + Q' d\psi + R' dr, \\ 0 &= P'' d\varphi + Q'' d\psi + R'' dr. \end{aligned}$$

Eliminirt man aber aus diesen drey Gleichungen die Größen dr und $d\psi$, und setzt man der Kürze wegen

$$T = P(Q'R'' - Q''R') + Q(P''R' - P'R'') + R(P'Q'' - P''Q'),$$

so erhält man

$$dx = \frac{T\,d\varphi}{Q'R'' - Q''R'},$$

und dieser Werth von dx bringt das Produkt $dx\,dy\,dz$ auf die drey variablen Größen φ, y und z zurück.

Um weiter eben so dy zu finden, wird man $d\varphi = dz = 0$ setzen, wodurch die zwey letzten der Gleichungen (I) werden:

$$dy = P'd\psi + R'dr \quad \text{und} \quad 0 = Q''d\psi + R''dr,$$

woraus man, durch Elimination von dr, erhält:

$$dy = (Q'R'' - Q''R')\,\frac{d\psi}{R''},$$

so daß man also hat:

$$dx\,dy = \frac{T\,d\varphi\,d\psi}{R''},$$

und somit ist das Produkt $dx\,dy\,dz$ auf die drey veränderlichen Größen φ, ψ und z gebracht worden.

Um endlich noch dz zu eliminiren, wird man $d\varphi = d\psi = 0$ setzen, wodurch die letzte der Gleichungen (I) in folgende übergeht:

$$dz = R''dr,$$

so daß man also hat:

$$dx\,dy\,dz = T\,dr\,d\varphi\,d\psi, \text{ oder}$$

$$\int\!\!\int\!\!\int U\,dx\,dy\,dz = \int\!\!\int\!\!\int U\,T\,dr\,d\varphi\,d\psi,$$

in welchem letzten Ausdrucke die Größe U ebenfalls als eine Funktion von r, φ und ψ zu betrachten ist.

Wählt man, um die Anwendung dieses allgemeinen Verfahrens auf die Cubatur der Körper zu zeigen, die Größen r, φ, ψ so, daß man hat (Einl. §. 12, II.)

$$x = r \sin.\varphi \cos.\psi,$$
$$y = r \sin.\varphi \sin.\psi,$$
$$z = r \cos.\varphi,$$

so erhält man, wenn man diese drey Gleichungen nach r, φ und ψ differentiirt:

$$P = r \cos.\varphi \cos.\psi,$$
$$P' = r \cos.\varphi \sin.\psi,$$
$$P'' = -\,r \sin.\varphi.$$

Entwickelt man eben so die Größen Q, Q', Q'' und R, R', R'', so findet man

$$T = r^2 \sin.\varphi.$$

Setzt man daher, für die Cubatur der Körper, $U = 1$, so ist der allgemeine Ausdruck des Elements eines körperlichen Volums

$$dV = dx\,dy\,dz, \text{ oder}$$
$$dV = T . dr\,d\varphi\,d\psi, \text{ oder endlich}$$
$$dV = r^2 \sin.\varphi . dr\,d\varphi\,d\psi, \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man aber die Winkel φ und ψ so gewählt, daß man hat (Einl. §. 12, III.)

$$x = r \cos.\varphi,$$
$$y = r \sin.\varphi \cos.\psi,$$
$$z = r \sin.\varphi \sin.\psi,$$

so würde man ebenfalls $T = r^2 \sin.\varphi$, und daher auch

$$dV = r^2 \sin.\varphi . dr\,d\varphi\,d\psi$$

gefunden haben.

§. 199. (Gränzen des vorhergehenden dreyfachen Integrals.) Um die Gränzen zu bestimmen, zwischen welchen man die drey auf einander folgenden Integrationen des Ausdrucks

$$dV = r^2 \sin.\theta . dr\,d\theta\,d\psi$$

zu nehmen hat, wo die Winkel θ und ψ die in §. 197 angeführte Bezeichnung haben, muß man zwey Fälle unterscheiden.

In dem ersten Falle soll der Anfang O der Coordinaten innerhalb dem Körper liegen, oder selbst einen Punkt des zu suchenden Volums bilden. In diesem Falle wird man zuerst in Beziehung auf r, und zwar von $r = 0$ bis $r = u$ integriren, wo u eine Funktion von θ und ψ bezeichnet, die durch die bekannte Gleichung der Oberfläche, deren Volum man sucht, gegeben ist. Wenn dieß geschehen ist, so wird man von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, und von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ integriren, wobey die Ordnung, in welcher man diese beyden Integrationen vornimmt, willkürlich ist.

I. Wenn aber der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Pol derselben außer dem Körper liegt, so wollen wir durch u und u' zwey gegebene Funktionen von θ und ψ, und durch ω und ω' zwey andere Funktionen von ψ, und endlich durch α und α' zwey gegebene Winkel bezeichnen und annehmen, daß man denjenigen Theil des körperlichen Volums sucht, der von zwey seiner Seiten zwischen zwey Oberflächen enthalten ist, deren Gleichungen $r = u$ und $r = u'$ sind; der auf der anderen Seite von zwey conischen Oberflächen begränzt wird, die beyde

ihren Scheitel im Anfange der Coordinaten, und ihre gemeinschaftliche Axe in der Axe der x haben, und deren Gleichungen sind $\theta = \omega$ und $\theta = \omega'$, und der endlich zwischen zwey Ebenen enthalten ist, welche durch diese gemeinschaftliche Axe der beyden Kegel gehen, und welche die Winkel α und α' mit derjenigen fixen Ebene bilden, von welcher man die Winkel ψ zählt. Dieß vorausgesetzt, wird man zuerst in Beziehung auf r, und zwar von $r = u$ bis $r = u'$ integriren, dann in Beziehung auf θ von $\theta = \omega$ bis $\theta = \omega'$, und endlich in Beziehung auf ψ von $\psi = \alpha$ bis $\psi = \alpha'$.

§. 200. (Anwendung des Vorhergehenden auf die Kugel.) Nimmt man den Pol der Coordinaten im Mittelpunkte der Kugel, so ist der Ausdruck $\int r^2 dr$ von den Winkeln θ und ψ unabhängig, so daß man, wenn man in Beziehung auf r von $r = o$ bis $r = r$ integrirt, sofort erhält:

$$V = \tfrac{1}{3} r^3 \int\int \sin.\theta \,.\, d\theta\, d\psi.$$

Es ist aber $\int d\theta \sin.\theta = -\cos.\theta$, oder wenn man dieses Integral von $\theta = o$ bis $\theta = \pi$ nimmt, $\int d\theta \sin.\theta = 2$, also auch

$$V = \tfrac{2}{3} r^3 \int d\psi = \tfrac{2}{3} r^3 \,.\, \psi,$$

und daher, wenn man das letzte Integral von $\psi = o$ bis $\psi = 2\pi$ nimmt, das Volum der ganzen Kugel

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi, \quad \text{wie zuvor.}$$

I. Als Beyspiel zu §. 199, I. seyen für die zwey ersten daselbst erwähnten Flächen zwey concentrische Kugeln gegeben, die ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt im Anfange der Coordinaten haben, und deren Halbmesser a und a' sind. Seyen ferner die beyden a. a. O. erwähnten Kegel von kreisförmiger Basis, d. h. seyen die Winkel ω und ω' constant, so hat man, wenn man den Ausdruck

$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr\, d\theta\, d\psi$$

zuerst in Beziehung auf r integrirt, und das Integral von $r = a$ bis $r = a'$ nimmt:

$$A = \int r^2 dr = \tfrac{1}{3}(a'^3 - a^3),$$

also auch

$$V = A \int d\theta \sin.\theta \,.\, d\psi.$$

Das Integral $\int d\theta \sin.\theta = -\cos.\theta$ von $\theta = \omega$ bis $\theta = \omega'$ genommen, ist gleich $\cos.\omega - \cos.\omega'$, und das von $d\psi$, zwischen den Gränzen α und α' genommen, ist gleich $\alpha' - \alpha$, so daß man also hat:

$$V = A(\alpha' - \alpha)(\cos.\omega - \cos.\omega');$$

wo (Fig. 53) CBD und cbd die beyden Kegel, und wo die Winkel $ACb = ACd = \omega$, $ACB = ACD = \omega'$ sind. Legt man durch die gemeinschaftliche Axe CA der beyden Kegel zwey Ebenen ACM und ACN, die mit der Ebene BCD die Winkel $BAM = \alpha$ und $BAN = \alpha'$ bilden, so schneiden jene Kegel von der Kugelschaale, deren Dicke $a' - a$ ist, ein ringförmiges Stück aus, von welchem der auf der einen Seite durch die Figur MmNn begränzte Körper den für V gefundenen Ausdruck zum Volum hat, so daß also

$$V = \tfrac{1}{3}(a'^3 - a^3)(\alpha' - \alpha)(\cos.\omega - \cos.\omega')$$

ist. Wenn die Höhlung des erwähnten Ringes ganz verschwindet, d. h. wenn der Ring in seiner Mitte ganz ausgefüllt wird, so ist $\omega = 0$. Wird überdieß auch $a = 0$, so verwandelt sich dieser Ring in einen sphärischen Sector, von welchem der zu MNmn gehörende Theil das Volum

$$V = \tfrac{1}{3}a'^3(\alpha - \alpha')(1 - \cos.\omega')$$

hat. Nimmt man $\alpha = 2\pi$, $\alpha' = 0$ und $\omega' = \tfrac{1}{2}\pi$ oder $\cos.\omega' = 0$, so hat man für das Volum der Halbkugel

$$V = \tfrac{2}{3}a'^3\pi, \text{ wie zuvor.}$$

§. 201. (**Cubatur der Körper nach Guldin's Regel.**) So wie wir oben (§. 188) die Oberfläche Φ der Körper gefunden haben, die durch Rotation einer Figur entstehen, deren Umfang s und Abstand Y des Schwerpunkts von der Rotationsaxe bekannt ist, eben so wird auch in der Statik gezeigt, daß das Volum V eines so entstehenden Körpers, wenn F die Oberfläche der ebenen Figur, und Y der senkrechte Abstand des Schwerepunkts dieser Fläche von der Rotationsaxe ist, gleich

$$V = 2\pi . YF$$

ist, so daß man also durch diese einfache Gleichung das Volum aller Rotationsflächen bestimmen kann, wenn die Fläche F der erzeugenden Figur, und der Schwerpunkt derselben schon bekannt ist.

Ex. Wenn sich eine Ellipse AEB (Fig. 50), deren Halbaxen a und b sind, um eine Gerade PX dreht, die von dem Mittelpunkte der Ellipse um die Größe $CP = c$ entfernt ist, so ist $Y = c$ und $F = ab\pi$, also auch das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = 2\pi . YF = 2abc\pi^2, .$$

welches auch die Neigung der einen oder der anderen Axe der Ellipse gegen die Rotationsaxe PX seyn mag.

Dreht sich daher ein Kreis des Halbmessers a um seine Tangente, so ist in dem vorigen Ausdrucke $a = b = c$, und daher das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = 2a^3\pi^2.$$

Dreht sich aber ein Halbkreis um seinen Durchmesser 2a, so ist die bekannte Fläche des Halbkreises $F = \frac{1}{2}a^2\pi$, und wie die Statik lehrt, $Y = \frac{4a}{3\pi}$; also ist auch das Volum des so entstehenden Körpers, das heißt, das Volum der Kugel

$$V = 2\pi \cdot \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{1}{2}a^2\pi \quad \text{oder}$$

$$V = \tfrac{4}{3}a^3\pi, \quad \text{wie zuvor.}$$

I. Ist $y = fx$ die Gleichung der um die Axe der x rotirenden Curve, und sucht man das Volum des Körpers, der durch die Rotation eines Bogens dieser Curve entsteht, dessen Anfangspunkt die bestimmten Ordinaten x_0 und y_0 hat, und der bis zu den unbestimmten Ordinaten xy fortgeht, so hat man, nach dem Vorhergehenden

$$V = \pi\int(y^2 - y_0^2)\,dx.$$

Wenn sich aber diese Curve nicht um die Axe der x, sondern um eine mit derselben parallele und von ihr um die Distanz b entfernte Axe dreht, so wird man für das Volum V′ des so entstehenden Körpers (wie oben §. 188, I.) haben:

$$V' = \pi\int[(y+b)^2 - (y_0 - b)^2]\,dx \quad \text{oder}$$
$$V' = V + 2b\pi\int(y - y_0)\,dx.$$

Allein das Integral $\int(y - y_0)\,dx$ ist offenbar die ebene Fläche, die zwischen der Curve $y = fx$, zwischen ihrer Abscissenaxe und zwischen den beyden Gränzcoordinaten y_0 und y des um die Axe der x rotirenden Bogens dieser Curve eingeschlossen ist, und die wir oben (§. 167 u. f.) durch F bezeichnet haben, so daß man hat:

$$V' = V + 2b\pi \,.\, F.$$

Wenn sich also eine Curve zuerst um irgend eine willkürliche Axe dreht, die in der Ebene dieser Curve liegt, und sie nicht schneidet, und wenn sich dieselbe Curve dann um eine andere, mit jener parallele und von ihr um die Distanz b entfernte Axe dreht, so ist die Differenz der beyden so entstehenden Rotations-Volume gleich dem Produkte der

Fläche F jener Curve in die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gleich b ist.

II. Läßt sich überdieß diese Fläche $F = \int y\,dx$, durch eine der Axe der x parallele und von ihr um b entfernte gerade Linie, in zwey symmetrische Hälften theilen, so werden diese Theile zu den Gleichungen $y = b + fx$ und $y = b - fx$ gehören, und der Ausdruck $V = \pi \int y^2\,dx$ wird in den folgenden übergehen:

$$V = \pi \int [(b + fx)^2 - (b - fx)^2]\,dx \quad \text{oder} \quad V = 4 b \pi \int y\,dx.$$

Eben so ist aber auch

$$F = \int [(b + fx) - (b - fx)]\,dx = 2 \int y\,dx,$$

so daß man hat

$$V = 2 b \pi \,.\, F.$$

Ist also eine Fläche F durch irgend eine Axe in zwey symmetrische Hälften theilbar, so ist das Volum, das durch die Rotation dieser Fläche um eine andere der vorigen parallele, aber nicht durch diese Fläche gehende Axe entsteht, gleich dem Produkte dieser Fläche F in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser die Distanz jener beyden Axen ist. Wenn sich z. B. die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um eine an dem Endpunkte der kleinen Axe $2b$ errichtete Tangente dreht, so ist die Fläche der Ellipse $F = a b \pi$, und daher das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = 2 a b^2 \pi^2.$$

XXXIII.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen.

---

§. 202. (**Sonderung der veränderlichen Gröszen.**) Wenn in einer Differentialgleichung zwischen zwey oder mehr veränderlichen Größen x, y, z, . . . bloß die ersten Differentialien dx, dy, dz, ... dieser Größen vorkommen, so ist diese Gleichung der ersten Ord-

nung, und zwar des ersten, zweyten, dritten, . . . Grades, wenn diese Differentialien bloß in der ersten, zweyten, dritten Potenz vorkommen. Enthält die gegebene Gleichung auch noch die zweyten Differentialien d^2x, d^2y, . . . dieser Größen, so ist sie eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung und wieder des ersten, zweyten, dritten Grades, wenn diese zweyten Differentialien bloß in der ersten, zweyten oder dritten Potenz in der Gleichung enthalten sind, u. s. f. Wir wollen in diesem Abschnitte die Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen näher untersuchen.

Eigentlich gehören alle bisher betrachteten Differentialausdrücke, in welchen bloß zwey veränderliche Größen und die Differentialien derselben in der ersten Potenz vorkommen, zu den Gleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, da sie, wie wir gesehen haben, sich sämmtlich auf die allgemeine Form $dy = Xdx$ zurückbringen lassen, in welcher X irgend eine Funktion von x bezeichnet. Allein in den Gleichungen dieser Art sind, wie ihr allgemeiner Ausdruck zeigt, die zwey veränderlichen Größen x und y bereits gesondert, so daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens nur die von x und auf der andern nur die von y abhängigen Größen stehen. Das bisher Vorgetragene enthält die Vorschriften, solche abgesonderte Gleichungen zu integriren. Wir wollen daher auch in dem Folgenden annehmen, daß man von jeder gegebenen Gleichung das Integral derselben finden kann, sobald man durch irgend ein Verfahren dahin gekommen ist, die zwey veränderlichen Größen in ihr zu trennen, oder sie auf eine gesonderte Gleichung zurück zu führen.

Allein diese Sonderung bietet oft große Schwierigkeiten dar, und man kennt noch keine allgemeine Regel, sie zu Stande zu bringen.

Jede Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen x und y hat (§. 59) die allgemeine Form

$$Mdx + Ndy = o,$$

wo M sowohl als auch N eine Funktion von den beyden Größen x und y ist. Die Sonderung derselben hat zum Zwecke, sie auf die Gestalt

$$Xdx + Ydy = o$$

zu bringen, wo X bloß eine Funktion von x, und Y bloß eine Funktion von y ist. Kann man sie auf diese Gestalt bringen, so hat man auch sofort für das gesuchte Integral der Gleichung

$$\int X dx + \int Y dy = C,$$

wo sich dann das Integral $\int X dx$ sowohl als auch $\int Y dy$ nach den bisher vorgetragenen Vorschriften angeben lassen wird.

Öfter hat diese Sonderung keine Schwierigkeit. Wäre z. B. die Gleichung $y dx - x dy = 0$ gegeben, so hat man sofort, wenn man sie durch xy dividirt:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,$$

eine gesonderte Gleichung, deren Integral, nach dem Vorhergehenden, ist

$$\log. x - \log. y = \log. C \quad \text{oder auch} \quad \log. \frac{x}{y} = \log. C,$$

so daß man daher für das gesuchte Integral derselben die Gleichung $\frac{x}{y} = C$ erhält.

Ist eben so $Y dx - X dy = 0$ gegeben, so hat man

$$\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0.$$

Ist $XY' dx - YX' dy = 0$, so ist auch

$$\frac{X dx}{X'} - \frac{Y dy}{Y'} = 0.$$

Ist endlich $\frac{dy}{dx} = XY$, so hat man auch

$$X dx = \frac{dy}{Y}, \text{ u. s. w.}$$

§. 203. (Sonderung der Variablen bey homogenen Gleichungen.) Eine Differentialgleichung heißt homogen, wenn in ihr die Summe der Potenzen der veränderlichen Größen in jedem Gliede der Gleichung dieselbe ist. So sind

$$x dx + y dy = 0, \quad x dx + \frac{y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

homogene Gleichungen.

Bey Gleichungen dieser Art läßt sich die Sonderung der Variablen x und z immer ausführen, wenn man $y = xz$ setzt. Denn dann nehmen in der Gleichung $M dx + N dy = 0$ die Größen M und N die Gestalt $Z x^m$ und $Z' x^m$ an, wo Z und Z' bloß Funktionen von z sind, und man erhält sonach, wenn man in der gegebenen Gleichung dy gleich $z dx + x dz$ setzt, und alle Glieder derselben durch x^m di-

vidirt:

$$Z\,dx + Z'(z\,dx + x\,dz) = 0 \quad \text{oder}$$
$$(Z + Z'z)\,dx + Z'x\,dz = 0,$$

also auch

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z'dz}{Z + Z'z} = 0,$$

wo die veränderlichen Größen x and z gesondert sind.

Ex. I. Sey die Gleichung

$$x\,dx + y\,dy = a\,y\,dx$$

gegeben. Setzt man in ihr. $y = xz$ und $dy = z\,dx + x\,dz$, so erhält man sofort

$$\frac{dx}{x} + \frac{z\,dz}{1 - az + z^2} = 0;$$

oder da

$$\frac{z\,dz}{1 - az + z^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2z\,dz - a\,dz}{1 - az + z^2} + \frac{a\,dz}{1 - az + z^2}\right]$$

ist, so ist das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung

$$\log. x + \tfrac{1}{2}\log.(1 - az + z^2) + \tfrac{1}{2}a\int\frac{dz}{1 - az + z^2} = C.$$

Das Integral $\int\frac{dz}{1 - az + z^2}$ aber ist schon oben (§. 138) gegeben worden. Für $a > 2$ hängt dieses Integral von den Logarithmen, und für $a < 2$ von den Kreisbogen ab. Für $a = 2$ endlich hat man, nach §. 138:

$$\int\frac{dz}{1 - 2z + z^2} = \int\frac{dz}{(1 - z)^2} = \frac{1}{1 - z},$$

und daher für diesen letzten Fall das gesuchte Integral

$$\log. x + \log.(1 - z) + \frac{1}{1 - z} = C;$$

oder, wenn man den Werth von $z = \frac{y}{x}$ wieder herstellt:

$$\log.(x - y) + \frac{x}{x - y} = C.$$

Da aber jede Größe u auch durch $\log. e^u$ ausgedrückt werden kann, wenn $\log. e = 1$ ist, so kann das letzte Integral auch so geschrieben werden:

$$\log.(x - y) + \log. e^{\frac{x}{x-y}} = \log. C,$$

oder endlich

$$(x - y)\,e^{\frac{x}{x-y}} = C.$$

Ex. II. Sey die Gleichung

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$$

gegeben. Setzt man $y = xz$, so findet man

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = 0,$$

also auch, wenn man (nach §. 137, I) integrirt:

$$\log.x - \log.(z + \sqrt{1 + z^2}) = \log.C,$$

und wenn man den Werth von z wieder herstellt:

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C \quad \text{oder} \quad - y + \sqrt{x^2 + y^2} = C,$$

oder endlich

$$x^2 - 2Cy = C^2.$$

§. 204. (Gleichung $(a+mx+ny)dx+(b+px+qy)dy=0$).
Diese Gleichung kann homogen gemacht werden, wenn man

$$x = t + \alpha \quad \text{und} \quad y = u + \beta$$

setzt. Dann erhält man nämlich

$$(a + m\alpha + n\beta + mt + nu)\,dt$$
$$+ (b + p\alpha + q\beta + pt + qu)\,du = 0.$$

Da aber die Größen α und β willkürlich sind, so kann man sie so annehmen, daß man hat

$$a + m\alpha + n\beta = 0 \quad \text{und} \quad b + p\alpha + q\beta = 0.$$

Durch diese Annahme wird

$$\alpha = \frac{bn - aq}{mq - np} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{ap - bm}{mq - np},$$

und die gegebene Gleichung geht in folgende über:

$$(mt + nu)\,dt + (pt + qu)\,du = 0,$$

die in Beziehung auf t und u homogen ist, und daher, nach §. 170, integrirt werden kann.

I. Ist $mq = np$, so werden die Werthe von α und β unendlich groß. Allein dann ist $px + qy = \frac{p}{m}(mx + ny)$, und die gegebene Gleichung geht in die folgende über:

$$a\,dx + b\,dy + (mx + ny)\left(dx + \frac{p}{m}dy\right) = 0.$$

Setzt man in ihr $mx + ny = z$, so erhält man

$$dx + \frac{(bm + pz)dz}{amn - bm^2 + (mn - pm)z^2} = o,$$

und von dieser Gleichung kann das zweyte Glied nach §. 138, II integrirt werden. Für $mn - pm = o$ endlich hat man

$$dx + \frac{(bm + nz)dz}{amn - bm^2} = o, \text{ also auch}$$

$$x + \frac{bmz + \frac{1}{2}nz^2}{amn - bm^2} = C.$$

§. 205. (Gleichung $dy + Xydx = X'dx$). In dieser Gleichung, in welcher X und X' bloße Funktionen von x bezeichnen, kann man die veränderlichen Größen sondern, wenn man

$$y = X''z, \text{ also auch } dy = zdX'' + X''dz$$

setzt, wo X'' wieder eine Funktion von x ausdrückt. Durch diese Substitution geht nämlich die gegebene Gleichung in folgende über:

$$zdX'' + X''dz + XX''zdx = X'dx.$$

Da aber X'' eine unbestimmte Funktion von x bezeichnet, so kann man sie so nehmen, daß der Ausdruck

$$X''dz + XX''zdx = o$$

wird, wodurch man also auch $zdX'' - X'dx = o$ erhält.

Die erste dieser Gleichungen, durch $X''z$ dividirt, gibt

$$\frac{dz}{z} + Xdx = o \quad \text{oder} \quad \log. z + \int Xdx = C,$$

oder endlich

$$z = C . e^{-\int Xdx}.$$

Mit diesem Werthe von z gibt dann die zweyte jener Gleichungen

$$dX'' = \frac{1}{C} e^{\int Xdx} . X'dx \quad \text{oder}$$

$$X'' = \frac{1}{C}\int e^{\int Xdx} . X'dx + C'.$$

Da aber $y = X''z$ und $z = C . e^{-\int Xdx}$ war, so ist auch das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung

$$y = e^{-\int Xdx} . [\int e^{\int Xdx} . X'dx + C'].$$

Ex. I. Für die Gleichung $dy + ydx = x^2dx$ ist

$$X = 1 \quad \text{und} \quad X' = x^2,$$

also $\int X\,dx = x$, und daher

$$y = e^{-x}[\int x^2 \,.\, e^x \,.\, dx + C].$$

Es ist aber

$$\int x^2 \,.\, e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2),$$

also ist auch

$$y = C \,.\, e^{-x} + x^2 - 2x + 2.$$

Ex. II. Für die Gleichung $(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = a\,dx$ hat man

$$X = \frac{x}{1 - x^2}, \quad X' = \frac{a}{1 - x^2}, \quad \int X\,dx = -\log.\sqrt{1 - x^2},$$

also auch

$$e^{\int X\,dx} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

woraus man das gesuchte Integral erhält

$$y = ax + C \,.\, \sqrt{1 - x^2}.$$

Ex. III. Für die Gleichung $dy + \frac{y(x+1)}{x^2}dx = \frac{dx}{x}$ hat man

$$X = \frac{x+1}{x^2} \text{ und } X' = \frac{1}{x},$$

also auch

$\int X dx = \log.x - \frac{1}{x}$ und $e^{\int X\,dx} = x \,.\, e^{-\frac{1}{x}}$, so wie $e^{-\int X\,dx} = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$,

demnach das gesuchte Integral

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}[\int e^{-\frac{1}{x}}dx + C]. \quad \text{(Vergl. §. 66, II.)}$$

§. 206. (**Reduction der dreygliedrigen Gleichungen der ersten Ordnung.**) Wenn eine gegebene Differentialgleichung der ersten Ordnung nur zwey Glieder hat, so ist die Sonderung derselben immer sehr leicht. Denn hat man

$$\beta \,.\, u^g z^h dz = \alpha \,.\, u^e z^f du,$$

welches die allgemeinste Form einer zweygliedrigen Gleichung der ersten Ordnung ist, so hat man auch sofort

$$\beta \,.\, z^{h-f} dz = \alpha \,.\, u^{e-g} du,$$

wo die Veränderlichen schon gesondert sind.

Nicht so verhält es sich mit den dreygliedrigen Gleichungen, deren allgemeine Form

$$\gamma \,.\, u^i z^k dz + \beta \,.\, u^g z^h du = \alpha \,.\, u^e z^f du$$

ist. Wir wollen suchen, sie auf ihre einfachste Gestalt zurück zu führen.

Dividirt man alle Glieder derselben durch $\gamma u^i z^f$, so erhält man

$$z^{k-f}dz + \frac{\beta}{\gamma}.u^{g-i}z^{h-f}du = \frac{\alpha}{\gamma}.u^{e-i}du \ldots (a).$$

Es sey nun

$$z^{k-f}dz = \frac{dy}{k-f+1} \quad \text{und} \quad u^{g-i}du = \frac{dx}{g-i+1},$$

so hat man

$$x = u^{g-i+1} \quad \text{und} \quad y = z^{k-f+1}.$$

Differentiirt man diese Werthe von x und y, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke von du und dz in der Gleichung (a), so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$a = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma}, \quad b = \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma},$$

$$m = \frac{e-g}{g-i+1}, \quad n = \frac{h-f}{k-f+1}$$

gesetzt hat, für die gesuchte einfachste Form der gegebenen dreygliedrigen Gleichung:

$$dy + by^n dx = ax^m dx \quad \ldots \quad (A).$$

Könnte man die letzte Gleichung für alle Werthe von m und n integriren, so würde dadurch auch die Integration aller dreygliedrigen Gleichungen der ersten Ordnung gegeben seyn. Da aber dieß unmöglich ist, so bleibt nur noch übrig, einige der einfachsten Fälle dieser Gleichung besonders zu betrachten.

§. 207. (Gleichung $dy + by^2dx = ax^m dx$). Setzt man in der Gleichung (A) die Größe $n = 2$, so erhält man die vorstehende, welche die Riccatische Gleichung heißt, weil Riccati sie zuerst behandelt hat.

I. Der einfachste Fall ist der für $m = 0$. Dann ist

$$dy + by^2dx = adx,$$

woraus sofort folgt

$$dx = \frac{dy}{a - by^2},$$

und davon ist das Integral (nach §. 136)

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log. \frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}.$$

II. Setzt man in der Riccatischen Gleichung $y = z^k$, so erhält man

$$n z^{k-1} dz + b z^{2k} dx = a x^m dx,$$

und dieser Ausdruck wird homogen seyn, wenn $k - 1 = 2k = m$, das heißt, wenn $k = -1$ und $m = -2$ ist.

Der zweyte einfache Fall der Riccatischen Gleichung ist also für $m = -2$:

$$dy + b y^2 dx = \frac{a\,dx}{x^2};$$

und da diese Gleichung homogen wird, wenn man $y = \frac{1}{z}$ setzt, so läßt sie sich auch integriren.

III. Setzt man in der Riccatischen Gleichung $y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2}$, so findet man

$$dz + \frac{b z^2}{x^2} dx = a x^{m+2} dx \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$

und dieser Ausdruck wird homogen, wenn $m = -2$ ist, wie zuvor, so wie er sich auch sondern läßt, wenn $m = -4$ ist, denn dann hat man

$$dz + (b z^2 - a)\frac{dx}{x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{b z^2 - a} = 0.$$

IV. Setzt man in der Gleichung (a) die Größe

$$z = \frac{1}{y'} \quad \text{und} \quad x^{m+3} = x',$$

so findet man

$$dy' + \frac{a}{m+3} y'^2 dx' = \frac{b}{m+3} (x')^{-\frac{m+4}{m+3}} dx';$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a' \quad \text{und} \quad -\frac{m+4}{m+3} = m' \quad \text{setzt:}$$

$$dy' + b y'^2 dx' = a' x'^{m'} dx';$$

ein der Riccatischen Gleichung ganz ähnlicher Ausdruck, den man also, nach III., wieder sondern kann, wenn man $y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}$ setzt, und wenn die Größe $m' = -4$ ist.

Fände diese letzte Bedingung nicht Statt, so wird man in der so nach z' transformirten Gleichung wieder

$$z' = \frac{1}{y''} \quad \text{und} \quad (x')^{m'+3} = x'',$$

und neuerdings zur Abkürzung

$$\frac{a'}{m'+3} = b'', \quad \frac{b'}{m'+3} = a'', \quad -\frac{m'+4}{m'+3} = m''$$

setzen, wodurch man zu der Gleichung gelangt:

$$dy'' + b''y''^2 dx'' = a''x''^{m''} dx'';$$

und da auch diese wieder der Riccatischen ähnlich ist, so wird sie sich sondern lassen, wenn $m'' = -4$ ist.

Setzt man dieses Verfahren fort, so findet man, daß sich die Riccatische Gleichung sondern läßt, so oft

m, oder $-\frac{m+4}{m+3} = m'$, oder $-\frac{m'+4}{m'+3} = m''$, oder $-\frac{m''+4}{m''+3} = m'''$ u. s.

gleich der Zahl -4 ist, das heißt, sie läßt sich sondern, wenn m eine der folgenden Zahlen ist:

$$-\tfrac{4}{1}, \quad -\tfrac{8}{3}, \quad -\tfrac{12}{5}, \quad -\tfrac{16}{7} \text{ u. s.,}$$

also überhaupt, wenn

$$m = -\frac{4N}{2N-1}$$

ist, wo N jede ganze positive Zahl bezeichnet, $N = 0$ und $N = \infty$ mit eingeschlossen, wovon die erste $m = 0$, und die zweyte $m = -2$ gibt.

V. Man kann aber auch in der gegebenen Gleichung $y = \frac{1}{y'}$ und $x' = x^{m+1}$ setzen, wodurch man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+1} = b', \quad \frac{b}{m+1} = a' \quad \text{und} \quad -\frac{m}{m+1} = m'$$

genommen wird, erhält:

$$dy' + b'y'^2 dx' = a'x'^{m'} dx'.$$

Da dieß wieder die Form der Riccatischen Gleichung ist, so wird man mit ihr, wie zuvor, verfahren können. Wenn man nämlich in ihr

$$y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{a'}{x'^2}$$

setzt, so wird man finden, daß die Riccatische Gleichung sich in allen den Fällen sondern läßt, wo die Zahl $m' = -\frac{4N}{2N-1}$ ist, wo also

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4N}{2N-1}, \quad \text{oder wo} \quad m = -\frac{4N}{2N+1}$$

ist, das heißt, wo

$$m = -\tfrac{4}{3}, \quad -\tfrac{8}{5}, \quad -\tfrac{12}{7}, \quad -\tfrac{16}{9}, \ldots \quad \text{ist.}$$

§. 208. (**Aufsuchung des integrirenden Factors**). Wir haben bereits oben (§. 61) bemerkt, daß man in den Differentialgleichungen, durch Combination derselben mit ihrer ursprünglichen Gleichung, eine constante Größe eliminiren kann. Ist nun die ursprüngliche Gleichung von der Form $f(x, y) = C$, so daß die Constante C von den veränderlichen Größen x und y getrennt erscheint, so wird das Differential derselben ein vollständiges Differential seyn, und daher nach dem, was Cap. XXVII., §. 163 gesagt worden ist, integrirt werden können.

Hat man z. B. $x\,dy + y\,dx = 0$, so ist dieser Ausdruck ein vollständiges Differential, wie er denn auch in der That durch die Differentiation der Gleichung $xy = C$ entstanden ist, daher auch die letzte Gleichung das Integral der ersten ist.

Enthält aber die ursprüngliche Gleichung jene Constante als einen Factor der veränderlichen Größe x oder y, so wird diejenige Differentialgleichung, in welcher man den Werth jener Constante aus der ursprünglichen Gleichung substituirt hat, kein vollständiges Differential mehr seyn, und daher auch nicht unmittelbar integrirt werden können.

Hat man z. B. die Gleichung $y - ax = 0$, so ist das Differential derselben $dy - a\,dx = 0$, also auch, wenn man a eliminirt:

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

und dieses Differential ist nicht vollständig oder unmittelbar nicht integrabel. In der That wird auch die oben (§. 58) gegebene Bedingungsgleichung $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ der Integrabilität nicht erfüllt, da hier $P = -y$, $Q = x$, also

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1 \quad \text{ist.}$$

Allein wenn man in der erwähnten ursprünglichen Gleichung die Größe a isolirt, so daß man hat

$$\frac{y}{x} = a,$$

so erhält man durch Differentiation

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

und dieß ist allerdings ein vollständiges Differential, da hier

$$P = -\frac{y}{x^2},\ Q = \frac{1}{x},\ \text{also auch} \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{1}{x^2} \text{ ist.}$$

Man sieht daraus, daß die Integrabilität einer gegebenen Gleichung, wenn sie nicht schon an sich ein vollständiges Differential ist, an die Wiederherstellung eines verloren gegangenen Factors, der in unserm Beyspiele $\frac{1}{x^2}$ ist, gebunden ist.

Es sey nun die gegebene Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = o,$$

wo P und Q Funktionen von x und y bezeichnen. Nehmen wir an, daß diese Gleichung kein vollständiges Differential sey, daß sie aber durch den Factor z dazu gemacht werden kann. Da sonach

$$Pzdx + Qzdy = o$$

ein vollständiges Differential ist, so muß man, nach §. 58, die Bedingungsgleichung haben:

$$d\left(\frac{Pz}{dy}\right) = d\left(\frac{Qz}{dx}\right),$$

oder wenn man die Entwicklung derselben vornimmt:

$$P\frac{dz}{dy} + z\frac{dP}{dy} = Q\frac{dz}{dx} + z\frac{dQ}{dx},$$

oder endlich

$$P\frac{dz}{dy} - Q\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Könnte man nun aus dieser Gleichung den Werth von z in x und y ableiten, so würde man dadurch auch jede gegebene Differentialgleichung der ersten Ordnung zu einer vollständigen Differentialgleichung machen, und sie daher nach Cap. XXVII., §. 163 integriren können. Allein meistens ist diese Bestimmung des Werthes von z aus der Gleichung (A) sehr schwer, wo nicht unmöglich, da z im Allgemeinen von den beyden veränderlichen Größen x und y abhängt.

I. In denjenigen Fällen aber, wo z nur eine jener beyden Veränderlichen, z. B. x, enthält, ist es leicht, den Werth dieses Factors z durch die Gleichung (A) zu bestimmen.

Dann ist nämlich

$$-Q\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = o$$

oder

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{Q}\cdot\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

so daß also auch die Größe

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$$

eine Funktion von x seyn wird, die wir durch X bezeichnen wollen. Man hat also in diesem Falle

$$\log. z = \int X dx \quad \text{oder} \quad z = e^{\int X dx}.$$

II. Sollte z nur eine Funktion der Größe y seyn, so würde man eben so erhalten

$$Y = \frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) \quad \text{und} \quad z = e^{\int Y dy}.$$

Ex. I. Für $x dy - y dx = 0$ hat man $P = -y$, $Q = x$, also wenn z nur eine Funktion von x ist, $X = -\frac{2}{x}$, und daher

$$\log. z = \int X dx = \log. x^2 + \log. C \quad \text{oder} \quad z = \frac{C}{x^2},$$

wie zuvor.

Ex. II. Für $dx + (a dx + 2 b y dy)\sqrt{1+x^2} = 0$ hat man

$$P = 1 + a\sqrt{1+x^2}, \quad Q = 2by\sqrt{1+x^2},$$

also auch, wenn z bloß von x abhängen kann:

$$X = -\frac{x}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \int X dx = -\log. \sqrt{1+x^2},$$

$$\text{also auch} \quad z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Multiplicirt man also die gegebene Gleichung durch diesen Factor, so erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + a dx + 2 b y dy = 0,$$

von welcher das gesuchte Integral ist

$$a x + b y^2 + \log. [x + \sqrt{1+x^2}] = C.$$

Man kann noch bemerken, daß sich der Integrationsfactor bey homogenen Gleichungen immer leicht finden läßt, was aber ohne großen Nutzen für die Anwendung ist, da man die homogenen Gleichungen (nach §. 170) sondern, und daher, auch ohne jenen Factor zu kennen, integriren kann. Ist endlich dieser Factor gefunden, oder ist die gegebene Gleichung schon an sich der Bedingung der Integrabilität entsprechend, so wird man ihr Integral nach dem oben (§. 163) mitgetheilten Verfahren bestimmen können, da in diesem Falle der gegebene Ausdruck ein vollständiges Differential ist.

Merkwürdiger ist es, daß zweygliedrige, bereits gesonderte Glei-

chungen, deren jedes Glied ein transcendentes Integral hat, für ihr gemeinschaftliches Integral zuweilen einen algebraischen Ausdruck erhalten. So gibt die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 0,$$

wenn man sie Glied für Glied integrirt:

$$\text{arc. sin.} \frac{x}{a} - \text{arc. sin.} \frac{y}{a} = C.$$

Allein wenn man die erste Gleichung durch xy multiplicirt, so hat man

$$y \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - x \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 0.$$

Setzt man nun in der Gleichung (§. 153) $\int u\,d\nu = u\nu - \int \nu\,du$ zuerst

$u = y$ und $d\nu = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, und dann $u = x$ und $d\nu = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$,

so erhält man

$$- y\sqrt{a^2 - x^2} + \int dy\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$= - x\sqrt{a^2 - y^2} + \int dx\sqrt{a^2 - y^2} + C;$$

oder, da nach der gegebenen Gleichung $\int dy\sqrt{a^2 - x^2} = \int dx\sqrt{a^2 - y^2}$ ist:

$$y\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - y^2} = C$$

für das gesuchte algebraische Integral der Gleichung

$$dx\sqrt{a^2 - y^2} = dy\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Diese Bemerkung hat die erste Veranlassung zu der Theorie der elliptischen Funktionen gegeben, welche wir in dem zweyten Theile dieser Schrift näher betrachten werden. Hier wollen wir nur bemerken, daß die zwey einfachsten und anwendbarsten dieser elliptischen Funktionen folgende sind:

$$f.(\varphi, \theta) = \int d\varphi\sqrt{1 - \alpha^2 \sin.^2 \varphi} \quad \text{und}$$

$$F.(\varphi, \theta) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin.^2 \varphi}},$$

wo $\alpha = \sin.\theta$ der Modul, und φ die Amplitude der elliptischen Funktion heißt. Hat man bereits Tafeln berechnet, die den Werth von $f.(\varphi, \theta)$ und $F.(\varphi, \theta)$ für jeden Werth von φ und θ geben, so wird man diese beyden Integrale als gegeben ansehen, wie man die Aus-

drücke sin. x, arc. sin. x, log. x u. f. als gegeben ansieht, weil die Tafeln für diese Größen bereits berechnet sind. Solche Tafeln für jene beyden Funktionen findet man in *Legendre's* Exercices de Calc. intégral. Vol. III.

Kann man aber diese Funktionen als bereits bekannt ansehen, so sind dadurch nicht bloß mehrere der bereits oben vorgekommenen Integralien gegeben, wie z. B. die für die Rectification der Ellipse und Hyperbel (§. 176 und 177), sondern man kann auch eine große Anzahl anderer, sehr allgemeiner Ausdrücke auf jene zwey Funktionen zurückführen, unter welchen ich hier nur das Integral erwähne

$$\int \frac{X\,dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}},$$

wo $X = \frac{a + bx + cx^2 + \ldots}{a' + b'x + c'x^2 + \ldots}$ eine rationale gebrochene Funktion von x ist. M. s. *Legendre* a. a. O. Vol. I. und *Crelle's* Journal. Vol. X. p. 280.

XXXIV.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des zweyten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen.

---

§. 209. (Gleichungen der Form $dy^2 + Pdydx + Qdx^2 = 0$.) Nach der oben (§. 169) aufgestellten Erklärung sind die Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des zweyten Grades solche, welche nur die ersten Differentiationen der veränderlichen Größe und zwar in ihrer ersten und zweyten Potenz enthalten.

Ihre allgemeine Form ist

$$dy^2 + Pdydx + Qdx^2 = 0 \ldots (A),$$

oder, wenn man durch dx^2 dividirt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + Q = 0.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf die Größe $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ auf, und bezeichnet man durch t und t′ ihre Wurzeln, so hat man

$$\frac{dy}{dx} - t = o \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} - t' = o,$$

und diese beyden Gleichungen lassen sich, als Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, nach dem vorhergehenden Kap. XXIX. integriren. Sind also $M = o$ und $N = o$ die Integrale der beyden letzten Gleichungen, so wird auch das gesuchte Integral der Gleichung (A) entweder $M = o$, oder $N = o$, oder auch das Produkt $MN = o$ seyn, da die Gleichung (A) der folgenden

$$\left(\frac{dy}{dx} - t\right)\left(\frac{dy}{dx} - t'\right) = o$$

gleichgeltend ist, welcher alle jene endlichen Gleichungen genug thun, die einen oder die beyde dieser Faktoren auf Null bringen.

Ex. I. Ist die Gleichung

$$dy^2 - a^2dx^2 = o$$

gegeben, so zerlegt sie sich in die zwey Faktoren

$$dy + adx = o \quad \text{und} \quad dy - adx = o,$$

deren Integrale sind

$$y + ax = C \quad \text{und} \quad y - ax = C',$$

und jede dieser zwey Gleichungen ist also auch das Integral der gegebenen Gleichung, so wie auch ihr Produkt

$$(y + ax - C)(y - ax - C') = o,$$

denn wenn man die letzte Gleichung differentiirt, so erhält man

$$(y + ax - C)(dy - adx) + (y - ax - C')(dy + adx) = o,$$

und wenn man hierin die Werthe von

$$y = C - ax \quad \text{und} \quad y = C' + ax$$

substituirt, so hat man wieder

$$dy = -adx \quad \text{und} \quad dy = +adx,$$

wie zuvor.

Macht man $dy = mdx$, wovon das Integral $y = mx + C$ ist, so geht die oben gegebene Gleichung $dy^2 - a^2dx^2 = o$ in folgende über

$$m^2 - a^2 = o.$$

Eliminirt man aber die Größe m zwischen den beyden Gleichungen $y = mx + C$ und $m^2 - a^2 = o$, so erhält man

$$(y - C)^2 - a^2 x^2 = o,$$

und auch diese Gleichung ist als ein Integral der gegebenen Gleichung $dy^2 - a^2 dx^2 = o$ anzusehen, so wie das vorhergehende Produkt $(y + ax - C)(y - ax - C) = o$, obschon jene nur eine, und diese zwey Constanten enthält. Beyde Gleichungen drücken nämlich das System von zwey geraden Linien aus, die gegen die Axe der x im entgegengesetzten Sinne geneigt sind.

§. 210. (Gleichungen der Form $dy^n + Pdy^{n-1}dx + Qdy^{n-2}dx^2 + \ldots + Tdydx^{n-1} + Udx^n = o.$)

Auch solche Gleichungen lassen sich, wie die in §. 176, behandeln, wenn man ihnen die Gestalt gibt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + T\left(\frac{dy}{dx}\right) + U = o,$$

und wenn man sie in Beziehung auf die Größe $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ auflößt. Sind nämlich dann $t, t', t'' \ldots$ die Wurzeln dieser Gleichung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} - t = o, \quad \frac{dy}{dx} - t' = o, \quad \frac{dy}{dx} - t'' = o \quad \text{u. f.}$$

Sind nun $M = o$, $N = o$, $P = o \ldots$ die Integrale der letzten einfachen Differentialgleichungen, so sind sie auch zugleich die Integrale der gegebenen Gleichung, sie sowohl, als auch das Produkt $MN = o$ oder $MNP = o$ u. f. Sind endlich die Faktoren P, Q, R ... constante Größen, so ist auch $\frac{dy}{dx} = p$ eine constante Größe, also $y = px + C$ und $p = \frac{y - C}{x}$. Substituirt man diesen Werth von p statt $\frac{dy}{dx}$ in der gegebenen Gleichung, so erhält man sofort das gesuchte Integral derselben.

Ex. Ist die Gleichung

$$dy^3 + dx^3 = o \quad \text{oder} \quad p^3 + 1 = o$$

gegeben, so hat man für die Wurzeln dieser Gleichung

$$p = -1, \; p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

alſo ſind auch die Integrale der gegebenen Gleichung

$$y = -x + C \quad \text{oder} \quad y = \frac{x}{2}(1+\sqrt{-3}) + C' \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{x}{2}(1-\sqrt{-3}) + C'',$$

oder auch das Produkt aus je zweyen oder endlich das Produkt aus allen dreyen dieſer Gleichungen.

§. 211. (**Beſondere Fälle.**) Wenn die gegebene Differentialgleichung außer $\frac{dy}{dx}$ nur eine der zwey Variablen, z. B. x, enthält, und leichter in Beziehung auf x, als auf $\frac{dy}{dx}$ aufzulöſen iſt, ſo kann man ſo verfahren.

Man ſuche zuerſt aus der gegebenen Gleichung den Werth von x, den wir durch X bezeichnen wollen. Setzt man dann $\frac{dy}{dx} = p$ oder $dy = p\,dx$, alſo auch

$$y = px - \int x\,dp + C,$$

ſo hat man ſofort, wenn man $x = X$ ſetzt,

$$y = Xx - \int X\,dp + C.$$

Eliminirt man dann p zwiſchen dieſer und der erſten gegebenen Gleichung, ſo erhält man eine endliche Gleichung zwiſchen x und y, die das geſuchte Integral der gegebenen Gleichung iſt.

Ex. Iſt $x\,dx + a\,dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gegeben, ſo hat man

$$x + ap = b\sqrt{1 + p^2},$$

alſo auch

$$X = -ap + b\sqrt{1+p^2},$$

und daher der vorhergehende Werth von y

$$y = -\tfrac{1}{2}ap^2 + bp\sqrt{1+p^2} - b\int dp\sqrt{1+p^2} + C.$$

I. Wenn die gegebene Gleichung zwar beyde Variable, allein eine von ihnen, z. B. y, nur in der erſten Potenz enthält, ſo nehme man von ihr den Werth von y in x und p, wodurch man erhält

$$dy = p\,dx = M\,dx + N\,dp \quad \text{oder}$$

$$(M - p)\,dx + N\,dp = 0.$$

Kann man nun die letzte Gleichung integriren, so erhält man dadurch eine Gleichung zwischen p und x. Eliminirt man dann aus dieser und aus der gegebenen Gleichung die Größe p, so hat man das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung.

Ex. Ist $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gegeben, so hat man

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2}.$$

Das Differential dieser Gleichung ist, wenn man $dy = p\,dx$ setzt,

$$x\,dp + \frac{ap\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beyden Faktoren

$$dp = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Der erste Faktor gibt $p = c$. Substituirt man diesen Werth von p in der gegebenen Gleichung

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2},$$

so hat man für das gesuchte Integral derselben

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}.$$

Der zweyte Faktor gibt $p = \frac{\pm x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$\sqrt{1 + p^2} = -\frac{ap}{x} = \frac{\mp a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und daher, wenn man in der gegebenen Gleichung substituirt,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

welche Gleichung keine willkürliche Constante enthält, und auch auf keine Weise in dem vorhergehenden Integrale

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$$

enthalten ist, und welche daher als eine besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung angesehen werden muß.

II. Hier folgen noch einige hierher gehörende Beyspiele mit ihren Auflösungen, deren Ableitung man in Euler's Differentialrechnung, Part. I. Sect. III., nachsehen kann.

$y\,dx - x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$ gibt zum Integral

$$\log. x = C \pm \tfrac{1}{2} \log. [\sqrt{1+p^2} \pm p] - \tfrac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{2} p^2,$$

wo zwischen beyden Gleichungen die Größe $p = \frac{dy}{dx}$ eliminirt wird.

(B) ... $y dx - x dy = a x \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt eben so

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}} \cdot [\sqrt{1+p^2} - p]^{\frac{1}{a}}.$$

(C) ... $\frac{y dx + x dy}{\sqrt{2xy}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt zum Integral

$$(\sqrt{x} + \sqrt{4})^{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \tfrac{1}{2} C \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}.$$

Da das Element des Bogens einer Curve $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, und da man eben so hat

$$d \cdot \sqrt{2xy} = \frac{y dx + x dy}{\sqrt{2xy}},$$

so ist das gefundene Integral die Gleichung einer Curve zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, für welche der Bogen $s = \sqrt{2xy}$ ist.

(D) ... $a dx + b dy = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt zum Integral

$$(b^2 - 1) y + a b x + x \sqrt{a^2 - b^2 - 1} = C,$$

also die Gleichung einer geraden Linie, für welche der Bogen $s = a x + b y$ ist.

XXXV.

Besondere Auflösungen der Differentialgleichungen.

---

§. 212. (**Erklärung der besonderen Auflösung.**) Wir haben so eben unter den Beyspielen des §. 178 den Fall angetroffen, wo eine gegebene Differentialgleichung, nebst ihrem gewöhnlichen unbestimmten Integrale mit der willkürlichen Constante desselben, noch ein anderes Integral enthält, welches keine willkürliche Constante mit sich führt und auch in jenem unbestimmten Integrale nicht enthalten ist,

demungeachtet aber, wenn man sie differentiirt, die gegebene Differentialgleichung wieder erzeugt. Solche Integrale nennt man **besondere Auflösungen** der zu ihnen gehörenden Differentialgleichungen.

Die gegebene Gleichung war

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und für sie würde das unbestimmte Integral $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$ mit ihrer willkürlichen Constante C, so wie auch die besondere Auflösung $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ gefunden, welche keine neue Constante enthält und durch keine Annahme von C mit jenem Integrale identisch gemacht werden kann, obschon beyde endliche Ausdrücke von y der gegebenen Differentialgleichung entsprechen. Denn wenn man in dieser Differentialgleichung $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$ und $dy = C\,dx$, oder wenn man in ihr $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ substituirt, so wird, in beyden Fällen, der gegebenen Differentialgleichung genug gethan.

Eben so verhält es sich mit der Differentialgleichung

$$dy^2 - x\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0.$$

Denn sucht man aus ihr den Werth von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{x\,dx - 2\,dy}{\sqrt{x^2 - 4y}} + dx = 0,$$

so findet man, da

$$\int \frac{x\,dx - 2\,dy}{\sqrt{x^2 - 4y}} = \sqrt{x^2 - 4y}$$

ist, das unbestimmte Integral der vorgelegten Gleichung

$$\sqrt{x^2 - 4y} + x + C = 0 \quad \text{oder} \quad 4y + 2Cx + C^2 = 0.$$

Allein derselben Gleichung entspricht auch die endliche Gleichung

$$4y - x^2 = 0,$$

und da diese in dem vorhergehenden Integrale nicht enthalten ist, so ist sie die besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung.

§. 213. (Auffindung dieser besonderen Auflösungen einer gegebenen Differentialgleichung.) Sey $U = 0$ eine gegebene Gleichung zwischen x, y und einer Constante a. Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x und y, und eliminirt man dann aus diesen beyden Gleichungen die Größe a, so erhält man eine Gleichung der Form

$$dU = Pdx + Qdy = 0,$$

wo P und Q Funktionen von x und y ohne a sind.

Man kann aber auch die Größe a als eine veränderliche Größe betrachten, wenn dadurch die in der gegebenen Differentialgleichung bestehende Verknüpfung zwischen dx und dy nicht aufgehoben wird, und unter dieser Voraussetzung wird das Differential der Gleichung $U = 0$ die Form erhalten

$$dU' = Pdx + Qdy + Rda = 0,$$

wo auch R eine Funktion von x, y und a ist.

Diese Gleichung $dU' = 0$ geht daher in die frühere Gleichung $dU = 0$ über, erstens, wenn a constant oder $da = 0$ ist, und zweytens, wenn die Größe R' selbst gleich Null gesetzt wird.

Da nun das Resultat der Elimination einer Größe aus zwey Gleichungen, nicht sowohl durch die Beschaffenheit dieser Größe selbst, sondern nur durch die Art ihrer Verbindung mit den übrigen Größen bedingt wird, so erhält man durch Elimination von a aus den beyden Gleichungen $U = 0$ und $dU' = 0$ offenbar dieselbe Differentialgleichung wieder, wenn man auch a als eine variable, durch die Gleichung $R = 0$ bestimmte Größe behandelt. Führt man also nun das veränderlich gewordene a in die Gleichung $U = 0$ ein, d. h. schafft man a aus $U = 0$ mittelst der Gleichung $R = 0$ weg, so erhält man ebenfalls eine endliche Gleichung, die aber, in sofern die Gleichung $R = 0$ in der That ein variables a darbiethet, und da das Resultat der Elimination von a aus den Gleichungen $U = 0$ und $R = 0$ nicht auch durch Substitution irgend eines constanten Werthes für a in der Gleichung $U = 0$ erhalten werden kann, die erwähnte besondere Auflösung unserer Differentialgleichung seyn wird.

Demnach wird man also diese besondere Auflösung einer Differentialgleichung aus ihrem allgemeinen Integral U auf folgende Art finden. Man differentiire dieses Integral bloß in Beziehung auf die darin enthaltene unbestimmte Constante, und eliminire dann aus dem so

erhaltenen Differential und dem gegebenen allgemeinen Integral U die erwähnte Constante. Das Resultat dieser Elimination ist die besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung in allen den Fällen, wo sie durch keinen speziellen Werth der im allgemeinen Integral enthaltenen Constante dargestellt werden kann.

So hatten wir in §. 178 das allgemeine Integral

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}.$$

Dieß in Beziehung auf C differentiirt, gibt

$$C = \frac{\pm x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und die Elimination von C aus diesen beyden Gleichungen gibt

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

als die besondere Auflösung der Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Eben so gibt das allgemeine Integral des §. 179

$$4y + 2Cx + C^2 = 0,$$

und dessen Differential in Beziehung auf C gibt $x = -C$, also ist auch das Resultat der Elimination von C aus diesen beyden Gleichungen oder

$$4y - x^2 = 0$$

die besondere Auflösung der Gleichung

$$dy^2 - x\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0.$$

I. Man sieht, daß sich dasselbe auch auf Differentialgleichungen von drey und mehr veränderlichen Größen anwenden läßt, und daß die Gleichung, welche diese besondere Auflösung vorstellt, für die einhüllende Curve oder für die einhüllende Fläche (§. 133) gehört, welche eine nach einem bestimmten Gesetze bewegliche Curve oder Fläche, die durch die Gleichung $U = 0$ gegeben wird, umschließt und an allen ihren Orten berührt.

Dasselbe läßt sich endlich auch auf Differentialgleichungen der höheren Ordnungen fortsetzen. Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$x\,d^2y^2 - 2\,dx\,dy\,d^2y + x\,dx^4 = 0,$$

so ist das nächste Integral derselben

$$U = (x^2 + C^2)\,dx - 2C\,dy = 0,$$

wo C die willkürliche Constante ist. Allein das Differential von U, bloß in Beziehung auf C genommen, gibt

$$C - \frac{dy}{dx} = 0,$$

und die Elimination von C aus diesen beyden Gleichungen gibt

$$x^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

und diese Gleichung oder $\frac{dy}{dx} \mp x = 0$ ist daher die besondere Auflösung der gegebenen zweyten Differentialgleichung. Wir werden im zweyten Bande auf diese interessanten Betrachtungen wieder zurück kommen.

§. 214. (Curven, deren Subtangente u. s. gegeben ist.) Wir wollen diesen Gegenstand mit einigen Aufgaben beschließen, die sich auf die Integration der Differentialgleichungen beziehen.

I. Man suche die Curve, deren Subtangente gleich einer gegebenen Funktion X von x ist.

Die allgemeine Gleichung dieser Curven ist

$$\frac{y\,dx}{dy} = X \quad \text{oder} \quad \log.y = \int \frac{dx}{X}.$$

Soll z. B. die Subtangente constant seyn, so sey X = a, so ist $\log.y = \frac{x}{a}$, für die Logistik. — Soll die Subtangente gleich der doppelten Abscisse, also X = 2x seyn, so hat man $y^2 = Cx$ für die Parabel. — Soll, für Polarcoordinaten, die Subtangente gleich dem Radius Vector r seyn, so hat man

$$\frac{r^2\,d\nu}{dr} = r \quad \text{oder} \quad \nu = \log.r$$

die Gleichung der logarithmischen Spirale.

II. Um die Curve zu finden, deren Normale ihrem Krümmungshalbmesser gleich ist, hat man für die Normale $\frac{y\,ds}{dx}$ und für den Krümmungshalbmesser $-\frac{dx^3}{dx\,d^2y}$, wenn dx constant angenommen wird. Setzt man diese beyden Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$\frac{y\,d^2y}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = -dx,$$

oder, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2y}{dx} = dp$ setzt,

$$y\,dp + p\,dy = -dx,$$

wovon das Integral ist

$$py = C - x,$$

oder wenn man den Werth von p wieder herstellt

$$y\,dy = C\,dx - x\,dx.$$

Das Integral dieser Gleichung ist aber, wenn x mit y zugleich verschwinden soll,

$$y^2 = 2Cx - x^2,$$

welches die Gleichung des Kreises ist.

III. Um die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser eine constante Größe a ist, hat man

$$a = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y} \text{ oder } \frac{a\,d^2y}{dx^2} = -\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ist wieder $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so ist die letzte Gleichung

$$\frac{a\,dp}{dx} = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \text{ oder } dx = -\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das Integral ist

$$x = C - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn man den Werth von $p = \frac{dy}{dx}$ wieder herstellt,

$$dy = \frac{(x-C)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-C)^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist

$$y - C' = \sqrt{a^2-(x-C)^2} \text{ oder}$$
$$(x-C)^2 + (y-C')^2 = a^2$$

die Gleichung des Kreises.

§. 215. (Trajectorien). Wenn in der Gleichung einer gegebenen Curve die in ihr enthaltene constante Größe sich nach und nach durch alle Abstufungen ändert, wenn z. B. der Parameter einer Parabel sich ändert, während der Scheitel derselben unveränderlich ist,

so erhält man eine Reihe von einander unendlich nahe liegenden Parabeln, die alle denselben Scheitel und dieselbe Abscissenaxe haben. Man suche diejenige Curve, welche alle diese auf einander folgenden Curven unter einem und demselben Winkel schneidet, dessen trigonometrische Tangente gleich k seyn soll. Man nennt die gesuchte Curve die **Trajectorie** der gegebenen Curven.

Ist die Gleichung der gegebenen Curve zwischen den Coordinaten x, y und der Constante a ausgedrückt, so wird die trigonometrische Tangente des Winkels dieser Curve mit der Axe der x gleich $\frac{dy}{dx}$ seyn.

Drückt man aber die Gleichung der gesuchten Trajectorie durch die auf dieselben Axen bezogenen Coordinaten x′, y′ aus, so wird die trigonometrische Tangente des Winkels dieser Trajectorie mit der Axe der x gleich $\frac{dy'}{dx'}$ seyn. Nimmt man diese beyden Tangenten für einen der Durchschnittspunkte beyder Curven, für welchen also $x' = x$ und $y' = y$ ist, so wird der Winkel der beyden Tangenten zugleich der Winkel der beyden Curven in diesem ihren gemeinschaftlichen Punkte seyn, und da dieser Winkel gleich der Differenz der beyden Winkel ist, welchen die Tangenten der zwey Curven mit der Axe der x bilden, so wird man haben

$$k = \frac{\frac{dy'}{dx'} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad . \; . \; . \quad (I.)$$

In dieser Gleichung wird man den Werth von $\frac{dy}{dx}$, nachdem man in ihm $x = x'$ und $y = y'$ gesetzt hat, und dann in dem so erhaltenen Ausdrucke den Werth von a aus der Gleichung der gegebenen Curve substituiren: das Resultat dieser Substitutionen wird die Gleichung der gesuchten Trajectorie seyn.

Ex. Sey die Gleichung der gegebenen Curve $y = ax$, also eine durch den Anfang der Coordinaten gehende Gerade. Dieß gibt $\frac{dy}{dx} = a$, und daher die Gleichung (I.), wenn man in ihr $a = \frac{y'}{x'}$, das heißt, $a = \frac{y}{x}$ setzt

$$k \,.\, (x'dx' + y'dy') = x'dy' - y'dx',$$

oder wenn man durch $x^2 + y^2$ dividirt und dann nach dem bekannten Ausdrucke integrirt

$$k \cdot \log.\sqrt{x'^2 + y'^2} = \text{arc. tang.}\frac{x'}{y'}.$$

Setzt man $x' = r \cos.\nu$, $y' = r \sin.\nu$ also $x'^2 + y'^2 = \nu^2$, so ist die letzte Gleichung

$$k \cdot \log. r = \nu.$$

Die gesuchte Trajectorie ist also die logarithmische Spirale. (Vergl. §. 93, IV.)

Wäre statt der Geraden eine höhere Parabel gegeben, deren Gleichung $y^n = a x^m$ ist, so würde die Gleichung (I.) in folgende übergehen

$$k(m y' d y' + n x' d x') + m y' d x' - n x' d y' = 0,$$

da $\frac{dy}{dx} = \frac{m a x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m y}{n x}$ also auch $\frac{dy}{dx} = \frac{m y'}{n x'}$ ist.

Da aber diese Differentialgleichung homogen ist, so läßt sie sich integriren. Für $m = n = 1$ erhält man den vorhin betrachteten Fall.

§. 216. (Orthogonale Trajectorien.) Ist der Winkel, den die Trajectorie mit den gegebenen Curven bilden soll, ein rechter Winkel, so ist in der Gleichung (I.) die Größe m unendlich, und diese Gleichung geht daher in folgende einfachere über

$$1 + \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II.)},$$

und dieß ist die Gleichung der orthogonalen oder rechtwinkligen Trajectorien.

Ex. Ist die gegebene Curve die Parabel $y^n = a x^m$, so findet man

$$m y' d y' + n x' d x' = 0,$$

deren Integral ist

$$m y'^2 + n x'^2 = C,$$

oder die orthogonale Trajectorie ist eine Ellipse oder Hyperbel, wenn n positiv oder negativ ist. Ist $m = n = 1$, so ist die gegebene Curve eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade, deren Gleichung $y = a x$ und die Trajectorie derselben hat zur Gleichung

$$x^2 + y^2 = C^2,$$

die für einen Kreis gehört.

Wenn endlich die orthogonale Trajectorie ein System von ähnlichen Ellipsen, die alle denselben Mittelpunkt und ihre großen Axen in der Axe der x haben, so hat man für die Gleichung einer dieser Ellipsen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Diese Ellipsen werden aber einander ähnlich seyn, wenn in allen das Verhältniß $\frac{b}{a}$ dasselbe bleibt. Sey also $\frac{b}{a} = m$, so ist

$$y = m\sqrt{a^2 - x^2},$$

und daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{a^2 - x^2}$, also auch $\frac{dy}{dx} = -\frac{x'y'}{a^2 - x'^2}$.

Dadurch geht die Gleichung (II.) in folgende über

$$1 - \frac{x'y'dy'}{(a^2 - x'^2)dx'} = 0 \quad \text{oder} \quad y'dy' = (a^2 - x'^2)\frac{dx'}{x'},$$

wovon das Integral ist

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2 \log. x'.$$

Gehen die Ellipsen in Kreise über, so hat man $y^2 = a^2 - x^2$, also auch $\frac{dy}{dx} = -\frac{x'}{y'}$, und daher die Gleichung (II.)

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{y'},$$

deren Integral $\log. x' = \log. y' + \log. C$ oder $x = Cy$ für eine gerade Linie gehört, wie schon oben gefunden wurde.

§. 217. (Kettenlinie.) Man suche die Curve, deren Bogen s der Tangente des Winkels φ proportional ist, den die berührende Gerade an dem Endpunkte dieses Bogens mit der Axe der y bildet.

Ist a eine constante Größe, so hat man demnach $s = a \tang. \varphi$. Allein es ist auch allgemein

$$\frac{dx}{ds} = \sin. \varphi \quad \text{und} \quad \frac{dy}{ds} = \cos. \varphi,$$

und da die erste Gleichung gibt $ds = \frac{a\,d\varphi}{\cos.^2 \varphi}$, so hat man

$$dx = a\,d\varphi \frac{\sin. \varphi}{\cos.^2 \varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a\,d\varphi}{\cos. \varphi}.$$

Die Integrale der beyden letzten Gleichungen sind

$$x = \frac{a}{\cos.\varphi} + C \quad \text{und} \quad y = a \log.\tan g.\frac{90+\varphi}{2} + C'.$$

Läßt man x und y mit φ zugleich verschwinden, so ist $C = -a$ und $C' = 0$, also hat man für die zwey Gleichungen der gesuchten Curve

$$x = \frac{a}{\cos.\varphi} - a \quad \text{und} \quad y = a \log.\tan g.\frac{90+\varphi}{2}.$$

Eliminirt man aus ihnen die Hülfsgröße φ, so hat man, da $\tan g.\frac{90+\varphi}{2} = \frac{1+\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$ ist,

$$y = a \log.\frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

für die Gleichung der gesuchten Curve, deren Differential

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} \text{ ist.}$$

I. Es war $\cos.\varphi = \frac{a}{a+x}$, also ist auch $\tan g.\varphi = \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a}$. Substituirt man diesen Werth von $\tan g.\varphi$ in der ersten Gleichung $s = a \tan g.\varphi$, so erhält man

$$s^2 = 2ax + x^2,$$

oder, wenn $x = x' - a$ gesetzt wird,

$$s^2 = x'^2 - a^2,$$

so daß also diese rectificable die Kettenlinie (§. 21) ist, wo (Fig. 25) $NP = x$, $AP = x'$ und $PM = y$ ist.

II. Um die Gleichung dieser Curve noch anders auszudrücken, so gibt der letzte Ausdruck derselben

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}, \text{ also auch } e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}},$$

und daher

$$\frac{2x}{a} = e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} - 2,$$

oder, wenn man wieder $x = x' - a$ setzt,

$$\frac{2x'}{a} = \varepsilon^{\frac{y}{a}} + \varepsilon^{-\frac{y}{a}}.$$

XXXVI.

Integration der Differentialgleichungen der zweyten Ordnung zwischen zwey Variablen.

---

§. 218. (**Erste und zweyte Integrale solcher Gleichungen.**) Ist $U=o$ eine endliche Gleichung zwischen x, y und zwey Constanten a und b, so kann man sie zwey Mal nach einander differentiiren, und dann aus den drey Gleichungen $U=o$, $dU=o$ und $d^2U=o$ jene beyden Constanten eliminiren, wodurch man zu einer Differentialgleichung der zweyten Ordnung kömmt, die von jener Constanten unabhängig ist. — Eliminirt man aber aus den zwey ersten Gleichungen $U=o$, $dU=o$ bloß die eine a, oder bloß die andere b dieser zwey Constanten, so erhält man zwey Differentialgleichungen der ersten Ordnung, die wir $V=o$ und $V'=o$ nennen wollen, und es ist klar, daß man die Differentialgleichung der zweyten Ordnung von $U=o$ erhält, wenn man aus $V=o$ und $dV=o$ die Größe a, oder auch, wenn man aus $V=o$ und $dV=o$ die Größe b eliminirt. Daraus folgt daher, daß jede der zwey Differentialgleichungen $V=o$ oder $V'=o$ der ersten Ordnung als das **erste Integral** der Gleichung $d^2U=o$ angesehen werden kann, während $U=o$ das **zweyte oder das endliche Integral** dieser Gleichung $d^2U=o$ ist. Man sieht zugleich, daß man diese endliche Gleichung, oder daß man das zweyte Integral $U=o$ einer gegebenen Gleichung $d^2U=o$ erhält, wenn man die beyden ersten Integrale $V=o$ und $V'=o$ derselben kennt, und wenn man aus den beyden letzten die Größe $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so wie, daß das zweyte Integral einer jeden Differentialgleichung der zweyten Ordnung zwey Constanten der Integration enthalten muß.

Ist z. B. die Gleichung

$$U = o = ax + xy + by$$

gegeben, so findet man

$$dU = o = (a + y)\,dx + (b + x)\,dy \quad \text{und}$$
$$d^2U = o = 2\,dx\,dy + (b + x)\,d^2y.$$

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die Größen a und b, so erhält man

$$d^2 U = o = x y d^2 y + 2 y d y d x - 2 x d y^2.$$

Eben so gibt die Elimination von a aus U und dU

$$V = o = (b + x) x d y - b y d x,$$

und die Elimination von b aus U und dU

$$V' = o = (a + y) y d x - a x d y,$$

und endlich die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus V und V'

$$o = a x + x y + b y,$$

welches wieder die ursprünglich gegebene, endliche Gleichung ist.

§. 219. (**Einfachste Formen dieser Gleichungen.**) In den nun folgenden Ausdrücken bezeichnen die Größen X, X'... Funktionen von x, und Y Funktionen von y. Die Größe x wird als unabhängig oder ihr erstes Differential dx constant, also $d^2 x = o$ vorausgesetzt.

Betrachten wir zuerst einige einfache Gleichungen der zweyten Ordnung, deren Integral ganz ohne Schwierigkeit erhalten wird.

I. . . . . . $\frac{d^2 y}{d x^2} + X = o.$

Diese Gleichung gibt sofort

$$\frac{dy}{dx} + \int X dx = C,$$

und wenn man noch einmal integrirt:

$$y + \int dx \int X dx = Cx + C',$$

wo C und C' die Constanten der Integrationen sind.

II. . . . . . $\frac{d^2 y}{d x^2} + Y = o.$

Multiplicirt man diesen Ausdruck durch dy, so hat man

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} + Y dy = o, \text{ also auch}$$

$$\tfrac{1}{2} d \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Y dy = o, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \int Y dy = C, \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C - 2 \int Y dy},$$

woraus sofort folgt:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C - 2\int Y dy}} + C.$$

Ist z. B. $\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = 0$ gegeben, so hat man

$$x = \frac{1}{a} \log. (ay + \sqrt{C + a^2 y^2}) + C',$$

wofür man auch, da C und C′ willkürliche Constanten sind, setzen kann, wenn log. nat. e = 1 ist:

$$y = C \,.\, e^{ax} + C' \,.\, e^{-ax}.$$

Ist aber $\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$ gegeben, so ist

$$x = \frac{1}{a} \text{ arc. sin. } \frac{ay}{\sqrt{C}} + C', \quad \text{woraus folgt:}$$

$$y = \frac{\sqrt{C}}{a} \,.\, \sin. a(x - c'), \quad \text{oder auch}$$

$$y = \frac{C}{a} \,.\, \sin. ax + \frac{C'}{a} \,.\, \cos. ax.$$

III. . . . . . $\frac{d^2 y}{dy^2} + X = 0.$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dx, so ist

$$\frac{dx d^2 y}{dy^2} = - X dx,$$

also auch, da $-\frac{dx}{dy}$ das Integral von $\frac{dx d^2 y}{dy^2}$ für $dx = \text{const.}$ ist,

$$\frac{dx}{dy} = \int X dx + C \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C + \int X dx},$$

und daher

$$y = C' + \int \frac{dx}{C + \int X dx}.$$

Eben so findet man

IV. $\frac{d^2 y}{dy^2} + Y = 0$ . . . $x = C' + \int dy \,.\, e^{\int Y dy - C}.$

V. $\frac{d^2 y}{dx^2} + X \frac{dy}{dx} = 0$ . . $y = C' + \int dx \,.\, e^{C - \int X dx}.$

VI. $\frac{d^2 y}{dx^2} + Y \frac{dy}{dx} = 0$ . . $x = C' + \int \frac{dy}{C - \int Y dy}.$

§. 220. (Gleichungen, die blosz $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$, ohne x y enthalten.) Setzt man in solchen Gleichungen $dy = p\,dx$, so ist $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, und dadurch wird die gegebene Gleichung auf die Form $\frac{dp}{dx} = P$ gebracht, wo P eine Funktion von p ist. Daraus erhält man

$$x = C + \int \frac{dp}{P} \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

und da $dy = p\,dx = p \cdot \frac{dp}{P}$ ist, so wird auch

$$y = C' + \int \frac{p\,dp}{P} \quad . \quad . \quad . \quad (II).$$

Eliminirt man dann aus den beyden Gleichungen (I) und (II), nachdem man sie integrirt hat, die Gröſse p, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Ex. I. Die Gleichung $a\,d^2y = dy\,dx$, gibt auf diese Weise

$$x = C' + a \log. \frac{y - C}{a}.$$

Ex. II. Eben so erhält man aus

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + a\,d^2y\,dx = 0$$

für die Gleichung (I) und (II)

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = C \quad \text{und} \quad y + \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} = C',$$

und daher, wenn man p eliminirt:

$$(x - C)^2 + (y - C')^2 = a^2.$$

Ex. III. Die Gleichung $a\,d^2y = dx\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt eben so für (I) und (II):

$$dx = \frac{a\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

also auch

$$x + C = a \log. (p + \sqrt{1 + p^2}) \quad \text{und}$$
$$y + C' = a\sqrt{1 + p^2};$$

also auch, wenn man daraus p eliminirt:

$$x + C = a \log. \frac{y + C + \sqrt{(y + C')^2 - a^2}}{a}.$$

Ex. IV. . . $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a\,dy}{dx} + b = 0$ gibt für (I) und II)

$$x = C - \frac{1}{a} \log. (b + ap) \quad \text{und}$$

$$y = C' - \frac{p}{a} - \frac{b}{a^2} \log. (b + ap).$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\log. (b + ap) = a (C - x) \quad \text{und}$$

$$p = \frac{1}{a} (e^{a(C-x)} - b),$$

und wenn man diese Werthe in der zweyten Gleichung substituirt, so erhält man

$$y = C' - \frac{1}{a^2} [abx - e^{C-ax}].$$

Ex. V. . $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,dy^2}{dx^2} + c = 0.$

Diese Gleichung gibt sofort

$$x = C - \int \frac{dp}{c + ap + bp^2},$$

wenn $dy = p\,dx$ ist.

§. 221. (Gleichungen, die bloß $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und x, aber nicht y enthalten). Setzt man wieder

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also auch} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

so verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine der ersten Ordnung zwischen p und x. Kann man diese integriren und p durch x ausdrücken, so ist

$$y = C + \int p\,dx,$$

oder wenn man bequemer x durch p ausdrücken kann:

$$y = px - \int x\,dp.$$

1. Auf dieselbe Art wird man verfahren, wenn die gegebene Gleichung bloß $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und y, aber nicht x enthält. Denn dann ist $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$, und dadurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine der ersten Ordnung zwischen p und y. Kann man diese integriren, und p durch y ausdrücken, so ist

$$x = C + \int \frac{dy}{p},$$

oder wenn man bequemer y durch p ausdrücken kann:

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{p^2}.$$

I. . . $(x^2 dx^2 + a^2 dy^2)\, d^2 y = b x dx^3 dy.$

Dieß gibt sofort

$$(x^2 + a^2 p^2)\, dp = b p x dx,$$

oder, wenn man $x = pz$ setzt:

$$\frac{dp}{p} = \frac{b z dz}{a^2 + (1 - b) z^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$p = C \,.\, [a^2 + (1 - b) z^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}, \text{ also auch}$$

$$x = pz = Cz\, [a^2 + (1 - b) z^2]^{\frac{n}{2(1-n)}},$$

und daher

$$y = px - \int x dp, \text{ oder}$$

$$y = C^2 z [a^2 + (1 - b) z^2]^{\frac{n}{1-n}} - b C^2 \int z^2 dz [a^2 + (1 - b) z^2]^{\frac{2n-1}{1-n}} + C'.$$

Für den besonderen Fall $b = 1$ ist

$$\log.\frac{p}{C} = \int \frac{z dz}{a^2} = \frac{z^2}{2a^2} \text{ und}$$

$$x = pz = ap\sqrt{2 \log.\frac{p}{C}}, \text{ also auch}$$

$$y = ap^2 \sqrt{2 \log.\frac{p}{C}} - a \int p dp \sqrt{2 \log.\frac{p}{C}} + C'.$$

II. . . . $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = X dx d^2 y.$

Dieß gibt

$$\frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ also auch}$$

$$C + \int \frac{dx}{X} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$U = C + \int \frac{dx}{X}, \text{ so wird } p = \frac{U}{\sqrt{1 - U^2}},$$

und daher

$$y = C' + \int p\,dx = C' + \int \frac{U\,dx}{\sqrt{1 - U^2}}.$$

III. . . . $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \sin. y = b \frac{dy^2}{dx^2}.$

Multiplicirt man durch $2\,dy$ und integrirt, so hat man, wenn

$$z = \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dy \quad \text{oder}$$

$$\frac{dz}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{gesetzt wird,}$$

$$\frac{dz}{dy} - 2a \cos. y - 2bz = 0,$$

und von dieser Gleichung ist das Integral

$$z = C \,.\, e^{2by} + \frac{2a}{1 + 4b^2} (\sin. y - 2b \cos. y).$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf y, und stellt den Werth von $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ wieder her, so hat man

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 2b \,.\, C \,.\, e^{2by} + \frac{2a}{1 + 4b^2} (\cos. y + 2b \sin. y)$$

als das erste Integral der gegebenen Gleichung.

Ex. IV. . $\frac{b\,d^2 y}{dx^2} = (a - x) \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$

Setzt man $dy = p\,dx$, so hat man

$$\frac{b\,dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = (a - x)\,dx,$$

wovon das Integral ist:

$$\frac{bp}{\sqrt{1 + p^2}} = ax - \tfrac{1}{2}x^2 + C;$$

oder, wenn $C = 0$ ist:

$$dy = \frac{(2ax - x^2)\,dx}{\sqrt{4b - (2ax - x^2)^2}}$$

das gesuchte erste Integral der gegebenen Gleichung. Man hält aber eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung für integrirt, wenn man ihr erstes Integral oder ihre Differentialgleichung der ersten Ordnung angeben kann.

§. 222. (Gleichungen, welche nur die Grössen $\frac{d^2 y}{d x^2}$, $\frac{d y}{d x}$ und y in der ersten Potenz enthalten.) Sey die Gleichung gegeben:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + A \frac{d y}{d x} + B y = 0,$$

wo A und B constante Größen sind. Setzt man $y = e^{\int u d x}$, so ist

$$\frac{d y}{d x} = u^{\int u d x} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \left(u^2 + \frac{d u}{d x}\right) e^{\int u d x},$$

also geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$u^2 + \frac{d u}{d x} + A u + B = 0.$$

Da in dieser Gleichung die veränderlichen Größen u und x abgesondert werden können, so läßt sie sich integriren. Man hat nämlich

$$x = -\int \frac{d u}{u^2 + A u + B} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

also auch wenn $k = 4 B - A^2$ positiv ist:

$$x = -\frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \text{arc. tang.} \frac{A + 2 x}{\sqrt{k}},$$

und wenn $k' = A^2 - 4 B$ positiv ist:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \log. \frac{A + 2 x - \sqrt{k'}}{A + 2 x + \sqrt{k'}}.$$

I. Man kann aber auch die gegebene Gleichung auf folgende merkwürdige Weise integriren.

Wenn man die Größe u constant annimmt, so hat man $\frac{d u}{d x} = 0$, und man muß daher haben $u^2 + A u + B = 0$.

Sind m und n die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\int u d x = m x + C \quad \text{oder} \quad \int u d x = n x + C',$$

und daher

$$y = e^{m x + C} = e^C . e^{m x}, \quad \text{oder auch} \quad y = C . e^{m x},$$

und eben so

$$y = C' e^{n x}.$$

Der erste Werth von y gibt

$$\frac{d y}{d x} = C m e^{m x} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = C m^2 e^{m x}, \quad \text{also auch}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = C \,.\, e^{mx}(m^2 + Am + B) = 0,$$

und eben so erhält man mit dem zweyten Werthe von y die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = C' \,.\, e^{nx}(n^2 + An + B) = 0.$$

Es wird daher die Gleichung $y = Ce^{mx} + C'e^{nx}$ ebenfalls der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, was auch die Werthe von C und C' sind, und jene ist daher das vollständige Integral von dieser.

Sind die beyden Wurzeln einander gleich, so geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$x = -\int\frac{du}{(u-m)^2} = C + \frac{1}{u-m} \quad \text{oder}$$

$$u = m + \frac{1}{C+x}.$$

Man hat daher

$$\int u\,dx = C' + mx + \log.(C+x) \quad \text{und}$$

$$y = e^{mx + C' \log.(C+x)} = e^{C'} \,.\, e^{mx} \,.\, (C+x),$$

wofür man schreiben kann

$$y = e^{mx}(C + C'x).$$

Sind endlich jene beyden Wurzeln imaginär und von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$, so hat man

$$\int u\,dx = ax \pm bx\sqrt{-1} + \text{const.},$$

oder wenn c eine willkürliche Constante ist:

$$\int u\,dx = a(x+c) \pm b(x+c)\sqrt{-1}$$
$$= ax \pm bx\sqrt{-1} + ac \pm bc\sqrt{-1}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$e^{ac+bc\sqrt{-1}} = C \quad \text{und} \quad e^{ac-bc\sqrt{-1}} = C',$$

so erhält man

$$y = C \,.\, e^{ax+bx\sqrt{-1}} + C' \,.\, e^{ax-bx\sqrt{-1}}$$
$$= e^{ax}\left[C \,.\, e^{bx\sqrt{-1}} + C' \,.\, e^{-bx\sqrt{-1}}\right], \quad \text{oder}$$

$$y = e^{ax}\left[(C+C')\cos.\,bx + (C-C')\sqrt{-1}\,.\,\sin.\,bx\right],$$

wofür man wieder setzen kann:

$$y = e^{ax}(C\cos.\,bx + C'\sin.\,bx).$$

Ex. Ist die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{b} \cdot \frac{d y}{d x} + \frac{1}{a} \cdot y = 0$$

gegeben, und $a < 4b^2$, so sind die beyden Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + \frac{u}{b} + \frac{1}{a} = 0$$

imaginär. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\frac{\gamma}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4 b^2}},$$

so sind diese Wurzeln

$$m = -\frac{1}{2 b} + \frac{\gamma}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{-1} \quad \text{und}$$

$$n = -\frac{1}{2 b} - \frac{\gamma}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{-1},$$

und daher das gesuchte Integral

$$y = e^{-\frac{x}{2b}} \cdot \left[C \cos. \frac{\gamma x}{\sqrt{a}} + C' \sin. \frac{\gamma x}{\sqrt{a}}\right].$$

§. 223. (Gleichung der Form $\frac{d^2 y}{d x^2} + X \frac{d y}{d x} + X' . y = 0$.) Diese Gleichung läßt sich auf dieselbe Weise, wie die vorhergehende, behandeln, wenn man, wie dort, zwey particuläre Werthe von y angeben kann, die derselben Genüge leisten. Sind nämlich M und N diese Werthe, so wird das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung seyn:

$$y = C . M + C' . N,$$

wo C und C' die zwey willkürlichen Constanten sind.

Denn es ist

$$\frac{d y}{d x} = C \frac{d M}{d x} + C' \frac{d N}{d x}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = C \frac{d^2 M}{d x^2} + C' \frac{d^2 N}{d x^2},$$

also auch

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + X \frac{d y}{d x} + X y = C \left[\frac{d^2 M}{d x^2} + X \frac{d M}{d x} + X' M\right]$$
$$+ C' \left[\frac{d^2 N}{d x^2} + X \frac{d N}{d x} + X' N\right] = 0,$$

weil von den zwey eingeschlossenen Factoren des zweyten Theils dieser Gleichung, der Voraussetzung gemäß, jeder für sich gleich Null ist.

I. Kennt man nur einen particulären Werth von y, so setze man, wenn dieser Werth M ist, $y = Mz$, wo z irgend eine unbestimmte Funktion von x bezeichnet. Dann hat man

$$\frac{dy}{dz} = z\frac{dM}{dx} + M\frac{dz}{dx} \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2},$$

und wenn man diese Werthe in die gegebene Gleichung setzt, so muß ihr Genüge geschehen, oder man muß haben:

$$z\frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2} + zX\frac{dM}{dx} + XM\frac{dz}{dx} + X'Mz = 0.$$

Allein vermöge der Voraussetzung ist

$$\frac{d^2M}{dx^2} + X\frac{dM}{dx} + X'M = 0,$$

also muß auch

$$2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2} + XM\frac{dz}{dx} = 0$$

seyn. Man setze also $\frac{dz}{dx} = z'$, so wird man haben

$$2z'\cdot\frac{dM}{dx} + M\cdot\frac{dz'}{dx} + XMz' = 0, \quad \text{oder}$$

$$Xdx = -2\frac{dM}{M} - \frac{dz'}{z'}, \quad \text{woraus folgt}$$

$$\int Xdx = \log.\frac{C}{M^2 z} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{C}{M^2}\cdot e^{-\int Xdx},$$

also auch

$$z = C' + \int\frac{C}{M^2}\cdot e^{-\int Xdx},$$

und daher Mz oder

$$y = M\cdot C' + M\int\frac{C}{M^2}\cdot e^{-\int Xdx},$$

welches das gesuchte Integral ist.

Ex. Ist $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{A}{a+bx}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{B}{(a+bx)^2} = 0$ gegeben, und setzt man, wie im vorhergehenden §. 222, die Größe $y = e^{\int u dx}$, so erhält man die Gleichung

$$u^2 + \frac{du}{dx} + \frac{Au}{a+bx} + \frac{B}{(a+bx)^2} = 0,$$

die sich, für $(a+bx)u=t$ in folgende verwandelt:

$$t^2+(a+bx)\frac{dt}{dx}+(A-b)t+B=o.$$

Sind aber m und n die Wurzeln der Gleichung

$$t^2+(A-b)t+B=o,$$

so wird für t gleich m oder n auch $\frac{dt}{dx}=o$, und es sind die zwey particulären Werthe von u:

$$u=\frac{m}{a+bx} \quad \text{und} \quad u=\frac{n}{a+bx};$$

also sind auch die zwey Werthe von

$$\int u\,dx=\frac{m}{b}\log.(a+bx) \quad \text{und} \quad \int u\,dx=\frac{n}{b}\log.(a+bx),$$

und daher auch die zwey Werthe von

$$y=e^{\int u\,dx}=(a+bx)^{\frac{m}{b}} \quad \text{und} \quad y=(a+bx)^{\frac{n}{b}};$$

so daß also das gesuchte Integral ist:

$$y=C\,.\,(a+bx)^{\frac{m}{b}}+C'\,.\,(a+bx)^{\frac{n}{b}}.$$

II. Die gegebene Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+X\frac{dy}{dx}+X'y=o$$

läßt sich auch auf folgende Weise integriren. Setzt man $y=e^{\int u\,dx}$, wo u irgend eine Funktion von x bezeichnet, also auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ wie oben (§. 222), so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$u^2+\frac{du}{dx}+Xu+X'=o,$$

welche das gesuchte erste Integral der gegebenen Gleichung ist, die aber nur selten noch einmal integrirt, oder auf das zweyte Integral zurückgeführt werden kann.

§. 224. (Gleichung der Form $\frac{d^2y}{dx^2}+X\frac{dy}{dx}+X'y=X''$.)
Setzt man $y=Uz$, wo auch U irgend eine Funktion von x seyn soll, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$U\left(\frac{d^2z}{dx^2}+X\frac{dz}{dx}+X'z\right)+z\frac{dU}{dx}\,.\,\frac{dz}{dx}+Xz\,.\frac{dU}{dx}+z\,.\frac{d^2U}{dx^2}=X''.$$

Bestimmt man nun die Größe z so, daß

$$\frac{d^2z}{dx^2} + X\frac{dz}{dx} + X'z = 0$$

wird, so hat man zur Bestimmung der Funktion U die Gleichung

$$2\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + Xz\,.\,\frac{dU}{dx} + z\frac{d^2U}{dx^2} = X'',$$

oder, wenn man $\frac{dU}{dx} = U'$ setzt:

$$2U'\,.\,\frac{dz}{dx} + XU'z + z\frac{dU'}{dx} = X'' \quad \text{oder}$$

$$dU' + \left(X + \frac{2dz}{zdx}\right)U'dx = X''\frac{dx}{z}.$$

Ist nun z eine gegebene Funktion von x, und setzt man der Kürze wegen

$$V = X + \frac{2dz}{zdx},$$

wo also auch V eine Funktion von x ist, so gibt die letzte Gleichung, wenn man sie durch $e^{\int Vdx}$ multiplicirt:

$$e^{\int Vdx}\,.\,dU' + e^{\int Vdx}\,.\,U'Vdx = e^{\int Vdx}\,.\,X''\frac{dx}{z},$$

und davon ist offenbar das Integral

$$U'\,.\,e^{\int Vdx} = \int e^{\int Vdx}\,.\,X''\frac{dx}{z} \quad \text{oder}$$

$$U' = e^{-\int Vdx}\,.\left[\int e^{\int Vdx}\,.\,X''\frac{dx}{z} + C\right].$$

Es ist aber

$$\int Vdx = \int\left(X + \frac{2dz}{zdx}\right)dx = \int Xdx + \log. z^2,$$

und daher

$$e^{\int Vdx} = z^2\,.\,e^{\int Xdx} \quad \text{und} \quad e^{-\int Vdx} = \frac{1}{z^2}\,.\,e^{-\int Xdx};$$

also ist auch

$$U' = \frac{1}{z^2}\,.\,e^{-\int Xdx}\left[\int e^{\int Xdx}\,.\,X''zdx + C\right] \quad \text{und}$$

$$X = \int U'dx + C',$$

und endlich

$$y = z\int U'dx + C'z.$$

Man sieht demnach, daß die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} + X'y = X''$$

von der Integration der in dem §. 223 betrachteten Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} + X'y = 0$$

abhängt.

§. 225. (Gleichung der Form $\frac{d^2 y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = X$, wo A und B constant sind.) Die Integration dieser Gleichung hängt nach dem in §. 224 Gesagten von der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + A\frac{dz}{dx} + Bz = 0$$

ab, und man leistet, nach §. 223, dieser Gleichung Genüge, wenn man $z = e^{mx}$ setzt, wo m so bestimmt wird, daß

$$m^2 + Am + B = 0$$

ist. Da nun für diesen Fall $X = A$, und das vorhergehende $X'' = X$ wird, so hat man

$$U' = e^{-(A+2m)x}\left[\int e^{(A+m)x} X dx + C\right] \text{ und}$$

$$U = \int e^{-(A+2m)x} dx \int e^{(A+m)x} X dx - \frac{Ce^{-(A+2m)x}}{A+2m} + C'$$

$$= -\frac{e^{-(A+2m)x}}{A+2m}\int e^{(A+m)x} X dx + \frac{\int e^{-mx} X dx}{A+2m}$$

$$- \frac{Ce^{-(A+2m)x}}{A+2m} + C'.$$

Da aber $z = e^{mx}$ und $y = Uz$ ist, so wird, wenn man n statt $-(A+m)$ setzt:

$$y = C'e^{mx} - \frac{Ce^{nx}}{m-n}$$

$$+ \frac{e^{mx}}{m-n}\int e^{-mx} . X dx - \frac{e^{nx}}{m-n}\int e^{-nx} . X dx.$$

Da vermöge der Voraussetzung $m + n = -A$, so ist n die andere Wurzel der Gleichung $m^2 + Am + B = 0$.

Für den Fall, wo $m = n$, ist

$$A + 2m = 0 \text{ und } A + m = -m, \text{ also auch}$$

$$U' = \int e^{-mx} X dx + C \text{ und}$$

$$U = \int dx \int e^{-mx} X dx + Cx + C' \text{ oder}$$

$$U = x\int e^{-mx} X dx - \int e^{-mx} X x dx + Cx + C',$$

und daher

$$y = e^{mx}\left[x\int e^{-mx} X dx - \int e^{-mx} X x dx\right] + e^{mx}(Cx + C').$$

Für den Fall endlich, wo die Wurzeln der Gleichung

$$m^2 + Am + B = 0$$

imaginär, und von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$ sind, hat man

$$e^{mx} = e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}$$
$$= e^{ax} \cdot (\cos. bx + \sqrt{-1} \cdot \sin. bx),$$

und eben so

$$e^{nx} = e^{ax} \cdot (\cos. bx - \sqrt{-1} \cdot \sin. bx).$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden ersten Ausdruck von y, so erhält man

$$y = e^{ax} (C \cos. bx + C' \sin. bx)$$
$$+ \frac{e^{ax}}{b}[\sin. bx . \int e^{-ax} . Xdx \cos. bx - \cos. bx . \int e^{-ax} . Xdx \sin. bx].$$

§. 226. (Gleichung der Form $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y + X = 0$.) Um diese Gleichung zu integriren, wird man nur in den Ausdrücken des vorhergehenden Paragraphs die Größe $A = 0$, $B = a^2$ und $X = -X$ setzen. Dadurch geht die Gleichung $m^2 + Am + B = 0$ in $m^2 + a^2 = 0$ über, so daß daher $m = n = a\sqrt{-1}$ ist. Setzt man daher in der letzten Gleichung des vorhergehenden Paragraphs die Größe $a = 0$, $b = a$ und $X = -X$, so erhält man für das Integral der hier gegebenen Gleichung

$$y = \frac{C}{a} \sin. ax + \frac{C'}{a} \cos. ax + \frac{1}{a} \cos. ax \int Xdx \sin. ax$$
$$- \frac{1}{a} \sin. ax \int Xdx \cos. ax.$$

Ist hier die Größe X aus Gliedern der Form $K . \begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix} (mx + \varepsilon)$ zusammengesetzt, so bringt jedes solche Glied in y ein Glied der Form

$$\frac{K}{m^2 - a^2} \cdot \begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix} (mx + \varepsilon)$$

hervor. Ist aber, für einen besonderen Fall, $m = a$, so bringt das Glied $K . \begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix} (ax + \varepsilon)$ in dem Integrale y erstens ein Glied

$$- \frac{K}{4a^2} \cdot \begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix} (ax + \varepsilon)$$

hervor, welches aber schon in dem Ausdrucke

$$\frac{C}{a} \sin. ax + \frac{C'}{a} \cos. ax,$$

wegen der constanten Größen C und C′, enthalten gedacht, und daher weggelassen werden kann; dasselbe Glied bringt aber auch in y noch das Glied

$$\pm \frac{Hx}{2a} \cdot \begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix} (ax + \varepsilon)$$

hervor, wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn in X das entsprechende Glied ein Sinus oder ein Cosinus ist.

XXXVII.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen drey Variablen.

---

§. 227. (Kennzeichen der Integrabilität dieser Ausdrücke.) Sey die Differentialgleichung gegeben:

$$Pdx + Qdy + Rdz = o \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

wo P, Q, R Funktionen von x, y und z sind. Soll dieser Ausdruck in der That durch die Differentiation irgend einer endlichen Gleichung zwischen x, y und z entstanden seyn, so muß es einen Factor μ geben, der den Ausdruck

$$\mu(Pdx + Qdy + Rdz)$$

zu einem vollständigen Differential macht. Betrachtet man dann eine dieser drey Größen, z. B. x, als constant, so muß auch

$$\mu(Qdy + Rdz)$$

ein vollständiges Differential seyn, oder es muß die Bedingungsgleichung Statt haben:

$$\left(\frac{d \cdot \mu Q}{dz}\right) - \left(\frac{d \cdot \mu R}{dy}\right) = o \quad \text{oder}$$

$$\mu\left(\frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{d\mu}{dz}\right) - \mu\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = o.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch, wenn y oder z constant ist:

$$\mu\left(\frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{d\mu}{dx}\right) - \mu\left(\frac{dP}{dz}\right) - P\left(\frac{d\mu}{dz}\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\mu\left(\frac{dP}{dy}\right) + P\left(\frac{d\mu}{dy}\right) - \mu\left(\frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser drey Bedingungsgleichungen durch P, die zweyte durch Q und die dritte durch R, so gibt die Summe dieser Produkte

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \ldots \text{(II)},$$

und dieß ist die Bedingungsgleichung, welche Statt haben muß, wenn die Gleichung (I) durch Differentiation irgend eines endlichen Ausdrucks zwischen x, y und z entstanden seyn soll.

§. 228. (Integration der Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.) Wenn man sich, nach dem vorhergehenden Paragraph, bereits versichert hat, daß diese Gleichung integrabel ist, d. h. daß sie der Bedingungsgleichung (II) entspricht, so nehme man eine ihrer drey Variablen, z. B. z als constant an, wodurch man die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

zwischen zwey veränderlichen Größen x und y erhält, die man also, nach dem Vorhergehenden, integriren wird. Nennt man dann C die Constante dieser Integration, so differentiire man das gefundene Integral von neuem, doch so, daß man nun alle drey Größen x, y, z als variabel, und C als eine Funktion von z betrachtet. Vergleicht man dann dieses Differential mit dem ursprünglich gegebenen

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

so gibt diese Vergleichung sofort den gesuchten Werth von C durch die dritte Variable z.

Ex. I. Nimmt man in der integrablen Gleichung

$$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) + dz\,(x + y) = 0$$

die Größe z constant, so hat man

$$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$\log.\,(x + z) + \log.\,(y + z) = \log.\,C \quad \text{oder}$$
$$(x + z)\,(y + z) = C.$$

Differentiirt man aber die letzte Gleichung in Beziehung auf x, y und z, so erhält man

$$dx(y+z) + dy(x+z) + dz(x+y+2z) = dC,$$

und wenn man von dieser Gleichung die gegebene subtrahirt, so ist

$$dC = 2z\,dz \quad \text{oder} \quad C = z^2 + C';$$

also ist auch das gesuchte Integral

$$(x+z)(y+z) = z^2 + C' \quad \text{oder} \quad xy + xz + yz = C'.$$

Ex. II. Nimmt man in der integrablen Gleichung

$$dx(ay - bz) + dy(cz - ax) + dz(bx - cy) = 0$$

wieder z constant, so findet man

$$\frac{1}{a}\log.\frac{ay - bz}{cz - ax} = \frac{1}{a}\log. C \quad \text{oder} \quad \frac{ay - bz}{cz - ax} = C.$$

Vergleicht man aber das Differential der letzten Gleichung mit der gegebenen, so findet man, daß C in der That eine Constante, und daß daher das gesuchte Integral ist:

$$\frac{ay - bz}{cz - ax} = C.$$

§. 229. (**Wenn die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ der Bedingungsgleichung (II) nicht entspricht.**) In diesem Falle hat man lange geglaubt, daß dann jene Gleichung kein Integral habe oder absurd sey. Allein Monge hat gezeigt, daß solche Differentialgleichungen immer durch zwey endliche Integrale, die eine willkürliche Funktion enthalten, dargestellt werden können, und daß solche Gleichungen daher gewissen Gattungen von krummen Linien von doppelter Krümmung zugehören.

Wird z als beständig betrachtet, und nennt man μ den Factor, der die Gleichung $Pdx + Qdy$ integrabel macht, und setzt man

$$\int(\mu P dx + \mu Q dy) = U,$$

so ist das gesuchte Integral der letzten Gleichung

$$U = C,$$

wo C nach dem Vorhergehenden irgend eine Funktion von z bezeichnet. Differentiirt man jetzt diese Gleichung in Beziehung auf alle drey Variablen, und bemerkt man, daß

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = \mu P \quad \text{und} \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) = \mu Q$$

ist, so hat man

$$\mu P dx + \mu Q dy + \left[\left(\frac{dU}{dz}\right) - \left(\frac{dC}{dz}\right)\right] dz,$$

und dieß mit der gegebenen Gleichung

$$\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz = 0$$

verglichen, gibt:

$$\mu R = \left(\frac{dU}{dz}\right) - \left(\frac{dC}{dz}\right) \text{ oder } \left(\frac{dC}{dz}\right) = \left(\frac{dU}{dz}\right) - \mu R.$$

Setzt man daher $C = \varphi z$ oder gleich irgend einer Funktion von z, so hat man die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} U = \varphi z \\ \left(\frac{dU}{dz}\right) - \mu R = \varphi' z \end{array}\right\},$$

wo $\varphi' z = \frac{d.\varphi z}{dz}$ ist; und diese beyden Gleichungen stellen daher das Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dr = 0 \text{ vor.}$$

Ex. Ist die Gleichung gegeben:

$$\frac{dz}{z - c} = \frac{x dx + y dy}{x(x-a) + y(y-b)},$$

die jener Bedingungsgleichung (II) nicht Genüge thut (außer wenn $a = b = 0$ wäre), so hat man, wenn man z constant setzt:

$$\frac{x dx + y dy}{x(x-a) + y(y-b)} = 0.$$

Setzt man also den Factor

$$\mu = x(x-a) + y(y-b),$$

so wird dieser Ausdruck $x dx + y dy$, also integrabel, und er gibt

$$x^2 + y^2 = C.$$

Setzt man daher $U = x^2 + y^2$ und $C = \varphi z$, also auch

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = 0,$$

so erhält man, da

$$R = -\frac{1}{z - c}$$

ist, für das Integral des gegebenen Ausdrucks die beyden Gleichungen

$$\varphi z = x^2 + y^2,$$

$$\varphi' z = \frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c},$$

in welchen φz irgend eine willkürliche Funktion von z bezeichnet.

In der That, obschon der hier gegebene Ausdruck der Gleichung (II) nicht entspricht, so wird er doch, wenn man zwischen den Größen x und y eine Abhängigkeit festsetzt, die man durch die Gleichung $y = \varphi x$ ausdrücken kann, eine bestimmte Bedeutung annehmen, die dann durch die Gleichung

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{(x + \varphi x . \varphi' x) dx}{x(x-a) + \varphi x . (\varphi x - b)}$$

zwischen bloß zwey Größen x und z gegeben wird. Nimmt man z. B. für den einfachsten Fall $\varphi x = x$ an, so erhält man

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{2x dx}{x(x-a) + x(x-b)} = \frac{2dx}{2x-a-b},$$

woraus folgt:

$$z - c = C . (2x - a - b),$$

und dadurch wird das Integral des gegebenen Differentialausdrucks durch das System der beyden Gleichungen ausgedrückt:

$$y = x,$$
$$z - c = C . (2x - a - b).$$

XXXVIII.

Integration der partiellen Differentialgleichungen.

---

§. 230. (Gleichungen der Form $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$, wo R eine Funktion von x, y und z ist). Eine endliche Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y, z, von welchen zwey, z. B. x und y, unabhängig sind, hat bekanntlich zwey erste Differentialgleichungen, von welchen die eine $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ oder das partielle Differential von z bloß in Beziehung auf x, und die andere eben so $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gibt.

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichungen bildet einen eigenen und sehr wichtigen Zweig der Analyse. Wir wollen hier nur die vorzüglichsten derselben kurz anzeigen.

Wenn die gegebene Differentialgleichung bloß den einen der beyden partiellen Differential-Coefficienten, z. B. $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ enthält, also von der Form $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$ ist, wo R eine Funktion von x, y und z bezeichnet, so hat man auch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dx = R dx \quad \text{oder} \quad dz - R dx = o.$$

Da aber in der gegebenen Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$ die Größe y als eine constante Größe betrachtet wird, so ist $dz - R dx = o$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen den beyden Variablen z und x, deren Integral daher nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann. — Sey $U - C = o$ dieses Integral, wo C die Constante der Integralien bezeichnet. Allein dieses C ist hier nicht die gewöhnliche Constante, wie wir sie bisher betrachtet haben, da sie offenbar auch von der Größe y, und zwar auf eine ganz willkürliche Weise abhängen kann, ohne daß dadurch die Gleichung $U + C = o$ aufhört, das Integral von $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$ zu seyn. Diesem gemäß werden wir also für das Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung den Ausdruck haben:

$$U = fy,$$

wo fy jede willkürliche, selbst discontinuirliche, ja ganz gesetzlose Funktion von y bezeichnet.

Ex. I. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ gibt

$$dz - a dx = o,$$

und davon ist das Integral

$$U = o = z - ax.$$

Also ist auch das Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung

$$z = ax + fy.$$

Wenn eine gerade Linie in der coordinirten Ebene der xz mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist, so wird ihre Gleichung $z = ax + C$ seyn. Wenn sich dann irgend eine willkürliche und willkürlich gelegte Curve von einfacher oder

doppelter Krümmung mit sich selbst parallel und so bewegt, daß ein bestimmter Punkt derselben immer durch jene Gerade geht, so wird diese Curve eine Fläche beschreiben, deren Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ oder auch $z = ax + fy$ ist.

Ex. II. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ gibt

$$dz - \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad z = \sqrt{x^2+y^2},$$

also ist auch das gesuchte Integral

$$z = \sqrt{x^2+y^2} + fy.$$

Ex. III. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ gibt eben so

$$z = y \text{ arc. sin. } \frac{x}{y} + fy,$$

und auf dieselbe Weise erhält man

von $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{z}$ das Integral $x - \frac{z^2}{2y} = fy$, oder, was dasselbe ist: $z^2 = 2xy + fy$;

» $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\sqrt{y^2-z^2}}{z}$ » $x = -\sqrt{y^2-z^2} + fy$,

» $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{az}{x}$ » $z = x^a . fy$, u. s. w.

§. 231. (Gleichungen, die beyde Coefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, aber ohne xyz, enthalten). I. Sey $a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = c$ und a, b, c beständige Größen.

Setzt man der Kürze wegen

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

so hat man allgemein für jede vollständige Differentialgleichung zwischen drey veränderlichen Größen:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

In dem gegebenen speciellen Falle ist aber

$$c = ap + bq \quad \text{oder} \quad q = \frac{c - ap}{b},$$

also auch, wenn man diesen Werth von q substituirt:

$$dz = \frac{c}{b}dy + \frac{p}{b}(b\,dx - a\,dy).$$

Da aber der letzte Ausdruck integrabel seyn soll, und da $\frac{c}{b}dy$ schon für sich integrabel ist, so muß es auch $\frac{p}{b}(b\,dx - a\,dy)$ seyn, d. h. die Größe p muß irgend eine Funktion von $(bx - ay)$ seyn. Setzen wir also $\int p(b\,dx - a\,dy) = f(bx - ay)$, so hat man

$$z = \frac{c}{b}y + \frac{1}{b}f(bx - ay),$$

und dieß ist das Integral der gegebenen Gleichung.

Ist für einen speciellen Fall $b = -a$ und $c = 0$, also die gegebene Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, so hat man für ihr Integral

$$z = f(x + y).$$

II. Sey $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 1$ gegeben, oder $p^2 + q^2 = 1$, also auch

$$q = \sqrt{1 - p^2} \quad \text{und} \quad dq = -\frac{p\,dp}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Es ist allgemein $z = \int(p\,dx + q\,dy)$, und überdieß

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp \quad \text{und} \quad \int q\,dy = qy - \int y\,dq,$$

also ist auch

$$z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq).$$

Substituirt man in diesen allgemeinen Ausdruck die vorhergehenden Werthe von q und dq, so erhält man

$$z = px + q\sqrt{1 - p^2} - \int dp\left(x - \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}}\right),$$

und das gesuchte Integral ist das Resultat der Elimination von p aus den beyden Gleichungen

$$z = px + y\sqrt{1 - p^2} - fp \quad \text{und} \quad x - \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}} = f'p.$$

Für den einfachsten speciellen Fall ist $f'p = 0$, also auch

$$x = \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - p^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

und daher das gesuchte Integral

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

welches aber nur eine particuläre Auflösung ist.

§. 232. (Gleichungen, die beyde Coefficienten und zwey der Grössen x y z enthalten.) Sey $AX\left(\frac{dz}{dx}\right) + BY\left(\frac{dz}{dy}\right) = C$ gegeben, wo X eine Funktion von x, und Y von y, und A, B, C beständige Grössen bezeichnen.

Da hier $q = \frac{C - AXp}{BY}$ ist, so geht die allgemeine Gleichung $dz = pdx + qdy$ in folgende über:

$$dz = \frac{C}{B} \cdot \frac{dy}{Y} + AXp \cdot \left(\frac{dx}{AX} - \frac{dy}{BY}\right),$$

und daraus folgt, wie zuvor, daß AXp eine Funktion von

$$\frac{1}{A}\int\frac{dx}{X} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y}$$

seyn muß, und daß man daher für das gesuchte Integral hat

$$z = \frac{C}{B}\int\frac{dy}{Y} + f\left(\frac{1}{A}\int\frac{dx}{X} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y}\right).$$

Ex. Für $Ax\left(\frac{dz}{dx}\right) + By\left(\frac{dz}{dy}\right) = C$ ist $X = x$ und $Y = y$, also auch das Integral

$$z = \frac{C}{B}\log. y + f . \frac{x^A}{y^B}.$$

Ist überdieß $A = B = 1$ und $C = 0$, so hat man

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

wovon das Integral $z = f\frac{x}{y}$ ist.

§. 233. (Gleichung der Form $AX\left(\frac{dz}{dx}\right) + BY\left(\frac{dz}{dy}\right) = CZ$.) Sey die Gleichung gegeben

$$AX\left(\frac{dz}{dx}\right) + BY\left(\frac{dz}{dy}\right) = CZ,$$

wo X, Y, Z nach der Ordnung Funktionen von x, y, z sind. Diese Gleichung gibt

$$q = \frac{CZ - AXp}{BY},$$

und wenn man dieß in $dz = pdx + qdy$ substituirt:

$$dz - \frac{CZ}{BY}dy = p\left(dx - \frac{AX}{BY}dy\right) \quad \text{oder}$$

$$\frac{dz}{CZ} - \frac{dy}{BY} = \frac{AXp}{CZ}\left(\frac{dx}{AX} - \frac{dy}{BY}\right),$$

woraus sofort, wie zuvor, für das gesuchte Integral folgt

$$\frac{1}{C}\int\frac{dz}{Z} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y} = f\left(\frac{1}{A}\int\frac{dx}{X} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y}\right).$$

I. Für den besondern Fall $X=x$, $Y=y$, $Z=z$ hat man

$$Ax\left(\frac{dz}{dx}\right) + By\left(\frac{dz}{dy}\right) = Cz,$$

wovon das Integral $\frac{z^C}{y^B} = f\frac{x^A}{y^B}$ ist. Eben so ist von

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = z \quad \text{das Integral} \quad \frac{z}{y} = f\frac{x}{y}.$$

Für den speciellen Fall $X=x^2$, $Y=y^2$, $Z=z^2$ und $A=B=C=1$ hat man

$$\int\frac{dx}{X} = -\frac{1}{x}, \quad \int\frac{dy}{Y} = -\frac{1}{y}, \quad \int\frac{dz}{Z} = -\frac{1}{z},$$

so daß daher von der Gleichung $x^2\left(\frac{dz}{dx}\right) + y^2\left(\frac{dz}{dy}\right) = z^2$ das Integral ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

Eben so ist von $\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{z}$ das Integral

$$z^2 = y^2 + f(x^2 - y^2).$$

§. 235. (Gleichung der Form $z = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right)$).

Ist die Gleichung $z = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gegeben, wo P sowohl als Q Funktionen der beyden Größen x und y seyn sollen, so wollen wir, um das vollständige Integral dieser Gleichung zu finden, annehmen, daß man bereits eine particuläre Auflösung derselben kenne, die auch in den meisten Fällen leicht zu erhalten ist. Sey $z = U$ diese particuläre Auflösung, wo U eine Funktion von x und y, also auch $U = P\left(\frac{dU}{dx}\right) + Q\left(\frac{dU}{dy}\right)$ ist.

Man setze nun allgemein $z = U . fT$, und es sey

$$dT = Rdx + Sdy.$$

Um die so eingeführte Größe T zu finden, hat man, wenn

$f'T = \frac{d.fT}{dT}$ ist:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dU}{dx}\right)fT + UR.f'T \text{ und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dU}{dy}\right)fT + US.f'T.$$

Substituirt man diese Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in der gegebenen Gleichung, so hat man, da $z = U.fT$ ist:

$$UfT = \left[P\left(\frac{dU}{dx}\right) + Q\left(\frac{dU}{dy}\right)\right].fT + U[PR + QS].f'T.$$

Da aber $U = P\left(\frac{dU}{dx}\right) + Q\left(\frac{dU}{dy}\right)$ ist, so sind die beyden ersten Theile der letzten Gleichung einander gleich, und man hat daher

$$PR + QS = o \quad \text{oder} \quad S = -\frac{PR}{Q};$$

und endlich, wenn man diesen Werth von S in der vorhergehenden Gleichung $dT = Rdx + Sdy$ substituirt:

$$dT = R\left(dx - \frac{P}{Q}dy\right).$$

Die Auflösung unserer Aufgabe reducirt sich daher auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung $Qdx - Pdy = o$ zwischen den beyden Größen x und y, die man nach dem Vorhergehenden finden wird. Nennt man dann T das so gefundene Integral, so ist sofort

$$y = U.fT.$$

Ex. I. $z = y\left(\frac{dz}{dx}\right) + x\left(\frac{dz}{dy}\right).$

Von dieser Gleichung ist $z = x + y$ eine particuläre Auflösung. Weiter ist $P = y$ und $Q = x$, also geht die Gleichung $Qdx - Pdy = o$ in folgende über $xdx - ydy = o$, von welcher das Integral ist $T = x^2 - y^2$. Das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung ist daher

$$z = (x + y).f(x^2 - y^2).$$

Ex. II. $z = (x + y)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - x)\left(\frac{dz}{dy}\right).$

Von dieser Gleichung ist $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ eine particuläre Auflösung, und man hat $P = x + y$, $Q = y - x$, und die Gleichung $Qdx - Pdy$ geht in folgende über:

$$dT = (ydx - xdy) - (xdx + ydy) = o.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, multiplicire man ihn mit dem Factor $\frac{1}{x^2+y^2}$, so erhält man

$$T = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} - \tfrac{1}{2}\log.(x^2+y^2),$$

also ist auch das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \,.\, f\left[\text{arc. tang.} \frac{x}{y} - \tfrac{1}{2}\log.(x^2+y^2)\right].$$

§. 235. (Gleichung der Form $P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$).

Ist diese Gleichung $Pp + Qq = 0$ gegeben, wo p, q die vorhergehende Bedeutung haben, und P, Q Funktionen von x und y zugleich sind, so hat man $p = -\frac{Qq}{P}$, und wenn man diesen Werth von p in der allgemeinen Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ substituirt, so erhält man

$$dz = \frac{q}{P}(P\,dy - Q\,dx).$$

Da aber z eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y seyn soll, so muß $\frac{q}{P}(P\,dy - Q\,dx)$, also auch $(P\,dy - Q\,dx)$ ein vollständiges Differential seyn, oder doch durch irgend einen Factor μ dazu gemacht werden können. Heißt dann U das Integral von $P\,dy - Q\,dx = 0$, so ist

$$z = fU$$

das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung.

Ex. I. Sey $x\left(\frac{dz}{dy}\right) - y\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, so ist $P = -y$, $Q = x$, und die erwähnte Differentialgleichung $dU = 0$ ist $x\,dx + y\,dy = 0$, also ist auch $U = x^2 + y^2$ und

$$z = \varphi(x^2+y^2)$$

die bekannte Gleichung der durch Rotation entstandenen Flächen.

Ex. II. Sey $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, so ist $P = x$, $Q = y$ und $dU = x\,dy - y\,dx = 0$. Diese Gleichung wird durch den Factor $\frac{1}{x^2}$ integrabel, so daß man hat $U = \frac{y}{x}$, also auch

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

I. Ist $P = X$ eine bloße Funktion von x, und $Q = Y$ eine bloße Funktion von y, also die gegebene Gleichung $X\left(\frac{dz}{dx}\right) + Y\left(\frac{dz}{dy}\right) = o$, so geht die Gleichung $dU = Pdy - Qdx$ in folgende über:

$$Xdy - Ydx = o,$$

also ist $U = \int\frac{dy}{Y} - \int\frac{dx}{X}$. Ganz eben so erhält man auch für die Gleichung $Y\left(\frac{dz}{dx}\right) + X\left(\frac{dz}{dy}\right) = o$ den Ausdruck

$$U = \int Ydy - \int Xdx.$$

§. 236. (Gleichung der Form $P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) = R$).

Diese Gleichung, in welcher jede der Größen P, Q, R als Funktion von allen drey Variablen x, y, z vorausgesetzt wird, ist die allgemeinste, die man für partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen drey Größen x, y, z geben kann.

Sucht man daraus den Werth von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und substituirt ihn in der Gleichung $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$, so erhält man

$$Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx).$$

Sind nun die Größen P, Q, R so beschaffen, daß der Ausdruck $Pdz - Rdx$ nur die Größen x und z, und daß $Pdy - Qdx$ nur die Größen x und y enthält, so muß es einen Factor μ geben, der $Pdz - Rdx$, und einen Factor μ', der $Pdy - Qdx$ zu einem vollständigen Differential macht. Nennt man U und U' diese vollständigen Differentiale, so hat man

$$Pdz - Rdx = \frac{1}{\mu} . dU \quad \text{und} \quad Pdy - Qdx = \frac{1}{\mu'} . dU',$$

und die vorhergehende Gleichung geht dann in folgende über:

$$dU' = \frac{\mu'}{\mu q} . dU.$$

Da aber dieser letzte Ausdruck nur dann integrabel seyn kann, wenn $\frac{\mu'}{\mu q}$ irgend eine Funktion von U ist, so sey $\frac{\mu'}{\mu q} = \varphi' U$, also auch $dU' = \varphi' U . dU$, und das Integral dieser Gleichung oder

$$U' = \varphi U$$

ist zugleich das gesuchte Integral der gegebenen partiellen Differential-

gleichung. Weniger einfach wird die Auflösung, wenn die beyden Gleichungen $dU = o$, $dU' = o$ die erwähnte Eigenschaft nicht haben. (M. s. Lacroix, Vol. II., S. 531.)

Ex. Sey $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = az$, so ist $P = x$, $Q = y$, $R = az$, also sind auch jene zwey Differentialgleichungen

$$dU = xdz - azdx = o \quad \text{und} \quad dU' = xdy - ydx = o.$$

Nimmt man für die erste derselben den Factor $\mu = \frac{1}{x^{a+1}}$, und für die zweyte $\mu' = \frac{1}{x^2}$, so hat man

$$\frac{xdz - azdx}{x^{a+1}} = o \quad \text{und} \quad \frac{xdy - ydx}{x^2} = o,$$

und davon sind die Integrale

$$U = \frac{z}{x^a} \quad \text{und} \quad U' = \frac{y}{x},$$

also ist auch das gesuchte Integral

$$\frac{y}{x} = \varphi \frac{z}{x^a}, \text{ oder was dasselbe ist, } z = x^a \,.\, f\frac{y}{x}.$$

Für $a = 1$ hat man

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = z \quad \text{und} \quad z = af\frac{y}{x},$$

die bekannte Gleichung der conischen Flächen.

I. Eliminirt man aus den beyden Gleichungen $dU = o$ und $dU' = o$ die Größe dx, so erhält man $Qdz - Rdy = o$. Demnach reducirt sich die Auflösung unserer Aufgabe darauf, das Integral von zwey der drey folgenden Gleichungen zu finden:

$$Pdz - Rdx = o, \quad Pdy - Qdx = o, \quad Qdz - Rdy = o.$$

Ex. I. Sey die Gleichung $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dz}{dy}\right) + y = o$ gegeben. Hier ist $P = x$, $Q = z$, $R = -y$, also sind auch jene drey Differentialgleichungen:

$$xdy - zdx = o, \quad xdz + ydx = o, \quad zdz + ydy = o.$$

Das Integral der letzten ist $y^2 + z^2 = a^2$. Substituirt man daraus den Werth von y in der zweyten Gleichung, so erhält man

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = o \quad \text{oder} \quad \log.x + \text{arc. sin.}\frac{z}{a} = \log.b.$$

Man hat daher

$$U = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{und} \quad U' = x \cdot e^{\text{arc. sin.} \frac{z}{a}},$$

und daher für das gesuchte Integral

$$x \cdot e^{\text{arc. sin.} \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}} = \varphi(y^2 + z^2).$$

II. Ist endlich die gegebene Gleichung $P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) = R$ in Beziehung auf die Größen x, y, z homogen oder von gleichen Dimensionen, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, wodurch die Größen P, Q, R die Form annehmen $P'z^n$, $Q'z^n$, $R'z^n$, und wo daher die vorhin angeführten Differentialgleichungen in folgende übergehen:

$$(P' - R't)\frac{dz}{z} - R'dt = 0 \quad \text{und} \quad (Q' - R'u)\frac{dz}{z} - R'du = 0,$$

die nach der Elimination von $\frac{dz}{z}$ geben

$$(Q' - R'u)dt - (P' - R't)du = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da diese Gleichung nur die Größen u und t enthält, so wird man ihr Integral suchen und dadurch den Werth von t in u bestimmen, um ihn in der einen oder der andern der beyden Gleichungen

$$\frac{dz}{z} = \frac{R'dt}{P' - R't}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{R'du}{Q' - R'u} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zu substituiren.

Ex. Für die Gleichung $xz\left(\frac{dz}{dx}\right) + yz\left(\frac{dz}{dy}\right) = xy$ hat man

$$P = xz = tz^2, \quad Q = yz = uz^2, \quad R = xy = tuz^2,$$

also auch $P' = t$, $Q' = u$, $R' = tu$. Damit gibt die Gleichung (1)

$$(1 - ut)(udt - tdu) = 0.$$

Das Integral von $udt - tdu = 0$ ist $\frac{t}{u} = a$ oder $t = au$. Substituirt man diesen Werth von t in der zweyten der Gleichungen (2), so hat man

$$\frac{dz}{z} = \frac{a\,u\,du}{1 - au^2},$$

wovon das Integral ist

$$\log. z = -\tfrac{1}{2}\log.(1 - au^2) + \log. b \quad \text{oder} \quad z \cdot \sqrt{1 - au^2} = b,$$

woraus folgt

$$z\sqrt{1-ut} = \varphi\frac{u}{t} \quad \text{oder} \quad \sqrt{z^2 - xy} = \varphi\frac{y}{x},$$

wofür man auch schreiben kann $z^2 - xy = \varphi\frac{y}{x}$.

§. 237. (Gleichungen der Form $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P$).
Um nun noch einige der vorzüglichsten partiellen Differentialgleichungen des zweyten Grades zu betrachten, sey zuerst $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P$, wo P bloß eine Funktion von x und y ist. Da diese Gleichung auch so ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d^2z}{dx} = Pdx,$$

so ist ihr erstes Integral $\frac{dz}{dx} = \int Pdx + C$, oder da C eigentlich eine Funktion von y ist:

$$\frac{dz}{dx} = \int Pdx + \varphi y \quad \text{oder} \quad dz = dx\int Pdx + dx . \varphi y,$$

und wenn man diesen Ausdruck wieder in Beziehung auf z und x integrirt:

$$z = \int dx(Pdx + x\varphi y + \psi y,$$

wo φy und ψy willkürliche Funktionen von y bezeichnen.

Ganz eben so gibt die Gleichung $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P$, wenn P wieder eine Funktion von x und y ist:

$$z = \int dy\int Pdy + y\varphi x + \psi x.$$

Ex. Die Gleichung $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{xy}{a}$ gibt

$$\int Pdx = \frac{x^2y}{2a} \quad \text{und} \quad \int dx\int Pdx = \frac{x^3y}{6a},$$

also ist auch $z = \frac{x^3y}{6a} + x\varphi y + \psi y$.

§. 238. (Gleichungen der Form $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$).
Ist in dieser Gleichung P sowohl als auch Q eine Funktion von x und y, so sey $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, also auch $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, wodurch unsere Gleichung auf die einfachere des ersten Grades

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = Pu + Q$$

zurückgeführt wird. Diese Gleichung gibt $du = Pudx + Qdx$, die mit dem Factor $e^{-\int Pdx}$ multiplicirt, zum Integral gibt

$$u \cdot e^{-\omega} = \int e^{-\omega} \cdot Qdx + \varphi y \text{ oder}$$

$$u = \frac{dz}{dx} = e^{\omega} \int e^{-\omega} \cdot Qdx + e^{\omega} \cdot \varphi y,$$

wo der Kürze wegen $\omega = \int Pdx$ gesetzt worden ist. Multiplicirt man die letzte Gleichung durch dx, und integrirt in Beziehung auf z und x, so hat man

$$z = \int e^{\omega} dx \int e^{-\omega} Qdx + \varphi y \int e^{\omega} dx + \psi y.$$

I. Eben so gibt $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Q$ das Integral

$$z = \int e^{\omega'} dy \int e^{-\omega'} Qdy + \varphi x \cdot \int e^{\omega'} dy + \psi y,$$

wo $\omega' = \int Pdy$ ist.

Ex. $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{a}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$ gibt

$$Q = 0, \quad P = \frac{a}{x}, \quad \omega = a \log. x, \quad e^{\omega} = x^a,$$

und daher

$$z = \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \varphi y + \psi y.$$

Ganz auf dieselbe Weise gibt $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{a}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{xy}$ das Integral

$$z = -\frac{bx}{ay} + \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \varphi y + \psi y.$$

§. 239. (Gleichungen der Form $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) = Q$, wo P sowohl als Q Funktionen von x und y sind.) Setzt man auch hier $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, so erhält man $\left(\frac{du}{dy}\right) + Pu = Q$. Um diese Gleichung zu integriren, wird man die Größe

$$u = Xt \quad \text{oder} \quad du = tdX + Xdt$$

setzen, wodurch man erhält

$$tdX + Xdt + PXtdy = Qdy.$$

Da man hier die willkürliche Größe X so annehmen kann, daß $Xdt + PXtdy = 0$ ist, so wird dann auch $tdX = Qdy$ seyn müssen. Die erste dieser zwey Gleichungen gibt

$$dt + Pt\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{t} = -P\,dy,$$

wovon das Integral $t = e^{-\int P\,dy}$ ist. Substituirt man dann diesen Werth von t in der zweyten Gleichung $t\,dX = Q\,dy$, so hat man

$$dX = e^{\int P\,dy} . Q\,dy \quad \text{oder} \quad X = \int e^{\int P\,dy} . Q\,dy + C;$$

und da endlich $u = tX$ war, so ist

$$u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{-\int P\,dy} . [\int e^{\int P\,dy} . Q\,dy + C] + C'.$$

Setzt man also wieder $\omega' = \int P\,dy$, und läßt die zwey Constanten C und C' Funktionen von x und von y seyn, so hat man für das Integral der gegebenen Gleichung

$$z = \int dx . e^{-\omega'} [e^{\omega} . Q\,dy + \varphi x] + \psi y.$$

I. Eben so hat die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dy}\right) = Q$ zum Integral den Ausdruck

$$z = \int dy\, e^{-\omega} [\int e^{\omega} . Q\,dx + \varphi y] + \psi x,$$

wo $\omega = \int P\,dx$ ist.

II. Ist $P = 0$, so hat die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = Q$ zum Integral

$$z = \int dx \int Q\,dy + \int dx . \varphi x + \psi y \quad \text{oder}$$
$$z = \int dy \int Q\,dx + \int dy . \varphi y + \psi x,$$

und beyde Ausdrücke können als identisch betrachtet werden. Denn da die Funktion φ ganz willkürlich ist, so kann man $\int dx . \varphi x = \varphi x$ und $\int dy . \varphi y = \varphi y$ setzen.

III. Ist $P = Q = 0$, so ist die gegebene Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

und ihr Integral

$$z = \varphi x + \psi y.$$

Setzt man

$$x = y' + \frac{x'}{a} \quad \text{und} \quad y = y' - \frac{x'}{a},$$

was also bloß eine Änderung der Coordinaten x, y einer Curve voraussetzt, so ist

$$dx = dy' + \frac{dx'}{a} \quad \text{und} \quad dy = dy' - \frac{dx'}{a}, \quad \text{also auch}$$

$$dx\,dy = dy'^2 - \frac{dx'^2}{a^2},$$

so daß also dann die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0$$

in folgende übergeht:

$$\left(\frac{d^2 z}{dy'^2 - \frac{dx'^2}{a}}\right) = 0,$$

die auch so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{d^2 z}{dy'^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx'^2}\right),$$

so daß daher, wenn von den beyden Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

das Integral der einen bekannt ist, dadurch auch das der andern gegeben wird. Es ist nämlich von $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)$ das Integral

$$z = \varphi x + \psi y,$$

und von $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ ist das Integral

$$z = \varphi\left(y + \frac{x}{a}\right) + \psi\left(y - \frac{x}{a}\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay).$$

XXXIX.

Principien der Rechnung mit begränzten Integralen.

§. 240. **(Verschiedene Ausdrücke desselben begränzten Integrals.)** Wir haben bereits oben §. 159 u. m. der begränzten Integrale (intégrales définies) erwähnt, die entstehen, wenn man ein allgemeines Integral $\int fx \,.\, dx$ zwischen zwey Gränzen der Stammgröße, z. B. zwischen $x = a$ bis $x = b$ nimmt. Nennt man Fx das allgemeine oder unbestimmte Integral $\int fx \,.\, dx$, so daß man hat $Fx = \int fx \,.\, dx$, so wird man das begränzte Integral im Allge-

meinen so ausdrücken können:

$$\int_a^b fx \, . \, dx = Fb - Fa.$$

In diesem Ausdrucke wird der Theil Fb — Fa, nebst den beyden Größen a und b, auch noch andere, z. B. selbst die veränderliche ξ, enthalten, wenn nämlich diese schon in der gegebenen Funktion fx begriffen ist. Da aber eine solche Größe ξ bey der Integration von $\int fx \, . \, dx$ als eine Constante betrachtet wird, so wird dann die Größe Fb — Fa auch als eine Funktion von ξ angesehen oder gleich $\psi\xi$ betrachtet werden können, so daß man die Gleichung hat

$$\int_a^b f(x, \xi) \, dx = \psi\xi.$$

So hat man z. B. das allgemeine Integral

$$\int \frac{(\xi - 1) \, dx}{1 + (\xi - 1) x} = \log. [1 + (\xi - 1) x],$$

also ist auch

$$\int_0^1 \frac{(\xi - 1) \, dx}{1 + (\xi - 1) x} = \log. \xi,$$

so daß also der Logarithmus irgend einer Größe ξ durch das begränzte Integral eines Ausdrucks gegeben wird, dessen veränderliche Größe x ist. Dasselbe läßt sich auch auf andere algebraische oder transcendente Funktionen anwenden. Auf dieselbe Weise wird man auch, wenn fx die beyden Größen ξ und v enthält, das begränzte Integral $\int_a^b f(x, \xi, v)$ als eine Funktion von ξ und v betrachten, und so die Gleichung aufstellen können:

$$\int_a^b f(x, \xi, v) \, dx = \psi(\xi, v),$$

und dasselbe Verfahren wird sich auch auf zwey- und mehrfache Integrationen anwenden lassen, so daß man hat

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f(x, y, \xi) \, dy = \psi\xi,$$

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} dy \int_{a''}^{b''} f(x, y, z, \xi) \, dz = \psi\xi, \text{ u. s. f.}$$

Man bemerkt von selbst, daß solche Ausdrücke einer Funktion von ξ oder von ξ, v, . . . durch begränzte Integralien, deren veränderliche Stammgrößen x oder x, y, . . . sind, eben so allgemein als in ihrer Anwendung fruchtbar seyn werden.

Aus dem Vorhergehenden entspringen gleichsam von selbst folgende Ausdrücke, die man als eben so viele Theoreme der Rechnung mit begränzten Integralen ansehen kann.

I. Jedes Integral dieser Art läßt sich in zwey andere auflösen, da man offenbar hat

$$\int_a^b fx\,dx = \int_a^m fx\,dx + \int_m^b fx\,dx.$$

II. Die beyden Gränzen des Integrals lassen sich umkehren, denn es ist

$$\int_a^b fx\,dx = -\int_b^a fx\,dx.$$

III. Ist fx gleich einem Aggregate mehrerer anderer Funktionen von x, oder ist $fx = px + qx + rx + \ldots$, so ist auch

$$\int_a^b fx.dx = \int_a^b px.dx + \int_a^b qx.dx + \int_a^b rx.dx + \ldots$$

IV. Sey ψx irgend eine andere, von fx unabhängige Funktion, und der Kürze wegen $\frac{d.\psi x}{dx} = \psi' x$.

Setzt man dann $x = \psi y$, so ist $dx = \psi' y.dy$, und daher geht das unbestimmte Integral $\int fx.dx$ über in $\int f(\psi y)\psi' y.dy$.

Sucht man nun aus der Gleichung $x = \psi y$ durch Umkehrung den Werth von y in x, den wir durch die Gleichung $y = \phi x$ ausdrücken wollen, so wird man für $x = a$ haben $y = \phi a$, und für $x = b$ eben so $y = \phi b$, so daß daher das begränzte Integral $\int_a^b fx.dx$ gleich wird dem Integral $\int_{\phi a}^{\phi b} f(\psi y)\psi' y.dy$.

Oder endlich, wenn man das Zeichen y, das hier nur als Mittel gebraucht wurde, mit x verwechselt, so hat man

$$\int_a^b fx.dx = \int_{\phi a}^{\phi b} f(\psi x)\psi' x.dx;$$

ein wichtiger Satz, von welchem alle nächstfolgenden nur als besondere Fälle zu betrachten sind.

V. Es ist für jeden Werth von h

$$\int_a^b fx.dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\,dx.$$

Denn ist $x = y + h$, so ist $y = \phi x = x - h$. Demnach gibt $x = a$ die Gleichung $\phi a = a - h$, so wie man für $x = b$ hat $\phi b = b - h$. Endlich ist noch $\psi x = y + h$, also auch $\psi' x = 1$. Substituirt man

diese Werthe in IV., so erhält man die hier in V. aufgestellte Gleichung, wodurch in die beyden Gränzen a, b eine willkürliche Größe h eingeführt wird.

Setzt man, um diesen besondern Fall noch mehr zu beschränken, $h = a$, so hat man

$$\int_a^b fx . dx = \int_0^{b-a} f(a+x) . dx,$$

wodurch eine der beyden Gränzen a, b auf Null gebracht wird.

Ex. Ist $fx = e^x$, also auch $f(x+h) = e^{x+h}$, so hat man die unbestimmten Integrale

$$\int fx . dx = e^x \quad \text{und} \quad \int f(x+h)\, dx = e^{x+h},$$

und daher ist das begränzte Integral $\int_a^b fx . dx$ sowohl als auch $\int_{a-h}^{b-h} f(x+h) . dx$ gleich $e^b - e^a$.

Ist eben so $fx = (1+x)^2$, also auch $f(x+h) = (1+x+h)^2$, so findet man für beyde begränzte Integrale den Ausdruck

$$\tfrac{1}{3}(1+b)^3 - \tfrac{1}{3}(1+a)^3.$$

VI. Eben so hat man

$$\int_a^b fx . dx = \int_a^b f(a+b-x) . dx.$$

Denn setzt man in IV. die Größe $x = a+b-y$, so ist

$$y = \psi x = a + b - x.$$

Der Werth $x = a$ gibt daher $\psi x = b$, und $x = b$ gibt $\psi x = a$, also ist auch, da $\psi' x = -1$ ist:

$$\int_a^b fx . dx = -\int_b^a f(a+b-x) . dx,$$

oder nach Nro. II.:

$$\int_a^b fx . dx = \int_a^b f(a+b-x) . dx,$$

wodurch die veränderliche Größe mit einer andern verwechselt wird, während die beyden Gränzen dieselben bleiben.

VII. Setzt man eben so $x = y + \frac{1}{2}(a+b)$, so erhält man

$$\int_a^b fx . dx = \int_{-\frac{1}{2}(b-a)}^{\frac{1}{2}(b-a)} f[x + \tfrac{1}{2}(a+b)] . dx,$$

wodurch die beyden Gränzen gleich groß gesetzt werden.

VIII. Ist ferner

$$x = \frac{b(y-\alpha) - a(y-\beta)}{\beta - \alpha},$$

so hat man auch

$$y = \phi x = \frac{x(\beta - \alpha) + \alpha b - a\beta}{b - a}.$$

Demnach ist $y = \phi a = \alpha$ für $x = a$, und $y = \phi b = \beta$ für $x = b$. Überdieß hat man

$$dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha} dy \quad \text{oder} \quad \phi' y = \frac{b-a}{\beta-\alpha},$$

also ist auch nach Nro. IV.:

$$\int_a^b fx.dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{b(x-\alpha) - a(x-\beta)}{\beta-\alpha}\right) dx,$$

wodurch die beyden Gränzen a, b in zwey andere α, β verändert werden.

Will man z. B. die Gränzen a, b in die zwey einfachen o und 1 oder umgekehrt verwandeln, so hat man

$$\int_a^b fx.dx = (b-a)\int_o^1 f[a + (b-a)x].dx,$$

$$\int_o^1 fx.dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}.d\nu,$$

und aus diesen Ausdrücken erhält man noch die beyden einfachen

$$\int_o^b fx.dx = b\int_o^1 fbx.dx \quad \text{und} \quad \int_o^1 fx.dx = \frac{1}{\pi}\int_o^\pi f\frac{x}{\pi}.dx.$$

Man sieht daraus, welchen Nutzen eine tabellarische Sammlung von Integralen zwischen den Gränzen o und 1 gewährt, um daraus eine große Anzahl anderer Integrale zwischen andern Gränzen abzuleiten. Auch bemerkt man von selbst, daß man in einem der beyden Theile der vorhergehenden Gleichungen die veränderliche Größe x mit irgend einer andern u verwechseln kann, so daß man z. B. statt der vorletzten Gleichung hat

$$\int_o^b fx.dx = b\int_o^1 fbu.du,$$

und daß man selbst in diesem Ausdrucke noch die Größe b in x verwandeln kann, wodurch man erhält

$$\int_o^b fx.dx = x\int_o^1 fxu.du.$$

Will man endlich die beyden oft vorkommenden Gränzen o und 1 in die neuen Gränzen o und ∞ verwandeln, so kann man annehmen

$$x = 1 - \frac{1}{1+y} \quad \text{oder auch} \quad x = e^{-ny},$$

wo in dem ersten Falle

$y = \phi x = \frac{1}{1-x} - 1$, und im zweyten $y = -\frac{1}{n}\log. x$ wird.

§. 241. (**Auflösung der Funktion f(x) dieser Integrale in zwey andere f(x) und f(—x)).** Nach §. 240, I. hat man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = \int_{-a}^{0} fx.dx + \int_{0}^{a} fx.dx.$$

Setzt man aber $x = -y$, so ist

$$\int_{-a}^{0} fx.dx = -\int_{a}^{a} f(-y).dy = \int_{0}^{a} f(-y).dy$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x).dx.$$

Substituirt man diesen Werth von $\int_{-a}^{0} fx.dx$ in der ersten Gleichung, so erhält man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)].dx.$$

I. Ist $f(-x) = f(x)$, wie z. B. wenn fx gleich einer geraden Potenz von x oder gleich $\cos. x$ ist u. s., so hat man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = 2\int_{0}^{a} fx.dx.$$

Ist aber $f(-x) = -fx$, wie z. B. wenn fx gleich einer ungeraden Potenz von x oder gleich $\sin. x$ ist u. s., so hat man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = 0.$$

§. 242. (**Ergänzung der Taylor'schen Reihe.**) Wir haben diese Ergänzung bereits oben (§. 82) gegeben und gefunden, daß man hat

$$f(x+\omega) = fx + \omega f'x + \frac{\omega^2}{1.2} f''x + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\theta\omega),$$

und eben so für die Reihe Maclaurin's:

$$fx = f0 + xf'0 + \frac{x^2}{1.2} f''0 + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(\theta x),$$

wo θ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bezeichnet. Da aber der

wahre Werth dieser Größe θ noch nicht bestimmt ist, so wird es vortheilhaft seyn, diese Ergänzungen beyder Reihen

$$R = \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x + \theta\omega) \quad \text{und} \quad r = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(\theta x)$$

auf einem andern Wege, unabhängig von der Kenntniß der Größe θ, zu suchen.

Man sieht leicht, daß man hat

$$f(x+\omega) = fx + \int_0^\omega f'(x+\omega-z).dz,$$

wenn das unbestimmte Integral

$$\int f'(x+\omega-z) = -f(x+\omega-z)$$

gesetzt wird.

Setzt man aber in der Gleichung (§. 138, III.)

$$\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$$

die Größe $\nu = z$ und $u = f'(x+\omega-z)$, so erhält man durch die sogenannte theilweise Integration, wenn der Kürze wegen $x+\omega-z=t$ gesetzt wird:

$$\int f't.dz = zf't + \int zf''t.dz,$$

und eben so

$$\int zf''t.dz = \tfrac{1}{2}z^2 f''t + \tfrac{1}{2}\int z^2 f'''t.dz,$$

$$\int z^2 f'''t.dz = \tfrac{1}{3}z^3 f'''t + \tfrac{1}{3}\int z^3 f^{IV}t.dz,$$

u. s. w.

Geht man dann von diesen unbestimmten Integralen, nach §. 240, III., zu den begränzten über, so hat man

$$\int_0^\omega f't.dz = \omega f'x + \int_0^\omega zf''t.dz,$$

$$\int_0^\omega zf''t.dz = \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \tfrac{1}{2}\int_0^\omega z^2 f'''t.dz,$$

$$\int_0^\omega z^2 f'''t.dz = \tfrac{1}{3}\omega^3 f'''x + \tfrac{1}{3}\int_0^\omega z^3 f^{IV}t.dz,$$

u. s. w.

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, und nimmt dabey auf die zuerst gegebene Gleichung

$$f(x+\omega) = fx + \int_0^\omega f't.dz$$

Rücksicht, so erhält man

$$f(x+\omega) = fx + \omega f'x + \int_0^\omega z f''t \,.\, dz$$
$$= fx + \omega f'x + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \tfrac{1}{2}\int_0^\omega z^2 f'''t \,.\, dz$$
$$= fx + \omega f'x + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \frac{\omega^3}{2.3} f'''x$$
$$+ \frac{1}{2.3}\int_0^\omega z^3 f^{IV} t \,.\, dz,$$

u. s. w.

Setzt man dieses bis zum n^{ten} Gliede fort, so ist

$$f(x+\omega) = fx + \omega f'x + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}x + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^\omega z^{n-1} f^n t \,.\, dz,$$

und eben so erhält man für Maclaurin's Reihe

$$fx = fo + xf'o + \tfrac{1}{2}x^2 f''o + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}o + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^x z^{n-1} f^n t \,.\, dz,$$

so daß man daher für jene beyden Ergänzungen hat

$$R = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^\omega z^{n-1} f^n t \,.\, dz \quad \text{und}$$
$$r = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^x z^{n-1} f^n t \,.\, dz.$$

I. Die gefundenen Ausdrücke von R und r lassen sich, nach §. 240, mannigfaltig abändern.

Setzt man z. B. $\omega - z = u$, so gehen die vorigen Gränzen $z = o$ und $z = \omega$ in folgende über, $u = \omega$ und $u = o$, so daß man daher hat

$$R = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^\omega (\omega - u)^{n-1} f^n(x+u) \,.\, du,$$

und eben so findet man für $x - z = u$

$$r = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^x (x-u)^{n-1} f^n u \,.\, du.$$

Setzt man aber in der ersten Ergänzung $z = u\omega$ und in der zweyten $z = ux$, so hat man

$$R = \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^1 u^{n-1} f^n(x+\omega-u\omega) \,.\, du \quad \text{und}$$
$$r = \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^1 u^{n-1} f^n[x(1-u)] \,.\, du.$$

§. 243. **(Ableitung der begränzten Integrale aus den unbestimmten.)** In vielen Fällen lassen sich von einem aufgestellten Differentialausdruck begränzte Integrale angeben, während man die unbestimmten nicht kennt, und hier ist es auch, wo diese Rechnung ihren vorzüglichsten Nutzen äußert. Aber auch der verkehrte Fall findet öfter seine vortheilhafte Anwendung, wo nämlich das unbestimmte Integral schon bekannt ist, und das begränzte daraus abgeleitet werden soll, eine Aufgabe, die meistens keine besondere Schwierigkeiten darbiethet.

I. So hat man z. B., wie man leicht durch Differentiation findet, die beyden unbestimmten Integrale

$$\int e^{-bx} \sin. ax \,.\, dx = -e^{-bx} \frac{a \cos. ax + b \sin. ax}{a^2 + b^2}$$

und

$$\int e^{-bx} \cos. ax \,.\, dx = e^{-bx} \frac{a \sin. ax - b \cos. ax}{a^2 + b^2}.$$

Setzt man nun voraus, daß die Größe b positiv ist, und sucht man diese Integrale zwischen den Gränzen o und ∞, so hat man, da $e^{-b\infty}$ gleich Null ist,

$$\int_0^\infty e^{-bx} \sin. ax \,.\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ und}$$

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos. ax \,.\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

II. Um eben so, für ein anderes Beyspiel, das Integral von $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$ zu finden, so hat man, wie wir schon oben (§. 146) gefunden haben, das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da nun, für die beyden angegebenen Größen das Glied

$$\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{1-x^2}$$

verschwindet, so ist

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1 \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

woraus man durch wiederholte Substitution erhält

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1.m-3.m-5\ldots(m-2r+1)}{m.m-2.m-4\ldots(m-2r+2)} \int_0^1 \frac{x^{m-2r} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo r eine ganze Zahl bezeichnet. Es ist aber

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \text{ und } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.sin.} x,$$

also auch

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \text{ und } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man daher in dem vorhergehenden Ausdrucke zuerst $m = 2r$ und dann $m = 2r + 1$, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2r}{3.5.7\ldots(2r+1)}$$

übereinstimmend mit §. 146.

III. Auf eine ähnliche Weise erhält man folgende Ausdrücke, deren Entwickelung wir der Kürze wegen dem Lehrer überlassen.

$$\int_{-a}^{a} \sin.\frac{b\pi x}{a} \sin.\frac{c\pi x}{a} dx = 0,$$

$$\int_{-a}^{a} \cos.\frac{b\pi x}{a} \cos.\frac{c\pi x}{a} = 0,$$

$$\int_{-a}^{a} \sin.\frac{b\pi x}{a} \cos.\frac{c\pi x}{a} dx = 0,$$

$$\int_{-a}^{a} \left(\sin.\frac{c\pi x}{a}\right)^2 dx = \int_{-a}^{a} \left(\cos.\frac{c\pi x}{a}\right)^2 dx = a,$$

wo b und c eine ganze und a eine willkürliche Zahl bezeichnet.

§. 244. (Ueber das Euler'sche Integral.) Euler hat sich zuerst mit dem Integral

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left(\log.\frac{1}{x}\right)^{p-1} dx$$

beschäftigt, daher es auch seinen Namen trägt. Man sieht, daß es, zwischen den beyden angezeigten Gränzen genommen, nur eine Funk-

tion von der Größe p seyn kann. Da alle Bemühungen vergebens waren, diese Funktion von p in einem geschlossenen Ausdrucke durch algebraische oder auch durch bisher bekannte transcendente Größen auszudrücken, und da sie doch in dem ganzen Gebiethe der Analysis eine so wichtige Rolle spielt, so hat man ihr das besondere Zeichen $\Gamma(p)$ gegeben, und diese Funktion Gamma p genannt.

Um nur die vorzüglichsten Eigenschaften dieser Funktion kennen zu lernen, bemerken wir zuerst, daß man, wenn man $x = e^{-y}$ setzt, sie auch auf die Form bringen kann

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \quad . \ . \ . \quad (1).$$

Der letzte Ausdruck gibt durch theilweise Integration (§. 138, III.)

$$\int e^{-x} x^p dx = - e^{-x} x^p + p \int e^{-x} x^{p-1} dx,$$

und dieß mit (1) verglichen, zeigt sofort, daß für diese Funktion die Gleichung besteht

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \quad . \ . \ . \quad (2).$$

Dieselbe Gleichung (1) zeigt auch, daß man hat $\Gamma(1) = 1$, und eben so gibt die Gleichung (2) den Ausdruck $\Gamma(2) = 1$, und überdieß, wenn man in ihr $p = 0$ setzt, $\Gamma(0) = \infty$.

I. Aus derselben Gleichung (2) fließen sofort auch die folgenden

$$\begin{aligned}
&\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p),\\
&\Gamma(p+2) = (p+1)\,\Gamma(p+1),\\
&\Gamma(p+3) = (p+2)\,\Gamma(p+2),\\
&. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .\\
&\Gamma(p+n+1) = (p+n)\,\Gamma(p+n) \quad \text{und}\\
&\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p),\\
&\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1),\\
&\Gamma(p-1) = (p-2)\,\Gamma(p-2),\\
&. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .\\
&\Gamma(p-n+1) = (p-n)\,\Gamma(p-n).
\end{aligned}$$

Die Multiplication der Glieder der ersten Reihe gibt

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+n) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)} \quad . \ . \ . \quad (3),$$

und eben so gibt auch die zweyte Reihe

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-n) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n)}.$$

Setzt man in der vorletzten Gleichung $p = 1$ und schreibt $n - 2$ statt n, so erhält man

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-2)(n-1),$$

also auch

$$[\Gamma(n+1)]^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \ldots (n-1)^2 n^2,$$

woraus folgt, daß, wenn p eine ganze positive Zahl, $\Gamma(p)$ keine transcendente Größe mehr ist.

II. Setzt man in derselben Gleichung (3) statt p die Größe $1 - p$, so hat man

$$(1-p)(2-p)(3-p)\ldots(n-p) = \frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(1-p)},$$

und dieser Ausdruck, mit (3) multiplicirt, gibt

$$(1-p^2)(2^2-p^2)(3^2-p^2)\ldots(n^2-p^2)$$
$$= \frac{\Gamma(n+1-p) \cdot \Gamma(n+1+p)}{p\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)},$$

oder auch

$$\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(n+1-p) \cdot \Gamma(n+1+p)}{[\Gamma(n+1)]^2} \cdot \frac{1}{p\Gamma(p)\Gamma(1-p)}.$$

Da der erste Faktor des zweyten Theiles dieser Gleichung sich der Einheit immer mehr nähert, je größer n ist, so hat man die unendliche Reihe

$$\left(1-\frac{p^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\ldots = \frac{1}{p\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)}.$$

Vergleicht man diese unendliche Anzahl Produkte mit der oben (§. 65) gegebenen Reihe,

$$\sin. x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

so hat man

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin. p\pi} \ldots (4).$$

III. Setzt man in der Gleichung (4) statt p nach der Ordnung $\frac{1}{2}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$, so erhält man

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{\pi}{n}},$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{2\pi}{n}} \cdot \cdot \cdot \quad \text{und}$$

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{n-1}{n}\pi},$$

und wenn man alle diese Ausdrücke unter einander multiplicirt,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \cdot \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\left[\sin.\frac{\pi}{n}\sin.\frac{2\pi}{n}\sin.\frac{3\pi}{n}\ldots\sin.\frac{n-1}{n}\pi\right]}},$$

oder da die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich $\frac{n}{2^{n-1}}$ ist,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \cdot \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{2\,\pi^{n-1}}{n}}.$$

IV. Wenn man endlich in der Gleichung (1) die Größe $x = a y^n$ setzt, wo a und n positive Größen bezeichnen, so erhält man

$$\Gamma(p) = n a^p \int_0^\infty e^{-a y^n} y^{np-1} dy.$$

Nimmt man daher $np = q$ und stellt die Größe x wieder her, so ist

$$\Gamma\left(\frac{q}{n}\right) = n a^{\frac{q}{n}} \int_0^\infty e^{-a x^n} x^{q-1} dx \quad . \; . \; . \quad (5).$$

Macht man in dieser Gleichung $a = q = 1$ und $n = 2$, so hat man, da $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§. 245. (Integrale der Form $\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

$^{x\sqrt{-1}} dx = 0$, $\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos.x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ und

$\int_0^\infty \frac{\sin. x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. I. Setzt man in dem Ausdrucke $y = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} dx$ die Größe $x = z^2$ oder $z = \sqrt{x}$, so erhält man

$$y = 2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz.$$

Allein es ist

$$2 \frac{1 + z^2}{1 + z^4} = \frac{1}{1 + z\sqrt{2} + z^2} + \frac{1}{1 - z\sqrt{2} + z^2},$$

also auch (§. 138)

$$2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz = \sqrt{2} \,.\, \text{arc. tang.} \frac{z}{\sqrt{2} + z} + \sqrt{2} \,.\, \text{arc. tang.} \frac{z}{\sqrt{2} - z}.$$

Da aber $\text{arc. tang.}\, \alpha + \text{arc. tang.}\, \beta = \text{arc. tang.} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$ ist, so hat man

$$y = 2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz = \sqrt{2} \,.\, \text{arc. tang.} \frac{z\sqrt{2}}{1 - z^2},$$

und daher, wenn man zu den beyden Gränzen o und 1 übergeht, da $\text{arc. tang.} \infty = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$y = 2 \int_0^1 \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

II. Sey $y = \int e^{hx\sqrt{-1}} dx$, wo h jede positive oder negative Zahl außer o bezeichnet, so ist auch

$$y = \int (\cos. hx + \sqrt{-1} \,.\, \sin. hx) dx = \frac{1}{h} \sin. hx - \frac{\sqrt{-1}}{h} . \cos. hx,$$

und daher sofort für die Gränzen π und $-\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{hx\sqrt{-1}} dx = 0.$$

Für den besondern Fall $h = 0$ ist $\int dx = x$, also auch $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

III. Um $y = \int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos. x}$ zu finden, wo $a > b$ ist, sey $x = 2\, \text{arc. tang.}\, z$, woraus folgt $z = \text{tang.} \frac{1}{2} x$, so daß also den beyden Gränzen $x = 0$ und π die anderen $z = 0$ und ∞ entspre-

chen. Sucht man daraus $\sin.\frac{x}{2}$ und $\cos.\frac{x}{2}$, und bemerkt, daß man hat

$$\cos.x = \cos.^2\frac{x}{2} - \sin.^2\frac{x}{2}, \text{ so ist auch } \cos.x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

und daher

$$\frac{1}{a+b\cos.x} = \frac{1+z^2}{a+b+(a-b)z^2}.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man für das gesuchte allgemeine Integral

$$y = \int\frac{dz}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc. tang. } z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

und wenn man dieses Integral zwischen den Gränzen 0 und ∞ nimmt, so erhält man

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos.x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

IV. Um das begränzte Integral $y = \int_0^\infty \frac{dx}{x}.\sin.x$ zu finden, hat man (nach §. 240. III.)

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}.dx = \int_0^\pi \frac{\sin.x}{x}dx + \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin.x}{x}dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin.x}{x}dx + \ldots$$

also auch (nach §. 240. V.)

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}.dx$$

$$= \int_0^\pi dx\left[\frac{\sin.x}{x} + \frac{\sin.(\pi+x)}{x} + \frac{\sin.(2\pi+x)}{x} + \ldots\right],$$

oder was dasselbe ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}.dx$$

$$= \int_0^\pi dx.\sin.x\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi+x} + \frac{1}{4\pi+x} + \frac{1}{6\pi+x} + \right]$$

$$- \int_0^\pi dx\,\sin.x\left[\frac{1}{\pi+x} + \frac{1}{3\pi+x} + \frac{1}{5\pi+x} + \ldots\right].$$

…t dem zweyten Gliede dieses Ausdruckes kann man aber auch …o, VI.) schreiben

$$-\int_0^\pi dx \sin. x \left[\frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{4\pi - x} + \frac{1}{6\pi - x} + \right],$$

so daß man daher hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin. x}{x} \cdot dx$$

$$= \int_0^\pi dx \sin. x \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{4\pi - x} + \frac{1}{4\pi + x} - \frac{1}{6\pi - x} + \ldots\right].$$

Man hat aber die bekannte Reihe (*Euler* introd. in anal. infinit. Vol. I. §. 171)

$$\frac{\pi}{2n} \tang. \frac{m\pi}{2n}$$

$$= \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \ldots\text{*)}.$$

Setzt man hier $n = \pi$ und $m = \pi - x$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} \cotang. \frac{x}{2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{4\pi - x} + \ldots$$

so daß man daher hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin. x}{x} \cdot dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi \sin. x \cotang. \frac{x}{2} \cdot dx$$

$$= \int_0^\pi \cos.^2 \frac{x}{2} \cdot dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos. x) \cdot dx = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man endlich nx statt x, wo n irgend eine positive Zahl bezeichnet, so ist auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin. nx}{x} \cdot dx = \frac{\pi}{2}.$$

---

*) Man erhält diese Reihe durch die Integration des Ausdruckes

$$y = \int \frac{(x^{n-m-1} - x^{m+n-1})\, dx}{1 - x^{2n}},$$

wenn man $\frac{1}{1 - x^{2n}} = 1 + x^{2n} + x^{4n} + x^{6n} +$ setzt und dann die Integrale der einzelnen Glieder zwischen den Gränzen $x \neq 0$ und $x = 1$ nimmt.

§. 246. (Integral $\int_0^\infty \frac{\cos. rx}{m^2+x^2} . dx = \frac{\pi}{2m} . e^{-mr}$). Sey $u = \int \frac{\cos. rx}{1+x^2} dx$, so ist auch, wenn man den Bruch $\frac{1}{1+x^2}$ nach den negativen Potenzen von x^2 entwickelt,

$$u = \int \frac{\cos. rx}{x^2} dx - \int \frac{\cos. rx}{x^4} dx + \int \frac{\cos. rx}{x^6} dx - \ldots$$

Allein durch theilweise Integration erhält man leicht

$$\int \frac{\cos. rx}{x^h} dx = -\frac{\cos. rx}{(h-1)x^{h-1}} - \frac{r}{h-1} \int \frac{\sin. rx}{x^{h-1}} dx \quad \text{und}$$

$$\int \frac{\sin. rx}{x^k} dx = -\frac{\sin. rx}{(k-1)x^{k-1}} + \frac{r}{k-1} \int \frac{\cos. rx}{x^{k-1}} dx,$$

und daher auch, durch wiederholte Substitution,

$$\int \frac{\cos. rx}{x^{2n}} . dx = \sin. rx \left[\frac{r}{2n-1.2n-2.x^{2n-2}} - \frac{r^3}{2n-1\ldots 2n-4\, x^{2n-4}} + \ldots \pm \frac{r^{2n-3}}{2n-1\ldots 3.2.1.x^2}\right]$$

$$, \; -\cos. rx \left[\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} - \frac{r^2}{2n-1.2n-2.2n-3.x^{2n-3}} + \ldots \mp \frac{r^{2n-2}}{2n-1\ldots 3.2.1.x}\right]$$

$$\pm \frac{r^{2n-1}}{2n-1.2n-2\ldots 3.2.1.} \int \frac{\sin. rx}{x} dx,$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn n gerade oder ungerade ist.

Dieß vorausgesetzt, suchen wir zuerst den Werth von u für den Fall $x = \infty$.

Für diesen Fall verschwinden aber in dem erhaltenen Ausdrucke von $\int \frac{\cos. rx}{x^{2n}} . dx$ alle Glieder bis auf das letzte, so daß man für $n = 1, 2, 3 \ldots$ erhält

$$\int \frac{\cos. rx}{x^2} dx = -r \int \frac{\sin. rx}{x} dx,$$

$$\int \frac{\cos. rx}{x^4} dx = \frac{r^3}{1.2.3} \int \frac{\sin. rx}{x} dx,$$

$$\int \frac{\cos. rx}{x^6} dx = -\frac{r^5}{1.2\ldots 5} \int \frac{\sin. rx}{x} dx \quad \text{u. s. w.}$$

mnach ist der Werth von

$$u = \int \frac{\cos. r x}{1 + x^2} dx$$

für den Fall $x = \infty$

$$u' = -\left[r + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^5}{1.2\ldots5} + \frac{r^7}{1.2\ldots7} + \ldots\right] \int \frac{\sin. r x}{x} dx.$$

Allein da

$$r + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^5}{1.2\ldots5} + = \tfrac{1}{2}(e^r - e^{-r})$$

und (nach §. 245, IV.)

$$\int \frac{\sin. r x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

ist, so ist auch

$$u' = -\frac{\pi}{4}(e^r - e^{-r}).$$

I. Suchen wir nun eben so den Werth u'' von u für $x = 0$, oder, was dasselbe ist, für $z = \infty$, wenn man $x = \frac{1}{z}$ setzt.

Unter dieser Voraussetzung wird

$$u = \int \frac{\cos. \frac{r}{z}}{1 + z^2} dz$$

$$= \int \frac{dz}{1 + z^2} - \frac{r^2}{2} \int \frac{dz}{z^2(1 + z^2)} + \frac{r^4}{2.3.4} \int \frac{dz}{z^4(1 + z^2)} - \ldots$$

und da man durch die Zerfällung der Brüche (§. 139) erhält

$$\frac{1}{z^{2n}(1 + z^2)} = \frac{1}{z^{2n}} - \frac{1}{z^{2n-2}} + \frac{1}{z^{2n-4}} - \ldots \mp \frac{1}{z^2} \pm \frac{1}{1 + z^2},$$

das obere oder untere Zeichen, wenn n gerade oder ungerade ist, so hat man auch

$$\int \frac{dz}{z^{2n}(1 + z^2)}$$

$$= -\frac{1}{(2n - 1) z^{2n-1}} + \frac{1}{(2n - 3) z^{2n-3}} - \frac{1}{(2n - 5) z^{2n-5}} + \ldots$$

$$\pm \frac{1}{z} \pm \text{arc. tang. } z.$$

Da nun auch in diesem Ausdrucke für $z = \infty$ alle Glieder verschwinden, bis auf das letzte, welches gleich arc. tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$ wird, so hat man

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{r^2}{2}\int \frac{dz}{z^2(1+z^2)} = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{r^4}{2.3.4}\int \frac{dz}{z^4(1+z^2)} = \frac{r^4}{2.3.4}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ u. s. w.,}$$

also ist auch der Werth von

$$u = \int \frac{\cos.\frac{r}{z}}{1+z^2}\,dz = \int \frac{\cos.rx}{1+x^2}\,dx$$

für $z = \infty$ oder $x = 0$

$$u'' = \left(1 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2.3.4} + \ldots\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e^r + e^{-r}).$$

Berücksichtiget man also beyde Gränzen $x = \infty$ und $x = 0$, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{\cos.rx}{1+x^2}\,dx = u' + u'' = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-r},$$

also auch, wenn man in diesem Ausdruck $\frac{x}{m}$ statt x setzt,

$$\int_0^\infty \frac{\cos.\frac{rx}{m}}{m^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2m}e^{-r},$$

und daher auch, wenn man r in mr verwandelt,

$$\int_0^\infty \frac{\cos.rx}{m^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2m}\,e^{-mr}.$$

§. 247. (**Differentiation und Integration dieser Ausdrücke.**) Da ein begränztes Integral, gleich seinem Werthe gesetzt, eigentlich eine identische Gleichung bildet, so kann man auch mit diesen Integralen eben so, wie mit allen identischen Gleichungen verfahren. Wenn eine solche Gleichung zwischen mehreren Größen gegeben ist, so sind mit ihr zugleich auch alle Differential- und Integral-Gleichungen gegeben, die man aus jener ersten, in Beziehung auf irgend eine in ihr enthaltene Größe ableiten kann, selbst wenn diese Größe früher als eine Constante betrachtet worden ist. Durch dieses Verfahren lassen sich aus jedem gegebenen begränzten Integral unzählige andere ableiten, wie wir sogleich an einigen Beyspielen sehen werden.

I. In der letzten Gleichung des §. 246 wurden die Größen m und r als constant angenommen. Dieß hindert aber nicht, diese Gleichung

in Beziehung auf die eine oder die andere dieser beyden Größen zu differentiiren. Thut man dieß, z. B. in Beziehung auf r, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{x \sin. r x}{m^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-mr},$$

und diese Gleichung ist eben so richtig, als die, aus welcher sie abgeleitet worden ist. Für den besonderen Fall $m = 1$ geben beyde Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\cos. r x}{1 + x^2} dx = \int_0^\infty \frac{x \sin. r x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-r}.$$

II. Wie im Vorhergehenden die Differentiation, so läßt sich auch die Integration auf diese Ausdrücke anwenden. So ist, wie man sogleich sieht,

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dm, so hat man

$$\int_0^1 dx \,.\, x^{m-1} dm = \frac{m}{dm}.$$

Integrirt man dann diesen Ausdruck in Beziehung auf die Variable m, so erhält man, da bekanntlich $\int a^{m-1} dm = \frac{a^{m-1}}{\log. a}$ ist,

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log. x} \,.\, dx = \log. m + \text{Const.}$$

Um diese Constante der Integration zu bestimmen, hat man für $m = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log. x} = \text{Const.},$$

also ist auch

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - 1}{\log. x} \,.\, dx = \log. m.$$

III. Nach §. 243, I. hatten wir

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos. a x \,.\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch da, so ist

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-bx} \cos. a x \,.\, da = \frac{b\, da}{a^2 + b^2},$$

wovon das Integral in Beziehung auf a ist,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\sin. a x}{x} dx = b \text{ arc. tang. } \frac{a}{b},$$

wo die Constante der Integration gleich Null ist, da der Ausdruck für $a = o$ verschwindet.

Ganz eben so gibt auch die zweyte der in §. 243, I. angeführte Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\cos. a x}{x} dx = -\tfrac{1}{2}\log.(a^2+b^2) + C.$$

Da die Constante C der Integration die Größe a nicht enthalten kann, weil $\cos. a x$ an den beyden Gränzen von a unabhängig ist, so kann man c statt a setzen, wodurch man erhält

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\cos. c x}{x} = -\tfrac{1}{2}\log.(c^2+b^2) + C.,$$

und da in den beyden letzten Ausdrücken die Größe C denselben Werth haben muß, so ist auch

$$\int_0^\infty e^{-bx}\frac{\cos. a x - \cos. c x}{x} = \tfrac{1}{2}\log. \frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}.$$

Da wir diesen Gegenstand, des Mangels an Raum wegen, nicht weiter verfolgen können, so wird es genügen, einige der vorzüglichsten auf diesem Wege erhaltenen Resultate anzuführen.

$$\int_0^\infty \frac{x \sin. r x . dx}{(m^2+x^2)(1 \pm 2p\cos. r x + p^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{mr} \pm p},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log.(1 \pm 2p\cos. r x + p^2)}{m^2+x^2} . dx = \frac{\pi}{m}\log(1 \pm p e^{-mr}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. \sin. r x}{m^2+x^2} . dx = \frac{\pi}{2m}\log.\left(\frac{1-e^{-2mr}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. \cos. r x}{m^2+x^2} . dx = \frac{\pi}{2m}\log.\frac{1+e^{-2mr}}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. \text{tang}. r x}{m^2+x^2} . dx = \frac{\pi}{2m}\log.\frac{e^{2mr}-1}{e^{2mr}+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \text{ cotang}. r x}{m^2+x^2} . dx = \frac{\pi}{e^{2mr}-1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \tang. r x}{m^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{e^{2mr}+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{cosec.} r x}{m^2+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cdot dz}{1+z^4} = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty \cos.^2 x \cdot dx = \int_0^\infty \sin.^2 x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos.^2 ax \cos. bx \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \sin. \tfrac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin.^2 ax \cos. bx \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \sin. \tfrac{1}{4}\left(\pi - \frac{b^2}{a}\right) \text{ u. s. w.}$$

IV. Das vorhergehende Verfahren läßt sich, wie es scheint, nur auf solche begränzte Integrale anwenden, die wenigstens e i n e unbestimmte Constante enthalten. Allein bey einer näheren Betrachtung des Gegenstandes fällt diese Beschränkung weg, da man, wenn das Integral keine unbestimmte Constante enthält, eine solche willkürlich einführen kann. Wenn z. B. der Ausdruck gegeben wäre

$$\int_0^\infty fx \cdot dx,$$

dessen Werth gleich A seyn soll, so hat man, wenn man die unbestimmte Gränze m einführt, nach §. 240, I.,

$$\int_0^m fx \cdot dx + \int_m^\infty fx \cdot dx = A.$$

Setzt man dann in dem ersten dieser Integrale $x = mz$ und in dem zweyten $x = \frac{m}{z}$, so erhält man

$$\int_0^1 \left[f(mx) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx = \frac{A}{m},$$

und da dieser Ausdruck die unbestimmte Größe m enthält, so können aus ihm, wie zuvor, viele andere abgeleitet werden, wie z. B.:

$$\int_0^1 \left[x \varphi(mx) + \frac{1}{x^3} \varphi\left(\frac{m}{x}\right)\right] dx = -\frac{A}{m^2} \text{ u. s. f.}$$

§. 248. (Bestimmung dieser Integrale durch Differentialgleichungen.) Im Vorhergehenden haben wir, durch Differentiation oder Integration in Beziehung auf eine Constante irgend eines bereits bekannten Integrals, mehrere andere Integrale abzuleiten gelehrt. Allein selbst wenn das gegebene Integral noch unbekannt ist, läßt sich dasselbe, durch Differentiation der Constanten, auf eine Differentialgleichung zurückführen, die dann, wenn man sie integrirt, den gesuchten Werth des gegebenen Integrals gibt. Sey z. B. das unbekannte begränzte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin. a x}{x(m^2+x^2)} dx$$

gegeben, welches wir der Kürze wegen y nennen wollen. Differentiirt man diese Gleichung

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin. a x}{x(m^2+x^2)} dx$$

in Beziehung auf a, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{da}\right)' = \int_0^\infty \frac{\cos. a x}{m^2+x^2} dx.$$

Allein nach §. 246 hat man

$$\int_0^\infty \frac{\cos. a x}{m^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2m} e^{-ma},$$

also ist auch

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = \frac{\pi}{2m} e^{-ma}.$$

Integrirt man diese Gleichung in Beziehung auf a, so erhält man

$$y = -\frac{\pi}{2m^2} e^{-ma} + C.$$

Die Constante der Integration aber wird dadurch bestimmt, daß, nach der gegebenen Gleichung, die Größe y zugleich mit a verschwinden soll, wodurch man erhält $C = \frac{\pi}{2m^2}$, so daß daher das gesuchte Integral seyn wird

$$\int_0^\infty \frac{\sin. a x}{x(m^2+x^2)} dx = \frac{\pi}{2m^2}(1-e^{-ma}).$$

I. Auch die Integration der partiellen Differentialgleichungen

läßt sich auf dieselbe Weise anwenden. Ist z. B. das Integral zu suchen

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} dx \,.\, e^{-b\varphi x} \cos. a\varphi x \,.\, \psi x,$$

wo φx und ψx zwey willkürliche Funktionen von x und wo a und b unbestimmte Constanten bezeichnen, so hat man, wenn man die gegebene Gleichung zweymal in Beziehung auf a und auf b differentiirt,

$$\left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right) = -\int_{\alpha}^{\beta} dx \,.\, e^{-b\varphi x} \cos. a\varphi x \,.\, (\varphi x)^2 \psi x,$$

$$\left(\frac{d^2 y}{d b^2}\right) = \int_{\alpha}^{\beta} dx \,.\, e^{-b\varphi x} \cos. a\varphi x \,.\, (\varphi x)^2 \psi x.$$

Addirt man diese beyden Ausdrücke, so ist

$$\left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right) + \left(\frac{d^2 y}{d b^2}\right) = 0,$$

und von der letzten Gleichung ist das Integral

$$y = f(b + a\sqrt{-1}) + F(b - a\sqrt{-1}),$$

wo wieder f und F zwey willkürliche Funktionen bezeichnen.

Das Vorhergehende wird hinreichen, die Wichtigkeit dieses Gegenstandes zu erkennen. Weitere Belehrungen darüber findet man in: *Lacroix*, Traité du calcul. Vol. III. *Legendre*, Exercices de Calc. Integr. *Cauchy*, Exercices de Mathématiques; *Poisson*, Journal Polytechnique. Vol. XIX. und *Piola* in Opuscoli mat. e fisici. Milano 1832. Vol. I.

XL.

Prinzipien der Differenzen-Rechnung.

§. 249. **(Allgemeine und summatorische Glieder der Reihen durch die Differenzen der einzelnen Glieder.)** In der Differentialrechnung haben wir die Veränderung der Funktionen bloß in Beziehung auf die Form gesucht, welche diese Veränderungen, in den verschiedenen Gliedern ihrer Entwickelung, annehmen, ohne auf die Größe, auf den eigentlichen Werth dieser Veränderungen, zu sehen.

Es sey nun u irgend eine Funktion von x, die für $x = x + h$ in u_1, für $x = x + 2h$ in u_2, für $x = x + 3h$ in u_3 u. s. f. übergeht, so daß man die Reihe hat

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4 \ldots u_n \ldots$$

Nehmen wir die Differenzen der nächstfolgenden Glieder dieser Reihe, und von diesen Differenzen wieder die Differenzen u. s. w., und setzen wir der Kürze wegen (analog mit §. 87)

$$\begin{aligned}
u_1 - u &= \Delta u, \\
u_2 - u_1 &= \Delta u_1, \\
u_3 - u_2 &= \Delta u_2, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
u_n - u_{n-1} &= \Delta u_n, \\
\Delta u_1 - \Delta u &= \Delta^2 u, \\
\Delta u_2 - \Delta u_1 &= \Delta^2 u_1, \\
\Delta u_3 - \Delta u_2 &= \Delta^2 u_2, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\Delta u_n - \Delta u_{n-1} &= \Delta^2 u_{n-1}, \\
\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u &= \Delta^3 u, \\
\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 &= \Delta^3 u_1, \\
\Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2 &= \Delta^3 u_2, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^2 u_{n-1} - \Delta^2 u_{n-1} &= \Delta^3 u_n.
\end{aligned}$$

I. Dieß vorausgesetzt, erhält man durch eine einfache Substitution der letzten Ausdrücke in einander

$$\begin{aligned}
u_2 &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u, \\
u_3 &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \quad \text{u. f.}
\end{aligned}$$

Man bemerkt hier sogleich die Form des Binoms, daher man durch Analogie erhält,

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots \text{(I.)}$$

so daß man also für jedes Glied der obigen Reihe einen Ausdruck erhält, der bloß von dem ersten Gliede u und von den Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ ... der übrigen Glieder abhängt.

Eben so erhält man durch eine ähnliche Substitution

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_1 - u, \\
\Delta^2 u &= u_2 - 2u_1 + u, \\
\Delta^3 u &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u \quad \text{u. f.,}
\end{aligned}$$

und daher wieder durch Analogie, wie wir auch schon oben (§. 87) gefunden haben,

$$\Delta^n u = u_n - n u_{n-1} + \frac{n . n-1}{1 . 2} u_{n-2} - \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} u_{n-3} + \ldots \text{(II.)}$$

so daß man also die Differenz $\Delta_n u$ irgend einer Ordnung n bloß durch diejenigen Glieder der anfangs gegebenen Reihe ausdrücken kann, die zur Bildung dieser Differenz $\Delta_n u$ gebraucht worden sind.

Eben so ist endlich die Summe der beyden ersten Glieder der gegebenen Reihe

$$S = u + u_1 = 2u + \Delta u,$$

die der drey ersten Glieder

$$S_2 = u + u_1 + u_2 = 3u + 3\Delta u + \Delta^2 u$$

u. s. w., also wieder analog die Summe S_n der n ersten Glieder

$$u + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$S_n = (n+1) n + \frac{n+1 . n}{1 . 2} \Delta u + \frac{n+1 . n . n-1}{1 . 2 . 3} \Delta^2 u + \ldots \text{(III.)}$$

Man kann diese Reihen einfacher ausdrücken, und zwar die Reihe (I.) durch

$$u_n = (1 + \Delta u)^n,$$

und die Reihe (II.) durch

$$\Delta^n u = (u - 1)^n,$$

vorausgesetzt, daß man in der Entwickelung dieser Binome statt der Exponentialgröße Δu^n und u^n den Index $\Delta^n u$ und u_n setzt.

II. Ist z. B. $u = x^m$, also auch

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m \ldots u_n = (x+nh)^m,$$

und daher die Reihe (II.)

$$\Delta^n u = [x+nh]^m - n[x+(n-1)h]^m + \frac{n . n-1}{1 . 2}[x+(n-2)h]^m$$
$$- \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3}[x+(n-3)h]^m + \ldots$$

Für ein anderes spezielles Beyspiel sey

$$u = 1, \quad u_1 = 2^3, \quad u_2 = 3^3, \quad u_3 = 4^3 \ldots$$

also die Reihe gegeben

1 8 27 64 125 . . .

mit ihren Differenzen

	7	19	37	61
		12	18	24
			6	6

so ist $u = 1$, $\Delta u = 7$, $\Delta^2 u = 12$, $\Delta^3 u = 6$, und daher, wenn man $n = 3$ setzt,

die Reihe (I.) $u_3 = 1 + 21 + 36 + 6 = 64$,
» » (II.) $\Delta^3 u = 64 - 81 + 24 - 1 = 6$,
» » (III.) $S_3 = 4 + 42 + 48 + 6 = 100$.

§. 250. (**Interpolation der Reihen.**) Nimmt man an, daß von einer gegebenen Reihe die auf einander folgenden Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ ... immer kleiner werden, was sehr oft der Fall ist, so kann man den Ausdruck (I.) des §. 249 auch anwenden, um die Zwischenglieder der gegebenen Reihe, für welche nämlich n irgend ein Bruch ist, zu finden. Um z. B. in der letzten Reihe das Glied zu finden, welches in der Mitte zwischen 27 und 64 liegt, ist $n = \frac{5}{2}$, und mit diesem Werthe von n gibt die Reihe (I.) den gesuchten Werth dieses Gliedes $u_{\frac{5}{2}} = 42.875$. Man nennt dieß: die gegebene Reihe interpoliren, und man sieht, welchen Nutzen dieses Verfahren bey der Construction von Tabellen u. s. gewähren kann.

Sind die Glieder der gegebenen Reihe nicht äquidistant, wie zuvor, sondern weiß man z. B. nur, daß für die Größen $x = 0, 1, 3$ und 7 die Werthe $u = 1$, 2.11, 5.25 und 18.73 gehören, so kann man annehmen

$$u = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wo offenbar $a = 1$ ist. Substituirt man in diesem Ausdrucke für x die Werthe 1, 3 und 7, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$1.11 = b + c + d,$$
$$4.25 = 3b + 9c + 27d,$$
$$17.73 = 7b + 49c + 343d,$$

woraus folgt $b = 1.01952$, $c = 0.06953$ und $d = 0.02095$, so daß man für das gesuchte allgemeine Glied hat

$$u = 1 + 1.01952\,x + 0.06953\,x^2 + 0.02095\,x^3.$$

Der letzte Ausdruck gibt

für $x = 2$ den Werth von $u = 3.48$,
» $x = 4$ » » » $u = 7.53$,
» $x = 5$ » » » $u = 19.45$ u. f.

welche Werthe von u aber nur annähernd richtig sind, da der wahre Ausdruck, aus welchem die obigen Zahlen 2.11, 6.25 und 18.73 abgeleitet wurden, ist

$$u = 1 + x + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{100} + \frac{x^4}{1000}.$$

I. Man sieht daraus, daß das Problem der Interpolation ein **unbestimmtes** ist, so lange die eigentliche Form der Reihe nicht bekannt ist, und die gegebenen Bedingungen nicht hinreichen, alle Glieder derselben zu bestimmen. Dasselbe geht auch aus demjenigen Interpolations-Ausdruck hervor, den wir oben (im Eingange des §. 161) gegeben haben, wo für $x = o, a, b \ldots$ der entsprechende Werth von $u = A, B, C \ldots$ angenommen worden ist. Denn man sieht, daß man statt der a. a. O. angenommenen Reihe auch die folgende hätte setzen können

$$u = \frac{(x-a)^m (x-b)^n (x-c)^n \ldots}{a^m b^n c^n \ldots} A + \frac{x(x-b)(x-c)\ldots}{a(a-b)(a-c)\ldots} B + \ldots$$

oder auch

$$u = \frac{\sin. m(x-a) \sin. n(x-b) \sin. p(x-c) \ldots}{\sin. m a \sin. n b \sin. p c \ldots} A$$
$$+ \frac{\sin. m x \sin. n(x-b) \sin. p(x-c) \ldots}{\sin. m a . \sin. n(a-b) \sin. p(a-c) \ldots} B + \ldots$$

da auch diese Formen den aufgestellten Bedingungen genug thun. Die Wahl dieser Form ist in vielen Fällen von großer Wichtigkeit. Wenn sich in den gegebenen Bedingungen wiederkehrende Perioden zeigen, so wird man Ausdrücke der Art

$$u = a + b \cos. x + c \sin. x + b' \cos. 2x + c' \sin 2x + \ldots$$

oder

$$u = \alpha + \beta \cos. (mx + n) + \beta' \cos. (m'x + n') + \ldots$$

oft sehr angemessen finden u. f. w.

§. 251. (Analogie der Differenzen mit den Potenzen. Wenn in der Funktion $u = fx$ die Stammgröße x in $x + h$ übergeht, so hat man, nach **Taylor's** Theorem,

$$u' = u + h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots$$

oder da $u' - u = \Delta u$ ist, die Größe Δu in der Bedeutung des §. 249 genommen,

$$\Delta u = h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots$$

Nach dem Vorhergehenden aber hat man auch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$e^x - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder, wenn man $x = h\frac{du}{dx}$ setzt,

$$e^{h\frac{du}{dx}} - 1 = h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{du^2}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{du^3}{dx^3} + \ldots$$

Setzt man daher wieder, der Kürze wegen, $d^n u$ statt du^n, so hat man

$$\Delta u = e^{h\frac{du}{dx}} - 1,$$

und daher auch, wenn man dieselbe Versetzung der Zeichen $d^n u$ und du^n beybehält,

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{du}{dx}} - 1\right)^n.$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken die Logarithmen, so ist

$$h \,.\, \frac{du}{dx} = \log(1 + \Delta u) \quad \text{und} \quad h^n \,.\, \frac{d^n u}{dx^n} = [\log.(1 + \Delta u)]^n,$$

wenn man auch hier Δu^n in $\Delta^n u$ verwandelt.

§. 252. (Summationen.) Ist $u = ax + b$, wo a und b constante Größen vorstellen, so ist nach der vorhergehenden Bezeichnung

$$\Delta u = a(x+h) + b - ax - b \quad \text{oder}$$
$$\Delta u = ah.$$

Da demnach Δh die Differenz von $ax + b$ ist, so kann auch umgekehrt $ax + b$ die Summe von ah genannt werden. Wählt man daher für diese Summe das Zeichen Σ, so hat man

$$ax + b = \Sigma ah \quad \text{oder} \quad a\Sigma h = ax + b,$$

oder endlich

$$\Sigma h = x + \frac{b}{a},$$

wo man für $\frac{b}{a}$ irgend eine Constante C setzen kann, so daß man also hat

$$\Sigma h = x + \text{Const.}$$

Ist aber $u = x^m$, so ist auch

$$\Delta x^m = (x + h)^m - x^m,$$

woraus man für $m = 1, 2, 3, \ldots$ erhält

$$\Delta x = h,$$
$$\Delta x^2 = 2hx + h^2,$$
$$\Delta x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3, \text{ u. s. w.}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt durch Reversion $\Sigma h = x$, oder eigentlich, nach dem Vorhergehenden, $\Sigma h = x + \text{Const.}$, welche Constante wir künftig bey jeder durch Σ ausgedrückten Summation als schon hinzugefügt voraussetzen wollen. Da übrigens

$$\Sigma h = \Sigma h . 1 = h \Sigma 1$$

ist, so hat man auch

$$\Sigma 1 = \frac{x}{h}.$$

Eben so gibt die zweyte jener Gleichungen

$$\Sigma(2hx + h^2) = x^2, \text{ oder}$$
$$2h\Sigma x + h^2\Sigma 1 = x^2, \text{ oder}$$
$$\Sigma x = \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2},$$

und auf dieselbe Weise

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{hx}{6},$$
$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{hx^2}{4},$$
$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{hx^3}{3} - \frac{h^3x}{30} \text{ u. s. w.}$$

Statt diese Ausdrücke weiter fortzusetzen, nehme man allgemein an

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \ldots$$

Nimmt man von jedem Gliede dieser Reihe die erste Differenz, so erhält man

$$\begin{aligned} x^m = A(m+1)x^m &+ \frac{A}{1.2}(m+1)m\,.\,x^{m-1}h^2 \\ &+ \frac{A}{1.2.3}(m+1)m(m-1)\,.\,x^{m-2}h^3 + \ldots \\ &+ Bm\,.\,x^{m-1}h \\ &+ \frac{B}{1.2}m(m-1)\,.\,x^{m-2}h^2 + \ldots \\ &+ C(m-1)\,.\,x^{m-2}h + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man die Faktoren einer jeden Potenz von x gleich Null, so erhält man nach einigen Reduktionen

$$A = \frac{1}{(m+1)h},$$

$$B = -\frac{A}{1.2}(m+1)h,$$

$$C = -\frac{A}{1.2.3}(m+1)mh^2 - \frac{B}{1.2}\,.\,mh \quad \text{u. f.},$$

und wenn man dieß weiter fortsetzt, so findet man endlich

$$\begin{aligned} \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + \frac{mhx^{m-1}}{2^2.3} - \frac{m.m-1.m-2\,h^3x^{m-3}}{2^4.3^2.5} \\ + \frac{m.m-1\ldots m-4.h^5.x^{m-5}}{2^5.3^3.5.7} - \frac{m.m-1\ldots m-6.h^7.x^{m-7}}{2^8.3^2.5^2.7} \\ + \frac{m.m-1\ldots m-8.h^9.x^{m-9}}{2^9.3^5.5.7.11} \\ - \frac{691\,m.m-1\ldots m-10.h^{11}.x^{m-11}}{2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13} \\ + \frac{m.m-1\ldots m-12.h^{13}.x^{m-13}}{2^{12}.3^4.5^2.7^2.11.13} \\ - \frac{3617\,m.m-1\ldots m-14.h^{15}.x^{m-15}}{2^{16}.3^7.5^4.7^2.11.13.17} + \ldots \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck gibt das Mittel, die Summation aller algebraischen, ganzen und rationellen Ausdrücke zu finden. So hat man z. B., wenn der Kürze wegen $h = 1$ gesetzt wird,

$$\Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1)$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) + 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) - x,$$

oder

$$\Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1)$$

$$= \frac{1}{12}(3x^4 - 26x^3 + 69x^2 - 58x) + \text{Const.}$$

I. Eben so hat man für Exponentialgrößen

$$\Delta . a^x = a^x (a^h - 1),$$

also auch

$$a^x = \Sigma a^x (a^h - 1),$$

woraus folgt:

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

II. Für trigonometrische Funktionen ist z. B.:

$$\Delta \cos. x = \cos. (x + h) - \cos. x = - 2 \sin. \frac{h}{2} \sin. \left(x + \frac{h}{2}\right),$$

also auch, wenn man $x - \frac{h}{2}$ statt x schreibt:

$$\sin. x = - \frac{\Delta \cos. \left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin. \frac{h}{2}},$$

und daher durch Reversion:

$$\Sigma \sin. x = - \frac{\cos. \left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin. \frac{h}{2}},$$

und eben so erhält man auch

$$\Sigma \cos. x = \frac{\sin. \left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin. \frac{h}{2}}.$$

Man bemerkt von selbst die Analogien dieses Calculs mit der Differential- und Integralrechnung.

§. 253. (Summation auf einander folgender Produkte.) Sey $u = x (x + h) (x + 2h) \ldots [x + (m - 1) h]$ gegeben. Nimmt man davon die Differenz, so ist

$$\Delta u = (x + h)(x + 2h) \ldots (x + mh) - x (x + h) \ldots [x + (m - 1) h]$$

oder

$$\Delta u = (x + h) (x + 2h) \ldots [x + (m - 1) h] \, mh.$$

Da aber

$$\Sigma \frac{\Delta u}{mh} = \frac{\Sigma \Delta u}{mh} = \frac{u}{mh}$$

ist, so hat man auch

$$\Sigma (x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{x}{mh}(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h] + \text{const.},$$

oder wenn man $x = x - h$ und $m = m + 1$ setzt:

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{(x+h)}{(m+1)h} x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h] \ldots (A).$$

Auf dieselbe Weise kann man auch mit dem Ausdrucke

$$u = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$

verfahren, da dessen Differenz gleich

$$\Delta u = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} - \frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]},$$

das heißt, gleich ist

$$\Delta u = \frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}.$$

Die Reversion dieses Ausdrucks gibt, wenn man wieder für u seinen Werth setzt:

$$\Sigma \frac{-1}{x(x+h)\ldots(x+mh)} = \frac{u}{mh} = \frac{1}{mhx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]};$$

also auch, wenn man $m = m - 1$ setzt:

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$
$$= \frac{-1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-2)h]} \ldots (B).$$

I. Nun kann aber in jeder gegebenen Reihe

$$u,\ u_1,\ u_2 \ldots u_{n-1},\ u_n$$

das allgemeine Glied u_n als die Differenz der Summe aller vorhergehenden Glieder angesehen werden, so zwar, daß wenn man die Summe

$$u + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} = S_{n-1}$$

setzt, man sofort hat:

$$\Delta S_{n-1} = u_n, \quad \text{also auch} \quad S_{n-1} = \Sigma u_n.$$

Daraus folgt also, daß die ganze Summe der Reihe, das allgemeine Glied mitgenommen, gleich ist

$$S_n = \Sigma u_n + u_n.$$

Wenden wir diesen Ausdruck auf die Gleichung (A) an, wo das allgemeine Glied ist

$$u_x = x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h],$$

so erhält man

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{(x-h)}{(m+1)h} x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$+ x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h],$$

oder wenn man die beyden letzten Glieder zusammenzieht:

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}{(m+1)h} + \text{const.}$$

Und eben so erhält man auch aus der Gleichung (B) den folgenden Ausdruck:

$$S\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$
$$= \frac{-1}{(m-1)h(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} + \text{const.}$$

Mittelst dieser beyden Ausdrücke erhält man die Summen derjenigen Reihen, deren Glieder die sogenannten direkten oder reciproken **figurirten Zahlen** sind. Für die ersten oder für die Reihen, deren allgemeines Glied $\frac{x}{1}$, $\frac{x(x+1)}{1.2}$, $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$ rc. ist, hat man, wenn man $h = 1$ und nach der Ordnung $m = 1, 2, 3\ldots$ setzt:

$$S\frac{x}{1} = \frac{x}{1.2}(x+1) + C$$

für die Summe der Reihe 1, 2, 3, 4 . . . ,

$$S\frac{x(x+1)}{1.2} = \frac{x}{1.2.3}(x+1)(x+2) + C$$

für die Summe der Reihe 1, 3, 6, 10 . . . ,

$$S\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} = \frac{x}{1.2.3.4}(x+1)(x+2)(x+3) + C$$

für die Summe der Reihe 1, 4, 10, 20 . . . ,

wo die Constante gleich Null ist, da alle diese Ausdrücke mit x zugleich verschwinden.

Eben so erhält man für diejenigen Reihen, deren allgemeines Glied $\frac{1}{x}$, $\frac{1.2}{x(x+1)}$, $\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$ rc. ist:

$$1.2\,S\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{2}{x+1} + C,$$

$$1.2.3\,S\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{3}{(x+1)(x+2)} + C',$$

$$1.2.3.4\,S\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)} + C'',$$

wo die Constante $C = \frac{2}{1}$, $C' = \frac{3}{2}$, $C'' = \frac{4}{3}$, $C''' = \frac{5}{4}$ 2c. ist. So gibt z. B. die letzte Gleichung für die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \ldots$$

das summatorische Glied $= \frac{1}{18} - \frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)}$. Setzt man in diesem Ausdrucke $x = 1, 2, 3 \ldots$, so erhält man für das erste Glied $\frac{1}{24}$, für die Summe der zwey ersten $\frac{1}{20}$, für die der drey ersten $\frac{19}{360}$ u. s. f.

§. 254. **(Gleichungen mit Differenzen.)** Wenn y eine Funktion von x ist, und wenn h die beständige Zunahme der Stammgröße x bezeichnet, so wird eine Gleichung zwischen Differenzen im Allgemeinen die Form haben:

$$F(x\,.\,y\,.\,\Delta y\,.\,\Delta^2 y\,\ldots) = 0.$$

In einer solchen Gleichung kann man die Differenzen Δy, $\Delta^2 y \ldots$ durch die auf einander folgenden Werthe der Größe y ersetzen, da man hat:

$$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y_1 \text{ u. f.},$$

so daß also jene Gleichung die Gestalt annimmt:

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots) = 0,$$

und aus dieser Form sieht man, daß jede solche Differenzengleichung den Werth der gesuchten Funktion durch eine bestimmte Anzahl der dieser Funktion vorhergehenden homologen Funktionen gibt. Ist z. B. die gegebene Gleichung der ersten Ordnung, so wird man aus ihr die Größe y_1 durch y ausgedrückt erhalten; ist sie der zweyten Ordnung, so wird sie den Werth von y_2 durch y_1 und y geben u. s. f. Jede solche Gleichung ist daher einer Reihe gleich, in welcher man jedes Glied durch eine bestimmte Anzahl der vorhergehenden Glieder erhält. Denn ist z. B. die Gleichung $y_2 = f(x, y, y_1)$ gegeben, so kann man daraus die folgenden ableiten:

$$y_3 = f(x+h, y_1, y_2); \quad y_4 = f(x+2h, y_2, y_3) \text{ u. f.}$$

und daraus wird man die Reihe bilden können:

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots,$$

deren jedes Glied aus den zwey ihm zunächst vorhergehenden gebildet wird, und in welcher daher die beyden ersten Glieder y und y_1 ganz willkürlich sind.

I. Um nun auch ein Beyspiel von der Integration einer solchen Gleichung zu geben, wollen wir die Gleichung annehmen:

$$\Delta y + Xy = X',$$

wo X und X' bloß Funktionen von x sind (vergl. §. 205). Setzen wir der Kürze wegen die constante Zunahme Δx der Größe x gleich der Einheit voraus. Nimmt man dann $y = uz$, so hat man

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u \Delta z,$$

und unsere gegebene Gleichung geht in folgende über:

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Xuz = X'.$$

In ihr kann man den Theil $z\Delta u + Xuz$ gleich Null annehmen, so daß man hat

$$\Delta u + Xu = 0 \quad \text{und} \quad u\Delta z + \Delta u\Delta z = X'.$$

Daraus folgt sofort

$$\Delta z = \frac{X'}{u + \Delta u} \quad \text{oder} \quad z = \Sigma \frac{X'}{u + \Delta u}.$$

Unsere Aufgabe reducirt sich daher auf die Integration des Ausdrucks $\Delta u + Xu = 0$, in welcher sich die Variablen trennen lassen (§. 203), da man hat

$$\frac{\Delta u}{u} = -X.$$

Sey $u = e^t$, also auch (§. 253, I.)

$$\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -X,$$

woraus daher folgt

$$e^{\Delta t} = 1 - X, \quad \Delta t = \log.(1 - X) \quad \text{und} \quad t = \Sigma \log.(1 - X).$$

Da aber die Summe der Logarithmen der Funktion $(1 - X)$ gleich dem Produkte der auf einander folgenden Werthe von $(1 - X)$ ist, die zwischen den Gränzen des Integrals enthalten sind, so sey dieses Produkt

$$(1 - X_0)(1 - X_1)(1 - X_2)\ldots(1 - X_{n-2})(1 - X_{n-1}) = [1 - X_{x-1}]_x,$$

wodurch man erhält:

$$t = \log . [1 - X_{x-1}]_x ; \quad u = e^t = [1 - X_{x-1}]_x .$$

Da nun $u_1 = u + \Delta u$ ist, so hat man auch

$$u + \Delta u = [1 - X_x]_{x+1} \quad \text{und} \quad z = \Sigma \frac{X'}{[1 - X_x]_{x+1}},$$

und daher endlich für das gesuchte Integral

$$y = [1 - X_{x-1}]_x . \Sigma \frac{X'}{[1 - X_x]_{x+1}} .$$

Ist für einen besonderen Fall $X = A$ eine Constante, so hat man

$$y = (1 - A)^x . \Sigma \frac{X'}{(1 - A)^{x+1}} .$$

Ist überdieß auch noch $X' = B$ constant, so ist

$$\Sigma \frac{X'}{(1 - X)^{x+1}} = X' . \Sigma (1 - X)^{-x-1} = B . \Sigma (1 - A)^{-x-1},$$

oder (nach §. 252, I.)

$$\Sigma \frac{X'}{(1 - X)^{x+1}} = \frac{B (1 - A)^{-x-1}}{(1 - A)^{-1} - 1} = \frac{B}{(1 - A)^x . A},$$

und daher das gesuchte Integral

$$y = (1 - A)^x . \left[\frac{B}{(1 - A)^x . A} + \text{const.} \right] .$$

Weitere Ausführungen dieses Gegenstandes findet man in Lacroix, Traité du calc. diff. Vol. III.

XLI.

Principien der Variationsrechnung.

---

§. 255. (Erklärung dieser Rechnung.) Alle vorhergehenden Betrachtungen setzen voraus, daß die Abhängigkeit der Differentialien dx, dy, dz... von einander, während dem Verlaufe der Rechnung, immer dieselbe bleibe. Allein es gibt auch andere Untersuchungen, in welchen sich diese Abhängigkeit, der Natur der Aufgabe gemäß, ändert. Wenn z. B. U eine Funktion der Größen x, y und ihrer Differentialien

dx, dy bezeichnet, so ist das Integral $\int U dx$, zwischen je zwey bestimmten oder gegebenen Werthen von x, einer unendlichen Anzahl von Werthen fähig, wenn man die Relationen zwischen x und y sich ändern läßt. Nimmt man, für einen speciellen Fall, $U = y$ an, so bezeichnet das Integral $\int y dx$ die Fläche einer Curve, welche zwischen zwey gegebenen Ordinaten, zwischen der Differenz ihrer Abscissen und zwischen dem Bogen der Curve, der von jenen beyden Ordinaten begränzt wird, enthalten ist. Allein diese Fläche wird verschieden seyn, wenn man, in der dem Integral $\int dx$ zu Grunde gelegten Gleichung der Curve, verschiedene Curven annimmt, und man wird daher die Frage aufstellen können: welche Gleichung einer Curve, oder welche Relation zwischen x und y muß man, unter allen möglichen, wählen, damit die durch dieses Integral $\int y dx$ ausgedrückte Fläche ein Größtes oder ein Kleinstes werde. Solche Fragen nun gehören in die Variationsrechnung.

Wenn z. B. MM' (Fig. 54) diese Curve ausdrücken soll, für welche das Integral $\int U dx$ ein Größtes ist, so muß dieses Integral für jede andere Curve mm' einen kleineren Werth haben. Um dieser Bedingung zu genügen, muß vor allem untersucht werden, welchen Einfluß eine Änderung in der Relation von x und y, d. h. in der Natur der Curve, auf das Integral $\int U dx$ hat. Bey dieser Änderung wird aber die Größe y, unabhängig von x, sich ändern müssen, da, wenn man zwey Curven betrachtet, zu demselben $x = AP$ zwey Ordinaten PM und Pm gehören, und die Differenz Mm dieser Ordinaten muß von den Differenzen RM' und rm' wohl unterschieden werden, da diese letzten zwischen zwey nächstfolgenden Ordinaten derselben Curve Statt haben. Aus diesem Grunde unterscheidet man auch diese beyden Differenzen der Ordinaten, selbst wenn sie unendlich klein genommen werden, durch besondere Zeichen. Heißt nämlich $M'R = dy$, das Differential von $PM = y$ in derselben Curve MM', so ist $Mm = \delta y$ die Variation von derselben Ordinate $PM = y$, wenn man von einer Curve MM' zu ihrer nächstfolgenden mm' übergeht.

I. Zieht man mr mit MR, und ms mit MM' parallel, so hat man

$$P'M' = y + dy \quad \text{und} \quad Pm = y + \delta y.$$

Geht man dann von dem Punkt M zu m' über, so erhält man

$$P'm' = Pm + rs + sm' = y + \delta y + dy + \delta dy$$
$$= y + dy + \delta.(y + dy).$$

Da aber, wie wir voraussetzen, der Punkt m′ dem m der nächstfolgende, auf der Curve m m′ ist, so hat man auch

$P'm' = y + \delta y + d.(y + \delta y) = y + \delta y + dy + d\delta y,$

woraus daher folgt:

$$\delta d y = d \delta y,$$

oder die Variation des Differentials ist gleich dem Differential der Variation, und die beyden Zeichen d und δ lassen sich willkürlich eines vor das andere setzen.

Ganz eben so ist also auch

$$\delta d^2 y = d \delta d y = d^2 \delta y,$$

so wie

$$\delta d U = d \delta U \quad \text{u. s. w.}$$

II. Auch für die Integralzeichen hat eine analoge Verwechslung Statt. Denn ist

$$\int U dx = V,$$

so ist auch

$$dV = U dx \quad \text{und} \quad \delta . dV = \delta . U dx.$$

Wenn man aber in $\delta . dV$, nach I., die Zeichen d und δ versetzt, so ist auch

$$d . \delta V = \delta . U dx,$$

oder wenn man integrirt:

$$\delta V = \int \delta . U dx.$$

Stellt man aber in dem letzten Ausdruck den Werth von $V = \int U dx$ wieder her, so hat man

$$\delta . \int U dx = \int \delta . U dx.$$

§. 256. (Variation des Integrals $\int U dx$.) Sey U eine Funktion von x, y, z und den Differential-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$... dieser Größen. Man suche die Variation von $\int U dx$, oder die Größe $\delta \int U dx$.

Der Gleichförmigkeit und Symmetrie der Formeln wegen wollen wir auch die Größe dx veränderlich annehmen, obschon sie, nach dem Vorhergehenden, als eine constante Größe betrachtet werden soll, da es von uns abhängt, am Ende der Rechnung die Größen $d^2 x$, $d^3 x$... wieder gleich Null zu setzen.

Nehmen wir, der Kürze wegen, folgende Bezeichnungen an:

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx\ldots \text{ und}$$
$$dz = p'dx,\quad dp' = q'dr,\quad dq' = r'dx\ldots$$

Da endlich, der Voraussetzung gemäß, U eine Funktion von x, y, z, p, p'... ist, so kann man annehmen:

$$dU = N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$
$$+ N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \ldots$$

Um nun den Werth von δU zu erhalten, so wird man in dem Ausdrucke von U die Größen x, y, z in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ verwandeln, und dann von dem so veränderten Werthe von U den ersten Werth dieser Größe U subtrahiren. Da dieß aber ganz dasselbe Verfahren ist, welches man bey der Differentialrechnung anwendet, so wird man in dem bereits aufgestellten Differential dU von U, nur das Zeichen d in δ verwandeln, um sofort auch die gesuchte Variation δU von U zu erhalten. Diesemnach ist daher

$$\left.\begin{array}{l}\delta U = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots \\ \quad + N'\delta z + P'\delta p' + Q'\delta q' + \ldots,\end{array}\right\}\ldots (A).$$

Lassen wir zuerst, der größeren Einfachheit wegen, die Größe z ganz weg, so daß U bloß als eine Funktion von x, y und ihren Differentialien p, q, r... betrachtet, oder daß $z = p' = q' = r' \ldots$ gleich Null gesetzt wird, und daß man daher hat:

$$\delta U = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots$$

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$\delta.\int U dx = \int \delta.U dx = \int (U\delta dx + dx\delta U)$$
$$= U\delta x - \int \delta x dU + \int dx\delta U,$$

und wenn man den vorhergehenden Werth von dU und δU substituirt:

$$\delta.\int U dx = U\delta x + \int N dx\,(\delta y - p\delta x)$$
$$+ \int P d.\,(\delta y - p\delta x)$$
$$+ \int Q d.\,(\delta p - q\delta x) + \ldots$$

Um diesen Ausdruck abzukürzen, sey

$$\delta y - p\delta x = \omega,$$

so ist auch

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx},\quad \delta q - r\delta x = \frac{1}{dx}\,.\,d\frac{d\omega}{dx} \quad \text{u. s. w.}$$

und daher

$$\delta . \int U dx = U \delta x + \int N \omega dx + \int P d\omega + \int Q d . \frac{d\omega}{dx} + \int R d . \frac{1}{dx} . d \frac{d\omega}{dx} + \ldots$$

Integrirt man aber diese Ausdrücke theilweise, so ist

$$\int Q d . \frac{d\omega}{dx} = Q \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} . \omega + \int \omega d . \frac{dQ}{dx},$$

$$\int R d . \frac{1}{dx} . d \frac{d\omega}{dx} = \frac{R}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx} . \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} . \omega - \int \omega d \frac{1}{dx} . d \frac{dR}{dx} \text{ u. s. f.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der vorhergehenden Gleichung, und bemerkt man, daß, wenn z nicht Null ist, man noch einen zweyten, dem vorigen ganz ähnlichen Ausdruck erhält, in welchem man bloß $NPQ\ldots$ in $N'P'Q'\ldots$, und $\omega = \delta y - p \delta x$ in $\omega' = \delta z - p' \delta x$ verwandeln darf, so erhält man für die gesuchte vollständige Variation des gegebenen Integrals $\int U dx$, wenn dx constant angenommen wird,

$$\begin{aligned} \delta . \int U dx = & \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \ldots \right) \\ & + \int \omega' dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \frac{d^3 R'}{dx^3} + \ldots \right) \\ + U \delta x + \omega & \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \ldots \right) \\ & + \omega' \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2 R'}{dx^2} - \frac{d^3 S'}{dx^3} + \ldots \right) \\ & + \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} - \ldots \right) \\ & + \frac{d\omega'}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2 S'}{dx^2} - \ldots \right) \\ & + \frac{d^2 \omega}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \ldots \right) + \ldots, \end{aligned}$$

von welchem Ausdrucke das Gesetz des Fortgangs deutlich ist.

§. 257. **(Bestimmung des größten oder kleinsten Werths des Integrals $\int U dx$.)** Um den größten oder kleinsten Werth des Integrals $\int U dx$ zu erhalten, wird man, nach den bekannten Vorschriften der Differentialrechnung, die Variation $\delta . \int U dx$ dieses Inte-

grals gleich Null setzen, wo dann ein Größtes oder ein Kleinstes Statt haben wird, je nachdem der Werth von $\delta^2 . \int U\,dx$, zwischen denselben Gränzen, wie vorhin das Integral $\int U\,dx$ genommen, negativ oder positiv ist.

Allein, indem man diese Variation $\delta . \int U\,dx$, das heißt, indem man den so eben erhaltenen Ausdruck dieser Variation gleich Null setzt, bemerkt man, daß dieser Ausdruck aus zwey, wesentlich unter sich verschiedenen Theilen besteht. Der eine dieser Theile hat nämlich das Integralzeichen $\int$ vor sich, und der andere ist davon frey. Man wird daher jeden dieser zwey Theile für sich gleich Null setzen müssen. Thut man dieß mit dem ersten Theile, so erhält man

$$o = \omega\,dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \omega'\,dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots\right),$$

und dieß sind zugleich die Gleichungen der gesuchten Curve von doppelter Krümmung, für welche das Integral $\int U\,dx$, zwischen den gegebenen Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Für eine ebene Krumme, deren Gleichung zwischen x und y gegeben ist, fällt der zweyte dieser Ausdrücke $o = N' - \frac{dP'}{dx} + \ldots$ weg.

Allein da diese Ausdrücke erste, zweyte und selbst höhere Differentialien enthalten, so werden sie integrirt werden müssen. Diese Integrationen werden daher auch eine, zwey oder mehrere Constanten einführen, und die Bestimmung dieser Constanten ist es, die von dem zweyten Theile jener Ausdrücke, welche das Zeichen $\int$ nicht enthalten, gegeben wird. Dieser zweyte Theil wird nämlich mit den Bedingungen in Verbindung stehen, welche für die Endpunkte jener Curven festgesetzt worden sind, so daß sie z. B. zwey fixe Punkte, oder daß sie noch unbestimmte Punkte von zwey anderen Curven, auf welchen jene erste Curve senkrecht steht, seyn sollen u. dgl.

I. Nimmt man also zuerst bloß auf den ersten Theil jener Variation Rücksicht, so hat man, wenn man, wie früher bereits gesagt worden ist, die Variation von x oder die Größe δx gleich Null setzt, für die gesuchte Curve die Gleichung

$$o = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)\delta y$$
$$+ \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots\right)\delta z \quad \ldots \quad (I).$$

Sind nun, wie es bey Curven von doppelter Krümmung der Fall ist, die beyden Größen y und z von einander unabhängig, so werden es auch ihre Variationen seyn, und der letzte Ausdruck wird den zwey folgenden gleich gelten:

$$\left.\begin{aligned} o &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots \\ o &= N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots \end{aligned}\right\} \ldots \text{(II)},$$

und diese beyden Gleichungen werden die der gesuchten Curve seyn.

II. Sind aber die Größen y und z durch irgend eine gegebene Bedingungsgleichung verbunden oder von einander abhängig, soll z. B. die gesuchte Curve auf irgend einer Fläche liegen, deren Gleichung $\mathfrak{L} = o$ ist, so wird man für diese Bedingungsgleichung haben:

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)\delta z = o.$$

Eliminirt man dann aus dieser Gleichung und aus der Gleichung (I) eine der zwey Größen δy oder δz, so wird dadurch auch die andere entfernt, und man erhält die einzige Gleichung:

$$\begin{aligned} o = &\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) \\ &- \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots\right) \ldots \text{(III)}, \end{aligned}$$

und diese Gleichung (III), verbunden mit der Gleichung $\mathfrak{L} = o$, wird für jeden besonderen Fall die gesuchten Werthe von y und z geben. Auch kann man, wie es in der Mechanik zu geschehen pflegt, diesen Fall auf den ersten in (I) zurückführen, wenn man statt den Gleichungen (II) die folgenden annimmt:

$$\left.\begin{aligned} o &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots + \lambda\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) \\ o &= N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots + \lambda\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) \end{aligned}\right\}.$$

wo λ einen unbestimmten Factor bezeichnet. Eliminirt man nämlich aus diesen beyden Ausdrücken die Größe λ, so erhält man wieder die Gleichung (III); sind aber die Größen y und z von einander unabhängig, so ist $\lambda = o$, und man erhält die Gleichungen (II).

Wir wollen nun die vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf einige Beyspiele anwenden.

§. 258. (Kürzeste Linie zwischen zwey gegebenen Punkten.) Um die kürzeste Linie, die man zwischen zwey Punkten in einer Ebene ziehen kann, zu finden, so hat man für diese Linie den allgemeinen Ausdruck

$$\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx\sqrt{1 + p^2},$$

also ist auch, für unsere Aufgabe:

$$U = \sqrt{1 + p^2} \text{ und daher } \delta U = \frac{p\,\delta p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Vergleicht man diesen Werth von δU mit dem der Gleichung (A), so hat man

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

und alle übrigen Größen N, N', P', Q... sind gleich Null. Es gehen demnach die Gleichungen (II) in folgende einzelne über:

$$dP = 0, \quad \text{oder} \quad dp = 0, \quad \text{oder endlich} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Das erste Integral dieser Gleichung ist $\frac{dy}{dx} = C$, und wenn man diesen Ausdruck noch einmal integrirt, so erhält man

$$y = Cx + C'$$

für die gesuchte kürzeste Curve, die also, wie bekannt, die gerade Linie ist.

Sind die zwey Punkte, durch welche diese Gerade gehen soll, gegebene feste Punkte, so sind die Variationen der Coordinaten derselben für sich gleich Null, und der zweyte, von dem Zeichen $\int$ unabhängige Theil von $\delta\int U dx$ kömmt weiter in keine Betrachtung.

Nehmen wir aber an, daß diese zwey Gränzpunkte nicht bestimmte feste Punkte seyn, sondern daß sie sich nur auf zwey Gränzcurven befinden sollen, deren Gleichungen

$$dy' = m'' dx' \text{ und}$$
$$dy'' = m'' dx''$$

sind. Um nun die zwey Punkte dieser Gränzcurven zu finden, durch welche unsere kürzeste Gerade gehen soll, so hat man für den zweyten Theil von $\delta\int U dx$ in unserm speciellen Falle den Ausdruck

$$U\delta x + P\omega = 0 \text{ oder}$$
$$U\delta x + P(\delta y - p\delta x) = 0.$$

Setzt man aber $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so ist

$$U = \sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{ds}{dx} \text{ und}$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dy}{ds}.$$

Substituirt man diese Werthe von U und P in den vorhergehenden Ausdruck, so hat man

$$\frac{ds}{dx}\delta x + \frac{dy}{ds}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{ds}\delta y + \left(ds - \frac{dy^2}{ds}\right)\frac{\delta x}{dx} = 0, \text{ oder endlich}$$

$$\frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dx}{ds}\delta x.$$

Wendet man diesen Ausdruck für jede der beyden Gränzcurven an, und nimmt die Differenz beyder Ausdrücke, so erhält man für den erwähnten zweyten Theil

$$\frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{dx'}{ds'}\delta x' - \frac{dy'}{ds'}\delta y' = 0,$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von $\delta y'$ und $\delta y''$ substituirt,

$$\left(\frac{dx'' + m''dy''}{ds''}\right)dx'' - \left(\frac{dx' + m'dy'}{ds'}\right)\delta x' = 0.$$

Da aber die beyden Größen $\delta x'$ und $\delta x''$ von einander ganz unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung den beyden folgenden gleichgeltend:

$$dx'' + m''dy'' = 0 \text{ und } dx' + m'dy' = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{m''} \text{ und } \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m'},$$

und diese Gleichungen zeigen, daß unsere Geraden auf den beyden Gränzcurven senkrecht stehen, oder denselben unter rechten Winkeln begegnen muß, um die kürzeste Gerade zu seyn, die man zwischen diesen beyden Gränzcurven ziehen kann.

I. Sucht man aber die kürzeste Linie im Raume, oder berücksichtiget man auch die dritte Coordinate z, so hat man für das Element des Bogens dieser Linie

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

also ist auch

$$U = \sqrt{1 + p^2 + p'^2} \quad \text{und} \quad dU = \frac{p\,dp + p'dp'}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}},$$

und daher

$$P = \frac{p}{U}, \quad P' = \frac{p'}{U} \quad \text{und} \quad N = N' = Q = Q' \ldots = 0.$$

Es ist also auch der Theil des vorhergehenden Ausdrucks unter den Integralzeichen

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dP'}{dx} = 0,$$

oder wenn man integrirt:

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = B,$$

und wenn man noch einmal integrirt:

$$y = Ax + A', \quad z = Bx + B',$$

also die gesuchte Linie wieder eine Gerade.

Sind die beyden äußersten Punkte derselben fix, so verschwindet der andere Theil der Variation $\delta \int U\,dx$, der das Integralzeichen nicht enthält. Soll aber z. B. die gesuchte Curve an ihren Endpunkten durch zwey krumme Flächen begränzt seyn, deren Gleichungen sind:

$dz' = m'dx' + n'dy'$ für den Anfangspunkt, und
$dz'' = m''dx'' + n''dy''$ für den Endpunkt der Curve,

so ist der zweyte Theil der Variation

$$U\delta x + \omega P + \omega' P' = 0 \text{ oder}$$
$$U\delta x + (\delta y - p\,\delta x)\,P + (\delta z - p'\delta x)\,P' = 0.$$

Substituirt man aber in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von dz' und $\delta z''$ statt δz, und nimmt wieder die Differenzen, so hat man, da die Größen $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$ unter sich unabhängig sind, folgende vier Gleichungen:

$$1 + m'\frac{dz'}{dx'} = 0 \quad \text{und} \quad 1 + m''\frac{dz''}{dx''} = 0,$$

$$1 + n'\frac{dz'}{dy'} = 0 \quad \text{»} \quad 1 + n''\frac{dz''}{dy''} = 0,$$

und da diese Gleichungen die der Normalen auf jene beyden Flächen sind, so muß die gesuchte kürzeste Curve, oder die gefundene Gerade, auf jenen beyden Flächen senkrecht stehen.

II. Sucht man endlich von allen, auf einer gegebenen Fläche zwischen zwey gegebenen Punkten dieser Fläche, liegenden Curven die kürzeste, so sey die Gleichung dieser Fläche

$$\mathfrak{L} = 0 = A dx + B dy + C dz,$$

wo A, B, C Funktionen von x, y, z sind. Dieß vorausgesetzt, hat man, wie zuvor:

$$U = \sqrt{1 + p^2 + p'^2}, \quad P = \frac{p}{U}, \quad P' = \frac{p'}{U} \quad \text{und} \quad N = N' = 0;$$

also ist auch die Gleichung (III)

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) dP - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) dP' = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) d\frac{p}{U} - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) d\frac{p'}{U} = 0,$$

oder endlich, da $U dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$ ist:

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) d\frac{dy}{ds} - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) d\frac{dz}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}),$$

und dieß ist die allgemeine Gleichung der kürzesten Linie auf einer gegebenen Fläche.

III. Drückt man die Gleichung der gegebenen Fläche in der Gestalt aus:

$$dz = m dx + n dy, \quad \text{so ist}$$

$$d\mathfrak{L} = 0 = dz - m dx - n dy,$$

also auch

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) = -n;$$

so daß daher die letzte Gleichung (III) in folgende übergeht:

$$d \,.\, \frac{dy}{ds} + n d \,.\, \frac{dz}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Aus ihr läßt sich sofort noch eine andere Gleichung ableiten. Es ist nämlich

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1, \quad \text{also auch}$$

$$\frac{dx}{ds} d \,.\, \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \,.\, \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \,.\, \frac{dz}{ds} = 0.$$

Setzt man aber in dem zweyten Gliede dieses Ausdrucks

$$d \,.\, \frac{dy}{ds} = - n d \,.\, \frac{dz}{ds},$$

und in dem dritten

$$dz = m\,dx + n\,dy,$$

so erhält man

$$d \,.\, \frac{dx}{ds} + m\,d \,.\, \frac{dz}{ds} = 0 \quad . \;.\; . \quad (b).$$

IV. Ist die gegebene Fläche durch Rotation einer Curve um die Axe der x entstanden, so ist $x = \varphi\,(y^2 + z^2)$. Differentiirt man diese Gleichung bloß in Beziehung auf y und z, so ist

$$y\,dy + z\,dz = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z},$$

also ist auch

$$n = -\frac{y}{z},$$

und die Gleichung (a) wird

$$d \,.\, \frac{dy}{ds} - \frac{y}{z} \,.\, d\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

oder da ds constant ist:

$$\frac{z\,d^2y - y\,d^2z}{ds} = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$z\,dy - y\,dz = C\,ds \quad . \;.\; . \quad (a');$$

und diese Gleichung, verbunden mit jener der gegebenen Fläche $L = 0$, reicht hin, die gesuchte kürzeste Linie zu bestimmen.

Ist diese Fläche eine Kugel des Halbmessers a, so ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad \text{also auch}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z},$$

und daher die Gleichung (b)

$$d \,.\, \frac{dx}{ds} - \frac{x}{z}\,d \,.\, \frac{dz}{ds} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{ds} = 0,$$

dessen Integral ist:

$$z\,dx - x\,dz = C'\,ds \quad . \;.\; . \quad (b').$$

Die Gleichungen (a') und (b') zusammen genommen geben:

$$z\,dx - x\,dz = A\,(z\,dy - y\,dz).$$

Multiplicirt man beyde Theile dieser Gleichung durch den Factor $\frac{1}{z^2}$, so findet man für das Integral derselben

$$\frac{x}{z} = A\frac{y}{z} + B \quad \text{oder} \quad x = Ay + Bz,$$

die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene. Verbindet man sie mit der gegebenen Gleichung der Kugel selbst, so ist der Durchschnitt beyder Flächen die gesuchte kürzeste Linie, die also ein größter Kreis der Kugel ist. Weitere Ausführungen dieses Gegenstandes s. m. in Lacroix, Traité du calc. diff. et intégral. Vol. II. Cap. X.

Sammlung

der vorzüglichsten

Integralformeln.

I. $X = a + bx.$

$$\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{b}\log. X,$$

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\log. X,$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3}\log. X,$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{X} = \frac{x^m}{bm} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X}.$$

$$\int\frac{dx}{X^2} = -\frac{1}{bX},$$

$$\int\frac{dx}{X^n} = -\frac{1}{(n-1)\,b\,X^{n-1}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^2} = \frac{a}{b^2X} + \frac{1}{b^2}\log. X,$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X^2} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2a^2}{b^3}\right)\frac{1}{X} - \frac{2a}{b^3}\log. X,$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{X^2} = \frac{x^m}{(m-1)\,bX} - \frac{am}{(m-1)\,b}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X^2}.$$

$$\int\frac{dx}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^3} = -\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right)\frac{1}{X^2},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X^3} = \left(\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{b^3}\log. X.$$

$$\int\frac{dx}{xX} = \frac{1}{a}\log.\frac{x}{X},$$

$$\int\frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log.\frac{X}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2x} - \frac{b^2}{a^3}\log.\frac{X}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x^mX} = -\frac{1}{(m-1)\,a\,x^{m-1}} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{x^{m-1}X}.$$

$$\int \frac{dx}{x X^2} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{a^2} \log. \frac{X}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{2b}{a^2}\right) \frac{1}{X} + \frac{2b}{a^3} \log. \frac{X}{x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{b} \sqrt{X},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\tfrac{1}{3} X - a\right) \frac{2\sqrt{X}}{b^2},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\tfrac{1}{5} X^2 - \tfrac{2}{3} a X + a^2\right) \frac{2\sqrt{X}}{b^3},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \left(\tfrac{1}{7} X^3 - \tfrac{3}{5} a X^2 + a^2 X - a^3\right) \frac{2\sqrt{X}}{b^4}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log. \frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{\sqrt{X} + \sqrt{a}}, \text{ wenn } a \text{ positiv},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \text{ arc. tang. } \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{-a}}, \text{ wenn } a \text{ negativ},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = -\left(\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2 x}\right) \sqrt{X} + \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{b\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^{\frac{3}{2}}} = (X + a) \frac{2}{b^2 \sqrt{X}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \left(\tfrac{1}{3} X^2 - 2aX - a^2\right) \frac{2}{b^3 \sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{x X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a\sqrt{X}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{3b}{a^2}\right) \frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int dx \sqrt{X} = \frac{2X\sqrt{X}}{3b},$$

$$\int x\,dx \sqrt{X} = \left(\tfrac{1}{5} X - \tfrac{1}{3} a\right) \frac{2X\sqrt{X}}{b^2},$$

$$\int x^2 dx \sqrt{X} = \left(\tfrac{1}{7} X^2 - \tfrac{2}{5} a X + \tfrac{1}{3} a^2\right) \frac{2X\sqrt{X}}{b^3}.$$

$$\int \frac{dx\sqrt{X}}{x} = 2\sqrt{X} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{X}}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{X}}{x^3} = -\frac{X\sqrt{X}}{2ax^2} + \frac{b\sqrt{X}}{4ax} - \frac{b^2}{8a}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \frac{2X^2\sqrt{X}}{5b},$$

$$\int x\,dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{7}X - \tfrac{1}{5}a\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^2},$$

$$\int x^2 dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{9}X^2 - \tfrac{2}{7}aX + \tfrac{1}{5}a^2\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^3},$$

$$\int \frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x} = \left(\tfrac{1}{3}X + a\right)2\sqrt{X} + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x^2} = -\frac{X^2 dx}{ax} + \frac{3b}{2a}\int \frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{X}} = \frac{3\sqrt[3]{X^2}}{2b},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{X}} = \left(\tfrac{1}{5}X - \tfrac{1}{2}a\right)\frac{3\sqrt[3]{X^2}}{b^2},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{X}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left[\tfrac{1}{2}\log.\frac{\sqrt[3]{X} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{3}\,.\,\text{arc. tang.}\frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{X}}{\sqrt[3]{X} + 2\sqrt[3]{a}}\right],$$

$$\int dx\,.\,\sqrt[3]{X} = \frac{3X\sqrt[3]{X}}{4b},$$

$$\int dx\,.\,\sqrt[3]{X^2} = \frac{3X\sqrt[3]{X}}{5b}.$$

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \pm\frac{2}{\sqrt{ab}}\,\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{bx}{a}},$$ wenn a und b gleiche Zeichen haben;

$$= \frac{1}{\sqrt{(-ab)}}\log.\frac{a - bx + 2\sqrt{x}\,.\,\sqrt{(-ab)}}{X},$$ wenn a und b ungleiche Zeichen haben;

$$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{aX} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{X} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{x\,dx\,.\sqrt{x}}{X} = \left(\frac{x}{3b} - \frac{a}{b^2}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2} \int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx\,.\sqrt{x}}{X^2} = -\frac{\sqrt{x}}{bX} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{x\,dx\,\sqrt{x}}{X^2} = \frac{2x\sqrt{x}}{bX} - \frac{3a}{b} \int \frac{dx\,\sqrt{x}}{X^2},$$

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{1}{bk^3\sqrt{2}} \left[\log. \frac{x + k\sqrt{2x} + k^2}{\sqrt{X}} + \text{arc. tang.} \frac{k\sqrt{2x}}{k^2 - x}\right],$$

wenn a und b dieselben Zeichen haben, wo $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{1}{2bk^3} \left[\log. \frac{k - \sqrt{x}}{k + \sqrt{x}} - 2\,\text{arc. tang.} \frac{\sqrt{x}}{k}\right],$$

wenn a und b verschiedene Zeichen haben, wo $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2aX} + \frac{3}{4a} \int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx\,\sqrt{x}}{X} = \frac{1}{bk\sqrt{2}} \left[\text{arc. tang.} \frac{k\sqrt{2x}}{k^2 - x} - \log. \frac{x + k\sqrt{2x} + k^2}{\sqrt{X}}\right],$$

wenn a und b dieselben Zeichen haben, wo $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{\text{[illegible]}}{X} = \frac{1}{2bx} \left[\log. \frac{k - \sqrt{x}}{k + \sqrt{x}} + 2\,\text{arc. tang.} \frac{\sqrt{x}}{k}\right],$$

wenn a und b verschiedene Zeichen haben, wo $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{x\,dx\,\sqrt{x}}{X} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx\,\sqrt{x}}{X^2} = \frac{x\sqrt{x}}{2aX} + \frac{1}{4a} \int \frac{dx\,\sqrt{x}}{X},$$

$$\int \frac{x\,dx\,.\sqrt{x}}{X^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2bX} + \frac{1}{4b} \int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx}{Xx\sqrt{x}} = -\frac{2}{a\sqrt{x}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx}{X^2 x\sqrt{x}} = -\frac{2}{aX\sqrt{x}} - \frac{3b}{a} \int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}}.$$

II. $X = a + bx^2.$

$$\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\ \text{arc. tang. } x\sqrt{\frac{b}{a}},\ \text{wenn } b \text{ positiv},$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ \log.\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}},\ \text{wenn } b \text{ negativ};$$

$$\int\frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2aX} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{4aX^2} + \frac{3}{8a^2X}\right)x + \frac{3}{8a^2}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2b}\log. X,$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int\frac{x\,dx}{X},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2bX},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X^2} = -\frac{x}{2bX} + \frac{1}{2b}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{a}{2b^2X} + \frac{1}{2b^2}\log. X,$$

$$\int\frac{dx}{X^3} = \left(\frac{3bx^3}{8a^2} + \frac{5x}{8a}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{3}{8a^2}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a}\log.\frac{x^2}{X},$$

$$\int\frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2aX} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{xX},$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^2} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{3bx}{2a^2}\right)\frac{1}{X} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{X^m} = \frac{x}{2(m-1)aX^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a(m-1)}\int\frac{dx}{X^{m-1}},$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{X} = \frac{x^{m-1}}{b(m-1)} - \frac{a}{b}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X},$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{X^2} = \frac{x^{m-1}}{b(m-3)X} - \frac{a(m-1)}{b(m-3)}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^2},$$

$$\int\frac{dx}{x^mX} = -\frac{1}{a(m-1)x^{m-1}} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{x^{m-2}X},$$

$$\int\frac{dx}{x^mX^2} = -\frac{1}{a(m-1)x^{m-1}X} - \frac{b(m+1)}{a(m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-2}X^2},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log.\left[x\sqrt{b} + \sqrt{X}\right], \text{ wenn b positiv,}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}}\text{ arc. sin. } x\sqrt{-\frac{b}{a}}, \text{ wenn b negativ;}$$

$$\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3aX} + \frac{2}{3a^2}\right)\frac{x}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{b},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x\sqrt{X}}{2b} - \frac{a}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log.\frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{\sqrt{X} + \sqrt{a}}, \text{ wenn a positiv,}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\text{ . arc. sec. } x\sqrt{-\frac{b}{a}}, \text{ wenn a negativ;}$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax},$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2ax^2} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{b\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{xX^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{x^2 . X^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}},$$

$$\int dx\sqrt{X} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{X} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\log.\left(x\sqrt{b} + \sqrt{X}\right), \text{ wenn b positiv,}$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{X} + \frac{a}{2\sqrt{-b}}\text{arc. sin. } x\sqrt{-\frac{b}{a}}, \text{ wenn b negativ;}$$

$$\int x\,dx\sqrt{X} = \frac{X\sqrt{X}}{3b},$$

$$\int x^2\,dx\sqrt{X} = \frac{xX\sqrt{x}}{4b} - \frac{a}{4b}\int dx\sqrt{X},$$

$$\int x^3 dx \sqrt{X} = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{2a}{15b^2}\right) X\sqrt{X},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{X}}{x} = \sqrt{X} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{X}}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + b\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx\sqrt{X}}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{X}{4} + \frac{3a}{8}\right) x\sqrt{X} + \frac{3a^2}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x\,dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \frac{X^2\,.\sqrt{X}}{5b},$$

$$\int x^2 dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \frac{x X^2 \sqrt{X}}{6b} - \frac{a}{6b}\int dx\,.\,X^{\frac{3}{2}},$$

$$\int \frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x} = \left(\frac{X}{3} + a\right)\sqrt{X} + a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x^2} = -\frac{X^2\sqrt{X}}{ax} + \frac{4b}{a}\int dx\,.\,X^{\frac{3}{2}},$$

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{1}{bk^3\sqrt{2}}\left[\log.\frac{x + k\sqrt{2x} + k^2}{\sqrt{X}} + \text{arc. tang.}\frac{k\sqrt{2x}}{k^2 - x}\right],$$

wenn a und b gleiche Zeichen haben, und $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{1}{2bk^3}\left[\log.\frac{k - \sqrt{x}}{k + \sqrt{x}} - 2\ \text{arc. tang.}\frac{\sqrt{x}}{k}\right],$$

wenn a und b verschiedene Zeichen haben, und $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{X} = \frac{1}{bk\sqrt{2}}\left[\text{arc. tang.}\frac{k\sqrt{2x}}{k^2 - x} - \log.\frac{x + k\sqrt{2x} + k^2}{\sqrt{X}}\right],$$

wenn a und b dieselben Zeichen haben, und $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{X} = \frac{1}{2bk}\left[\log.\frac{k - \sqrt{x}}{k + \sqrt{x}} + 2\ \text{arc. tang.}\frac{\sqrt{x}}{k}\right],$$

wenn a und b verschiedene Zeichen haben, und $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ ist;

$$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2aX} + \frac{3}{4a}\int\frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx}{X^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{4aX^2} + \frac{7}{16a^2X}\right)\sqrt{x} + \frac{21}{32a^2}\int\frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{x\,dx\,.\sqrt{x}}{X} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{X\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx \cdot \sqrt{x}}{X^2} = \frac{x\sqrt{x}}{2aX} + \frac{1}{4a}\int \frac{dx \cdot \sqrt{x}}{X},$$

$$\int \frac{x\,dx \cdot \sqrt{x}}{X^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2bX} + \frac{1}{4b}\int \frac{dx}{X\sqrt{x}}.$$

III. $X = ax + bx^2.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{\sqrt{X} + x\sqrt{b}}{\sqrt{X} - x\sqrt{b}}, \text{ wenn } b \text{ positiv},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-b}} \text{ arc. tang } \frac{x\sqrt{-b}}{\sqrt{X}}, \text{ wenn } b \text{ negativ};$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(2bx + a)}{a^2\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = -\left(\frac{1}{3X} - \text{[illegible]}\right)\frac{2(a + 2bx)}{a^2\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{b} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\text{[illegible]} - \text{[illegible]}\right)\sqrt{X} + \frac{3a^2}{8b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\text{[illegible]} - \frac{5ax}{12b^2} + \frac{5a^2}{8b^3}\right)\sqrt{X} - \frac{5a^3}{16b^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{\text{[illegible]}}{ax},$$

$$\text{[illegible]} = -\left(\frac{1}{3ax^2} - \frac{2b}{3a^2x}\right)2\sqrt{X},$$

$$\text{[illegible]} = -\left(\frac{1}{5ax^3} - \frac{4b}{15a^2x^2} + \frac{8b^2}{15a^3x}\right)2\sqrt{X},$$

$$\text{[illegible]} = -\frac{2(a + 2bx)}{a^2\sqrt{X}},$$

$$\text{[illegible]} = \frac{2x}{a\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2x}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{xX^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3ax\sqrt{X}} - \frac{4b}{3a}\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{1}{5ax^2} - \frac{2b}{5a^2x}\right)\frac{2}{\sqrt{X}} + \frac{8b^2}{5a^2}\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int dx\sqrt{X} = \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4b}\right)\sqrt{X} - \frac{a^2}{8b}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x\,dx\sqrt{X} = \frac{X\sqrt{X}}{3b} - \frac{a}{2b}\int dx\sqrt{X},$$

$$\int x^2\,dx\sqrt{X} = \left(\frac{x}{4b} - \frac{5a}{24b^2}\right)X\sqrt{X} + \frac{5a^2}{16b^2}\int dx\sqrt{X},$$

$$\int\frac{dx\sqrt{X}}{x} = \sqrt{X} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx\sqrt{X}}{x^2} = -\frac{2\sqrt{X}}{x} + b\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int dx\,X^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{X}{b} - \frac{3a^2}{8b^2}\right)\frac{a + 2bx}{8}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{128b^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x\,dx\,X^{\frac{3}{2}} = \frac{X^2\sqrt{X}}{5b} - \frac{a}{2b}\int dx\,X^{\frac{3}{2}},$$

$$\int x^2\,dx\,X^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x}{6b} - \frac{7a}{60b^2}\right)X^2\sqrt{X} + \frac{7a^2}{24b^2}\int dx\,X^{\frac{3}{2}},$$

$$\int\frac{dx\,X^{\frac{3}{2}}}{x} = \frac{X\sqrt{X}}{3} + \frac{a}{2}\int dx\sqrt{X},$$

$$\int\frac{dx\,X^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{X\sqrt{X}}{2x} + \frac{3a}{4}\sqrt{X} + \frac{3a^2}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

IV. $X = a + bx + cx^2$ und $k = 4ac - b^2$.

$$\int\frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{k}}\,\text{arc. tang.}\frac{2cx + b}{\sqrt{k}}, \text{ wenn } k \text{ positiv},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-k}}\log.\frac{2cx + b - \sqrt{-k}}{2cx + b + \sqrt{-k}}, \text{ wenn } k \text{ negativ};$$

$$\int\frac{dx}{X^2} = \frac{2cx + b}{kX} + \frac{2c}{k}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{2kX^2} + \frac{3c}{k^2X}\right)(b + 2cx) + \frac{6c^2}{k^2}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2c}\log. X - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\log. X - \left(\frac{a}{c} - \frac{b^2}{2c^2}\right)\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2cX} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^2},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{X^2} = -\frac{x}{cX} + \frac{a}{c}\int\frac{dx}{X^2},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^3} = -\frac{1}{4cX^2} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^3}.$$

$$\int\frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a}\log.\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{2a^2}\log.\frac{x^2}{X} - \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\right)\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2aX} + \frac{1}{2a^2}\log.\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^2} - \frac{b}{2a^2}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log.[b + 2cx + 2c^{\frac{1}{2}}\sqrt{X}],$$ wenn c positiv ist,

$$= -\frac{1}{\sqrt{-c}}\,\text{arc. sin.}\frac{b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}},$$ wenn c negativ ist,

$$[illegible] = \frac{(b + 2cx)}{k\,X},$$

$$\int\frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = 2\left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right)\frac{(b + 2cx)}{\sqrt{X}},$$

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{(b + 2cx)\sqrt{X}}{4c} + \frac{k}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int X^{\frac{3}{2}}dx = \left(\frac{X}{8c} + \frac{3k}{64c^2}\right)(b + 2cx)\sqrt{X} + \frac{3k^2}{128c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{c} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log.\frac{2a + bx - 2a^{\frac{1}{2}}.\sqrt{X}}{x},$$ wenn a positiv ist,

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\,\text{arc. tang.}\frac{2a + bx}{2\sqrt{-a}.\sqrt{X}},$$ wenn a negativ ist,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\left(\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(b + 2cx)}{k\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(2a + bx)}{k\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{x^2dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(4ac - 2b^2)x - 2ab}{ck.\sqrt{X}} + \frac{1}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{xX^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a\sqrt{X}} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx}{x^2 X^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{1}{ax}+\frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \left(\frac{2c}{a}-\frac{3b^2}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}},$$

$$\int x\,dx\,.\,\sqrt{X} = \frac{X\sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int dx\sqrt{X},$$

$$\int x^2\,dx\,.\,\sqrt{X} = \left(\frac{x}{4c}-\frac{5b}{24c^2}\right)X\sqrt{X} - \left(\frac{a}{4c}-\frac{5b^2}{16c^2}\right)\int dx\sqrt{X},$$

$$\int\frac{dx\sqrt{X}}{x} = \sqrt{X} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int\frac{dx\sqrt{X}}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} + c\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x\,dx\,.\,X^{\frac{3}{2}} = \frac{X^2\sqrt{X}}{5c} - \frac{b}{2c}\int dx\,.\,X^{\frac{3}{2}},$$

$$\int\frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x} = \left(a+\frac{X}{3}\right)\sqrt{X} + a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} + \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int dx\,.\,\sqrt{X},$$

$$\int\frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x^2} = -\frac{X^2\sqrt{X}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int\frac{dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}}{x} + \frac{4c}{a}\int dx\,.\,X^{\frac{3}{2}}.$$

V. Produkte binomischer Faktoren.

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\log.\frac{x+a}{x+b},$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left[b\log.(x+b) - a\log.(x+a)\right],$$

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)(x+b)} + \frac{1}{(b-a)^2}\log.\frac{x+a}{x+b},$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)^2} = -\frac{b}{(b-a)(x+b)} - \frac{a}{(b-a)^2}\log.\frac{x+a}{x+b},$$

$$\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = -\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right] - \frac{2}{(b-a)^3}\log.\frac{x+a}{x+b},$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}\right] + \frac{a+b}{(b-a)^3}\log.\frac{x+a}{x+b},$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{1}{(b-a)(c-a)} \log.(x+a),$$
$$+ \frac{1}{(a-b)(c-b)} \log.(x+b),$$
$$+ \frac{1}{(a-c)(b-c)} \log.(x+c),$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{a}{(b-a)(c-b)} \log.(x+a),$$
$$- \frac{b}{(a-b)(c-b)} \log.(x+b),$$
$$- \frac{c}{(a-c)(b-c)} \log.(x+c),$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x^2+b)} = \frac{1}{a^2+b} \left[\log.\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b}} + a\int\frac{dx}{x^2+b}\right],$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+a)(x^2+b)} = \frac{1}{a^2+b} \left[a \log.\frac{\sqrt{x^2+b}}{x+a} + a\int\frac{dx}{x^2+b}\right],$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{b-a} \left[\int\frac{dx}{x^2+a} - \int\frac{dx}{x^2+b}\right],$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{2(b-a)} \log.\frac{x^2+a}{x^2+b},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{a-b} \left[a\int\frac{dx}{x^2+a} - b\int\frac{dx}{x^2+b}\right],$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a)(x+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^2} \left[\frac{a-b^2}{2} \log.\frac{(b+x)^2}{x+a}\right.$$
$$\left. + 2ab\int\frac{dx}{x^2+a} + \frac{b}{(a+b^2)(x+b)}\right],$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)(x+c)} = \frac{1}{c^2-ac+b} \left[\tfrac{1}{2} \log.\frac{(x+c)^2}{x^2+ax+b}\right.$$
$$\left. + (c-\tfrac{1}{2}a)\int\frac{dx}{x^2+ax+b}\right],$$

$$\int \frac{dx}{(a'+b'x)\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{b'k}} \text{ arc. tang. } \sqrt{\frac{b'(a+bx)}{k}},$$

wenn b' und $k = a'b - ab'$ gleiche Zeichen haben,

$$= \frac{1}{\sqrt{-b'k}} \log. \frac{a'b - 2ab' - bb'x + 2\sqrt{-b'k}.\sqrt{a+bx}}{a'+b'x}$$

wenn b' und $k = a'b - ab'$ verschiedene Zeichen haben,

$$\int \frac{dx}{(a'+b'x)^2\sqrt{a+bx}} = \frac{\sqrt{a+bx}}{k(a'+b'x)} + \frac{b}{2k}\int\frac{dx}{(a'+b'x)\sqrt{a+bx}},$$

wo $k = a'b - ab'$ ist,

$$\int \frac{x\,dx}{(a' + b'x)\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{b'}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} - \frac{a'}{b'}\int \frac{dx}{(a' + b'x)\sqrt{a + bx}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a' + b'x)^2\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{b'}\int \frac{dx}{(a' + b'x)\sqrt{a + bx}} - \frac{a'}{b'}\int \frac{dx}{(a' + b'x)^2\sqrt{a + bx}},$$

$$\int \frac{dx}{(a' + b'x^2)\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a'(a'b - ab')}} \log. \frac{a'\sqrt{a + bx^2} + x\sqrt{a'(a'b - ab')}}{\sqrt{a' + b'x^2}},$$

wenn $a'(a'b - ab')$ positiv ist,

$$= \frac{1}{\sqrt{a'(ab' - a'b)}} \text{ arc. tang. } \frac{x\sqrt{a'(ab' - a'b)}}{a'\sqrt{a + bx^2}},$$

wenn $a'(a'b - ab')$ negativ ist.

VI. Ausdrücke, welche die Größen $a + bx^3$ und $a + bx^4$ u. s. enthalten.

$$\int \frac{dx}{a + bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left[\tfrac{1}{2}\log. \frac{(x + k)^2}{x^2 - kx + k^2} + 3^{\frac{1}{2}} \text{. arc. tang. } \frac{x\sqrt{3}}{2k - x}\right],$$

wo $k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,

$$\int \frac{x\,dx}{a + bx^3} = -\frac{1}{3bk}\left[\tfrac{1}{2}\log. \frac{(x + k)^2}{x^2 - kx + k^2} - 3^{\frac{1}{2}} \text{. arc. tang. } \frac{x\sqrt{3}}{2k - x}\right],$$

wo $k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,

$$\int \frac{x^2\,dx}{P} = \frac{1}{3b}\log. P, \quad \text{wo } P = a + bx^3,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{P} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{P},$$

$$\int \frac{dx}{P^2} = \frac{x}{3aP} + \frac{2}{3a}\int \frac{dx}{P},$$

$$\int \frac{x\,dx}{P^2} = \frac{x^2}{3aX} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\,dx}{P},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{P^2} = -\frac{1}{3bP},$$

$$\int\frac{dx}{P^3} = \left(\frac{5b x^4}{18a^3} + \frac{4x}{9a}\right)\frac{1}{P^2} + \frac{5}{9a^2}\int\frac{dx}{P},$$

$$\int\frac{dx}{xP} = \frac{1}{a}\log. x - \frac{1}{3a}\log. P,$$

$$\int\frac{dx}{x^2 P} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{x\,dx}{P},$$

$$\int\frac{dx}{xP^2} = \frac{1}{3aP} - \frac{1}{3a^2}\log.\frac{P}{x^3}.$$

$$\int\frac{dx}{Q} = \frac{1}{4bk^3\sqrt{2}}\left[\log.\frac{x^2+kx\sqrt{2}+k^2}{x^2-kx\sqrt{2}+k^2} + 2\,\text{arc. tang.}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2-x^2}\right],$$

wo $Q = a + bx^4$ und $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$,

$$\int\frac{x\,dx}{Q} = \frac{1}{2bk^2}\,\text{arc. tang.}\, x^2\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \text{wo } k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{Q} = \frac{1}{4bk\sqrt{2}}\left[2\,\text{arc. tang.}\frac{kx\sqrt{2}}{k^2-x^2} - \log.\frac{x^2+kx\sqrt{2}+k^2}{x^2-kx\sqrt{2}+k^2}\right],$$

wo $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$,

$$\int\frac{x^3\,dx}{Q} = \frac{1}{4b}\log. Q,$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{Q} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{Q},$$

$$\int\frac{dx}{Q} = -\frac{1}{4bk^3}\left[\log.\frac{x+k}{x-k} + 2\,\text{arc. tang.}\frac{x}{k}\right],$$

wo $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$,

$$\int\frac{x\,dx}{Q} = -\frac{1}{4bk^2}\log.\frac{x^2+k^2}{x^2-k^2},\quad \text{wo } k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{Q} = -\frac{1}{4bk}\left[\log.\frac{x+k}{x-k} - 2\,\text{arc. tang.}\frac{x}{k}\right],$$

wo $k = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$,

$$\int\frac{dx}{Q^2} = \frac{x}{4aQ} + \frac{3}{4a}\int\frac{dx}{Q},$$

$$\int\frac{x\,dx}{Q^2} = \frac{x^2}{4aQ} + \frac{1}{2a}\int\frac{x\,dx}{Q},$$

$$\int\frac{dx}{xQ} = \frac{1}{a}\log. x - \frac{1}{4a}\log. Q.$$

VII. Trigonometrische Differentialien.

$$\int dx \sin.^m x \cos.^n x$$

$$= \frac{\sin.^{m+1} x \cos.^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int dx \sin.^{m+2} x \cos.^{n-2} x,$$

$$= \frac{\sin.^{m+1} x \cos.^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx \sin.^m x \cos.^{n-2} x,$$

$$= \frac{\sin.^{m+1} x \cos.^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int dx \sin.^{m+2} x \cos.^n x,$$

$$= -\frac{\sin.^{m+1} x \cos.^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int dx \sin.^m x \cos.^{n+2} x,$$

$$= -\frac{\sin.^{m-1} x \cos.^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int dx \sin.^{m-2} x \cos.^{n+2} x,$$

$$= -\frac{\sin.^{m-1} x \cos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dx \sin.^{m-2} x \cos.^n x.$$

wo m und n jede willkürliche Zahl bezeichnet.

$$\int dx \sin. x = -\cos. x,$$
$$\int dx \sin.^2 x = -\tfrac{1}{4} \sin. 2x + \tfrac{1}{2} x,$$
$$\int dx \sin.^3 x = \tfrac{1}{12} \cos. 3x - \tfrac{3}{4} \cos. x,$$
$$\int dx \sin.^4 x = \tfrac{1}{32} \sin. 3x - \tfrac{1}{4} \sin. 2x + \tfrac{3}{8} x.$$

$$\int dx \cos. x = \sin. x,$$
$$\int dx \cos.^2 x = \tfrac{1}{4} \sin. 2x + \tfrac{1}{2} x,$$
$$\int dx \cos.^3 x = \tfrac{1}{12} \sin. 3x + \tfrac{3}{4} \sin. x,$$
$$\int dx \cos.^4 x = \tfrac{1}{32} \sin. 4x + \tfrac{1}{4} \sin. 2x + \tfrac{3}{8} x.$$

$$\int dx \sin.^2 x \cos. x = \tfrac{1}{3} \sin.^3 x,$$
$$\int dx \sin.^2 x \cos.^2 x = \tfrac{1}{8} (x - \tfrac{1}{4} \sin. 4x),$$
$$\int dx \sin.^2 x \cos.^3 x = (\tfrac{1}{5} \cos.^2 x + \tfrac{2}{15}) \sin.^3 x,$$
$$\int dx \sin.^3 x \cos.^2 x = (\tfrac{1}{5} \sin.^4 x - \tfrac{1}{15} \sin.^2 x - \tfrac{2}{15}) \cos. x,$$
$$\int dx \sin.^3 x \cos.^3 x = (\tfrac{1}{6} \cos.^2 x + \tfrac{1}{12}) \sin.^4 x,$$
$$\int dx \sin.^3 x \cos. x = \tfrac{1}{8} (\tfrac{1}{4} \cos. 4x - \cos. 2x),$$
$$\int dx \sin.^4 x \cos. x = \tfrac{1}{16} (\tfrac{1}{5} \sin. 5x - \sin. 3x + 2 \sin. x),$$
$$\int dx \sin.^5 x \cos. x = -\tfrac{1}{32} (\tfrac{1}{6} \cos. 6x - \cos. 4x + \tfrac{5}{2} \cos. 2x).$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \tang. \frac{x}{2},$$
$$\int \frac{dx}{\sin.^2 x} = -\cotang. x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin.^3 x} = -\frac{\cos. x}{2 \sin.^2 x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin. x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos. x} = \log. \text{tang.} \frac{90 + x}{2},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang.} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos.^3 x} = \frac{\sin. x}{2 \cos.^2 x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos. x},$$

$$\int \frac{dx \sin. x}{\cos. x} = - \log. \cos. x,$$

$$\int \frac{dx \sin.^2 x}{\cos. x} = - \sin. x + \int \frac{dx}{\cos. x},$$

$$\int \frac{dx \sin.^3 x}{\cos. x} = - \tfrac{1}{2} \sin.^2 x + \int \frac{dx \sin. x}{\cos. x},$$

$$\int \frac{dx \cos. x}{\sin x} = \log. \sin. x,$$

$$\int \frac{dx \cos.^2 x}{\sin. x} = \cos. x + \int \frac{dx}{\sin. x},$$

$$\int \frac{dx \cos.^3 x}{\sin. x} = \tfrac{1}{2} \cos.^2 x + \int \frac{dx \cos. x}{\sin. x},$$

$$\int \frac{dx \sin. x}{\cos.^2 x} = \frac{1}{\cos. x},$$

$$\int \frac{dx \sin.^2 x}{\cos.^2 x} = \text{tang.} x - x,$$

$$\int \frac{dx \sin.^3 x}{\cos.^2 x} = \cos. x + \frac{1}{\cos. x},$$

$$\int \frac{dx \sin. x}{\cos.^3 x} = \frac{1}{2 \cos.^2 x},$$

$$\int \frac{dx \sin.^2 x}{\cos.^3 x} = \frac{\sin. x}{2 \cos.^2 x} - \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos. x},$$

$$\int \frac{dx \sin.^3 x}{\cos.^3 x} = \frac{1}{2 \cos.^2 x} + \log. \cos. x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = \log. \text{tang.} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos.^2 x} = \frac{1}{\cos. x} + \int \frac{dx}{\sin. x},$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos.^3 x} = \frac{1}{2 \cos.^2 x} + \log. \text{tang.} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin.^2 x \cos.^2 x} = - 2 \text{cotang.} 2 x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin.^3 x \cos.^3 x} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos.^2 x} - 3 \right) \frac{1}{\sin. x} + \tfrac{3}{2} \int \frac{dx}{\cos. x},$$

$$\int\frac{dx}{\sin.^3x\ \cos.^3x}=-\frac{2\cos.2x}{\sin.^2 2x}+\ldots$$

$$+\frac{2}{(m+1)^2}\Big),$$

$$\int x\,dx\,\sin.x=-x\cos.x+\sin.x$$

$$\int x\,dx\,\cos.x=x\sin.x+\cos.x,$$

$$\int x^2\,dx\,\sin.x=-x^2\cos.x+2x\sin.x\ldots$$

$$\int x^m dx\sin.x=-x^m\cos.x+m\,x^{m-1}\sin.x+\ldots$$
$$-m(m-1)(m-2)x^{m-3}\sin.x,$$
$$-m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\ldots$$

$$\overline{3.2.1.a^x}$$

$$\int X\,dx\,.\,\text{arc.}\sin.x=\text{arc.}\sin x\,.\int X\,dx-\int\frac{dx\ldots}{\sqrt{\ldots}}$$

wo hier und im Folgenden X eine algebraische Funkt... zeichnet.

$$\int X\,dx\,.\,\text{arc.tang.}x=\text{arc.tang.}x\,.\int X\,dx-\int\frac{dx\int X\,dx}{1+x^2},$$

$$\int X\,dx\,.\,\text{arc.sec.}x=\text{arc.sec.}x\,.\int X\,dx-\int\frac{dx\int X\,dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$\int X\,dx\,.\,\text{arc.sin.vers.}x=\text{arc.sin.vers.}x\,.\int X\,dx-\int\frac{dx\int X\,dx}{\sqrt{2x-x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{a+b\cos.x}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{arc.tang.}\frac{\sin.x\,.\sqrt{a^2-b^2}}{a\cos.x+b},$$

wenn $a-b$ positiv ist,

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log.\frac{a\cos.x+b+\sin.x\,.\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos.x},$$

wenn $b-a$ positiv ist,

$$\int\frac{dx\sin.x}{a+b\cos.x}=\frac{1}{b}\log.\frac{a+b}{a+b\cos.x},$$

$$\int\frac{dx\cos.x}{a+b\cos.x}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+b\cos.x},$$

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2-b^2}\left[-\frac{b\sin.x}{a+b\cos.x}+a\int\frac{dx}{a+b\cos.x}\right],$$

$$\int\frac{dx\cos.x}{(a+b\cos.x)^2}=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin.x}{a+b\cos.x}-b\int\frac{dx}{a+b\cos.x}\right].$$

VIII. Logarithmische und exponentielle Differentialien.

$$\int X\,dx\,.\,\log.X' = \log.X'\,.\int X\,dx - \int\frac{dX'\,.\int X\,dx}{X'},$$

wo X und X′ algebraische Funktionen von x sind.

$$\int X\,dx\,.\,\log.x = \log.x\int X\,dx - \int\frac{dx\int X\,dx}{x},$$

$$\int x^m\,dx\,.\,\log.x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log.x - \frac{1}{m+1}\right),$$

$$\int(a+bx)^m\,dx\,.\,\log.x$$

$$= \frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)\,b}\log.x - \frac{1}{(m+1)\,b}\int\frac{dx\,(a+bx)^{m+1}}{x},$$

$$\int\frac{dx}{x}\log.x = \tfrac{1}{2}\log.^2 x,$$

$$\int\frac{dx}{a+bx}\log.x = \frac{1}{b}\log.x\,.\,\log.(a+bx) - \frac{1}{b}\int\frac{dx}{x}\log.(a+bx),$$

$$\int x^m\,dx\,\log.(a+bx) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log.(a+bx) - \frac{b}{m+1}\int\frac{x^{m+1}\,dx}{a+bx},$$

$$\int\frac{dx}{x}\log.(a+bx) = \log.a\,.\,\log.x + hx - \frac{h^2x^2}{2^2} + \frac{h^3x^3}{3^2} - \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}(\log.bx)^2 - \frac{1}{hx} + \frac{1}{2^2h^2x^2} - \frac{1}{3^2h^3x^3} + \ldots$$

wo $h = \frac{b}{a}$ ist,

$$\int x^m\,dx\,.\,\log.^n x$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[\log.^n x - \frac{n}{m+1}\log.^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log.^{n-2}x - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}\log.^{n-3}x + \ldots\right],$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{\log.^n x} = -\frac{x^{m-1}}{(n-1)\log.^{n-1}x} - \frac{(m+1)\,x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\log.^{n-2}x}$$

$$- \frac{(m+1)^2\,x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\log.^{n-3}x}$$

$$- \ldots + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}\int\frac{x^m\,dx}{\log.x},$$

$$\int\frac{dx}{x}\log.^n x = \frac{1}{n+1}\log.^{n+1}x,$$

$$\int x^m\,dx\,\log.x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log.x - \frac{1}{m+1}\right),$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{\log. x} = \int \frac{dy}{\log. y} \quad \text{für } y = x^{m+1},$$

$$\int x^m\,dx \log.^2 x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log.^2 x - \frac{2}{m+1}\log. x + \frac{2}{(m+1)^2}\right),$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{\log.^2 x} = -\frac{x^{m+1}}{\log. x} + \frac{m+1}{1}\int \frac{x^m\,dx}{\log. x}.$$

$$\int a^x \,.\, x^n\,dx = \frac{a^x \,.\, x^n}{\log. a} - \frac{n\,a^x \,.\, x^{n-1}}{\log.^2 a} + \frac{n(n-1)\,a^x x^{n-2}}{\log.^3 a}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)\,a^x x^{n-3}}{\log.^4 a} + \ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1\,.\,a^x}{\log^{n+1} a}$$

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{a^x \log. a}{(n-1)(n-2)\,x^{n-2}}$$
$$- \frac{a^x \log.^2 a}{(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-3}}$$
$$- \ldots - \frac{a^x \log.^{n-2} a}{(n-1)(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1\,.\,x}$$
$$+ \frac{\log.^{n-1} a}{(n-1)(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}\int \frac{a^x\,dx}{x},$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log. a},$$

$$\int a^x \,.\, x\,dx = \frac{a^x \,.\, x}{\log. a} - \frac{a^x}{\log.^2 a},$$

$$\int a^x \,.\, x^2\,dx = \frac{a^x \,.\, x^2}{\log. a} - \frac{2\,a^x \,.\, x}{\log.^2 a} + \frac{2\,a^x}{\log.^3 a},$$

$$\int a^x \,.\, x^3\,dx = \frac{a^x \,.\, x^3}{\log. a} - \frac{3\,a^x \,.\, x^2}{\log.^2 a} + \frac{6\,a^x \,.\, x}{\log.^3 a} - \frac{6\,a^x}{\log.^4 a},$$

$$\int \frac{a^x\,dx}{x} = \log. x + x \log. a + \frac{(x \log. a)^2}{1\,.\,2^2} + \frac{(x \log. a)^3}{1\,.\,2\,.\,3^2}$$
$$+ \frac{(x \log. a)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4^2} + \ldots$$

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^2} = -\frac{a^x}{x} + \log. a \,.\, \int \frac{a^x\,dx}{x},$$

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^3} = -\frac{a^x}{2\,x^2} - \frac{a^x}{2\,x}\log. a + \tfrac{1}{2}\log.^2 a \,.\, \int \frac{a^x\,dx}{x},$$

$$\int e^{ax}\,dx \sin. x = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \sin. x - \cos. x),$$

wo log. nat. $e = 1$,

$$\int e^{ax}\,dx \sin.^2 x = \frac{e^{ax} \sin. x}{a^2+4}(a \sin. x - 2 \cos. x) + \frac{2\,e^{ax}}{a(a^2+4)},$$

$$\int e^{ax}\,dx \cos. x = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a \cos. x + \sin. x),$$

$$\int e^{ax} dx \cos.^2 x = \frac{e^{ax}}{a^2+4} \cos. x \, (a \cos. x + 2 \sin. x)$$
$$+ \frac{2 e^{ax}}{a(a^2+4)},$$

$$\int e^{ax} dx \sin. bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin. bx - b \cos. bx),$$

$$\int e^{ax} dx \cos. bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos. bx + b \sin. bx).$$

Verzeichniß

der

vorzüglichsten Schriften über höhere Analysis.

d'Alembert, opuscules mathématiques. 8 Vol. Paris 1761.

Apollonius von Pergen, über Kegelschnitte; übersetzt von Diesterweg. Berlin 1823.

Arbogast, Calcul des dérivations. Strasburg. 1800.

— Mémoire sur les fonctions arbitraires. Petersburg. 1791. 4.

Archimedis, opera omnia. gr. et lat. Basel 1544 und Oxford 1792. Fol.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, von Hindenburg. Leipzig 1794.

Barrow (Isaac), lectiones geometricae. Lond. 1764. 4.

— — Opera omnia. 4 Vol. Fol. Lond. 1675.

Bernoulli (Joh.), opera omnia. 4 Vol. 4. Lausanne 1742.

— *(Jac.)*, opera omnia. 2 Vol. 4. Genf. 1744.

— *(Daniel)*, exercitationes mathematicae. Venet. 1724. 4.

Bézout, Cours de mathématiques. 6 Vol. Paris 1782 und 1799. Deutsch von Kaußler. Stuttgart 1820.

— Théorie des équations. Paris 1779. 4.

Biot, Essai de géom. analytique. Paris 1813. Deutsch von Ahrens. Nürnberg 1817.

Bohnenberger, Anfangsgründe der höhern Analysis. Tübingen 1811.

Bossut, histoire des mathématiques. II. Edit. Paris 1810. 2 Vol. Deutsch von Reimer. Hamburg 1804.

— Cours de mathématiques. Paris 1800.

— Traité de calcul diff. et intégral. Paris 1798.

Boucharlat, Differential- und Integralrechnung. Deutsch übersetzt. Mainz 1823.

Brandes, Vorbereitungen zur höhern Analysis. Leipzig 1820.

— Lehrbuch der höhern Geometrie. Leipzig 1827. 2 Bände. 4.

Bugge, Lehrbuch der gesammten Mathematik. Aus dem Dänischen von Tobiesen. Altona 1816. III. Theile.
Burg, analytische Geometrie. Wien 1824.
— Höhere Mathematik. 3 Bände. Wien 1832.
Cagnoli, trigonometria plana e sferica. II. Edit. Bologna 1804. 4.
— Sezioni coniche. Modena 1802. 4.
Carnot, oeuvres mathématiques. Strasburg. 1797.
— Géométrie de position. Paris 1803. Deutsch von Schuhmacher. Altona 1808.
— Réflexions sur la métaphysique de calcul infinitésimal. Paris 1796. Deutsch von Hauff. Frankfurt 1800.
Cauchy, Cours d'Analyse. Paris 1821.
— Calcul différentiel. Paris 1829.
— Application du Calcul infinit. à la géométrie. Paris 1826.
— Exercices de Mathématiques. 26 Lieferungen. Paris 1826.
Clairaut, élémens de géométrie. Paris 1716, 1753. Deutsch von Bierling, 1753 und neue Auflage. Homburg 1773.
— Elémens d'Algèbre. Paris 1753. Deutsch von Mylius; neue Auflage von Tempelhoff. Berlin 1778.
— Recherches sur les courbes à double courbure. Paris 1731.
Condorcet, calcul intégral. Paris 1765.
Cotes, harmonia mensurarum, edidit *Robert Smith*. Cambridge 1722.
Cousin, leçons de calcul diff. et intégral. Paris 1796.
Cramer, introduction à l'analyse des lignes courbes. Genève 1750.
Crelle, Versuch einer Theorie der analytischen Funktionen.
— Journal für Mathematik.
Descartes, oeuvres de. 15 Vol. Paris 1723.
Dirksen, Variationsrechnung. Berlin 1823.
Drobisch, Auflösungen der höhern numerischen Gleichungen. Leipzig 1834.
Euler, Elémens d'Algèbre, avec des additions par *Lagrange*. Deutsch von Grüson und Kausler. Berlin 1796.
— Introductio in analysin infinitorum. 2 Vol. 4. Lausanne 1748. Deutsch von Michelsen. Berlin 1788.
— Institutiones calculi differentialis. 2 Vol. Petersb. 1755. 4. Deutsch von Michelsen. Berlin 1790.
— Institutiones calculi integralis. 4 Vol. Petersb. 1792. 4. Deutsch von Salomon. Wien 1833.
— Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentes. Genev. 1744. 4.
— Opuscula analytica et opuscula varii argumenti. 3 Vol. Berlin 1746. 4.
Ettingshausen, Vorlesungen über höhere Mathematik. Zwey Bände. Wien 1827.
— Combinatorische Analysis. Wien 1826.

Fagnano, produzioni matematiche. 2 Vol. Pesaro 1750.
Fontaine, traité du calcul diff. et intégral. Paris 1770.
Gauſs, disquisitiones arithmeticae. Leipzig. 1801.
— Disquisitiones circa superficies curvas. Goetting. 1828.
— Methodus nova integralium valores per approx. inveniendi. Goetting. 1816.
— Theoria combinationis observationum, cum supplemento. Goetting. 1823 et 28.
— Theoria attractionis corporum. Goetting. 1818.
Gergonne, Annales de Mathématiques. Paris 1810.
Gregorii (Jac.), exercitationes geometricae. Lond. 1668.
— — Geometriae pars universalis. Patav. 1668.
— — Vera circuli et hyperbolae quadratura. Patav. 1668.
Gregorii a S° *Vicentio*, opus Geometricum. Antwerp. 1647. Fol.
Grunert, mathematische Abhandlungen. Altona 1822.
— Sphäroidische Trigonometrie.
Heinrich, de sectionibus conicis. Ingolstadt 1797.
Hestermann, trigonometria sphaerica. Wien 1820.
Hindenburg, novi systematis permutationum etc. primae lineae. Lipsiae 1781.
— Sammlung combinatorischer Abhandlungen. 2 Bände. Leipzig 1796.
Hirsch (Meier), Integraltafeln. Berlin 1810. 4.
— — Sammlung von Beyspielen aus der Algebra und Geometrie. Berlin 1805, 1809, 1816.
De *l'Hospital*, traité analytique de sections coniques. Paris 1740.
— Analyse des infin. petits. Paris 1784.
Hugenii, opera omnia, cura *Jacobi Gravesande*. 4 Vol. 4. Lugd. Batav. 1724.
l'Huilier, principiorum calculi diff. et integ. expositio. Tübing. 1795. Französisch. Berlin 1786.
Kästner, mathematische Anfangsgründe. 4 Bände. Göttingen.
— Geschichte der Mathematik. 4 Bände. Göttingen 1796.
Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 8 Bände. Greifswalde. Dritte Auflage von Mollweide. Leipzig 1812. 8.
Klügel, mathematisches Wörterbuch; mit Zusätzen von Mollweide u. A. 6 Bände. 8.
Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik. Königsberg 1811.
Krause, Mathematik; herausgegeben von Schröder. München 1835. 4.
Lacroix, cours de mathématiques. 8 Vol. Paris 1798. 8.
— Traité du calcul diff. et intégral. 3 Vol. 4. Paris 1797.
Lagrange, théorie des fonctions analytiques. Paris 1797. Deutsch von Crelle.

Lagrange, leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806. Deutsch von Crelle.

— Résolution des équations numériques. Paris 1808.

Lambert, Beyträge zum Gebrauch der Mathematik. 3 Bände. Berlin 1765—72.

Landen, mathematical memoirs. Lond. 1780.

— Mathematical lucubrations. Lond. 1755.

— The residual analysis. Lond. 1758.

Langsdorf, Einleitung in das Studium der Mathematik. Mannheim 1814.

Laplace, théorie analytique des probabilités. Paris. 4.

— Traité de mécanique céleste. 5 Vol. 4. Paris 1808. Die zwey ersten Bände deutsch mit Noten, von Bourckhardt.

Legendre, exercices du calcul intégral. 3 Vol. 4. Paris 1816.

— Elémens de Géomètrie. Paris 1830.

— Theorie der Zahlen. Übersetzt von Breizenach. Frankfurt 1829.

Leibnitz, opera omnia, collegit *Dutens*. 6 Vol. 4. Genev. 1768 und Berlin. 1789.

Leibnitii et *Bernoulli*, commercium epistolicum. Genev. 1745. 4.

Maclaurin, geometria organica. Lond. 1720. 4.

— Treatise of fluxions. 2 Vol. Edinburg. 1742. 4.

— Treatise of Algebra. Lond. 1748. Französisch. Paris 1752.

Magazin der reinen und angewandten Mathematik. Herausgegeben von Hindenburg und Bernoulli. Leipzig 1786.

Mayer (J. T.), vollständiger Lehrbegriff der höhern Analysis. 2 Theile. Göttingen 1817.

— — Praktische Geometrie. 5 Bände. Göttingen 1802.

Memoires der vorzüglichsten Akademien, in Paris, London, Petersburg, Göttingen, Berlin u. s.

Memorie di matematica e fisica della società italiana. Verona 1760.

Moebius, der baricentrische Calcul. Leipzig 1827.

Moivre, miscellanea analytica. Lond. 1730. 4.

— Doctrine of chances and annuities of lives. London. 1718 und 1750.

Monge, feuilles d'Analyse. Paris 1801. Fol.

— Application de l'Analyse à la géométrie. Paris 1807.

Montucla, histoire des Mathématiques. II. Edit. 4 Vol. 4. Paris 1770.

Müller, mathematische Bibliothek. Nürnberg 1820 und Repertorium der mathematischen Literatur. Augsburg 1823.

Murhard, bibliotheca mathematica. Desselben Litteratur der mathematischen Wissenschaften. 5 Bände. Leipzig 1797.

Newtoni, opera omnia, edidit *Samuel Horsley*. 5 Vol. 4. London. 1779—85.

Opuscoli, matematici e fisici di diversi autori. Milano 1832.
Oriani, trigonometria sphaeroidica. Bologna 1806.
Ozanam, cours de Mathématiques. 7 Vol. Paris 1693.
— Récréations mathématiques. 4 Vol. Paris 1724 und 1778.
Paoli, opuscula analytica. Livorno 1780.
— Elementi d'algebra. 2 Vol. Pisa. 1794.
Pfaff, disquisitiones analyticae. Helmstädt 1797.
Plücker, analytische Geometrie. Berlin 1835.
Reuss, repertorium commentationum a societatibus literariis editarum. 12 Vol. 4. Goetting. 1801.
Rogg, Handbuch der mathematischen Literatur. Tübingen 1830.
Scheibel, Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß. Berlin 1769.
Segner, cursus mathematicus. 5 Vol. Halae 1756.
— Elementa analyseos infinitorum. 2 Vol. Halae 1761.
— Elementa calculi integralis. 2 Vol. Halae 1768.
Simpson, treatise of algebra. London 1745.
— Exercices. London 1752.
— Miscellaneous tracts. Lond. 1757.
— Opera reliqua. Glasgow. 1776.
Soldner, théorie d'une nouvelle fonction. München 1809.
Sounderson, elements of algebra. 2 Vol. Cambridge 1740. Deutsch von Grüson. Halle 1805.
Stevin, oeuvres mathématiques. Leiden 1637. Fol.
Taylor, methodus incrementorum. London 1715.
Tempelhoff, vollständige Anleitung zur Algebra. Berlin 1773.
— Analysis des Unendlichen. Berlin 1769.
Umpfenbach, analytische Geometrie. Mainz 1823.
Unger, Übungen für Mathematik. Leipzig 1828.
Vega, Vorlesungen über Mathematik. 5 Bände. Wien 1803.
Wallis, arithmetica infinitorum. Oxford 1655. Fol.
— Treatise of algebra. London 1685. Fol.
— Opera mathematica. 3 Vol. Fol. Oxford.
Waring, meditationes algebraicae. Cambridge 1782.
— Meditationes analyticae. Cambridge 1785.
Weidler, bibliographia astronomica. Wittenberg. 1755.
Wolf, elementa matheseos universae. III. Edit. 5 Vol. 4. Halae 1750.
— Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. 6. Aufl. 4 Bände. Halle 1775.

Lagrange, leçons sur l
Crelle.
— Résolution
Lambert, Beyträge
1765—72.
Landen, mathematic
— Mathemati
— The resid
Langsdorf, Einle
Laplace, théorie a
— Traité d
zwey ersten B
Legendre, exercic
— Eléme
— Theor
1829.
Leibnitz, opera
Berlin. 17
Leibnitii et *Ber*
Maclaurin, ge
— T
— T
Magazin f
Hinde
Mayer (J.
Göttin
—
Memoire
Gött
Memorie
Moebiu
Moivre,
—
17
Monge,
—
Montu
Müll
Murl
Nev

Fig. 8.

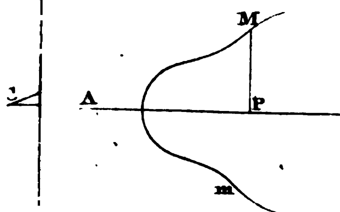


Fig. 7.

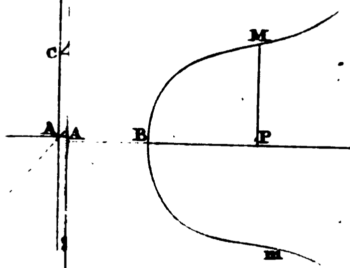
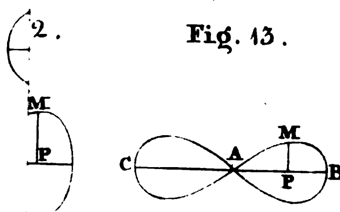
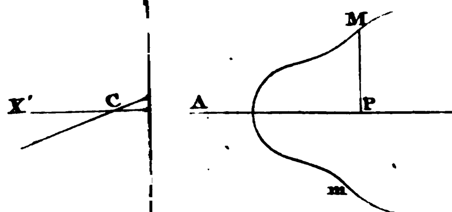
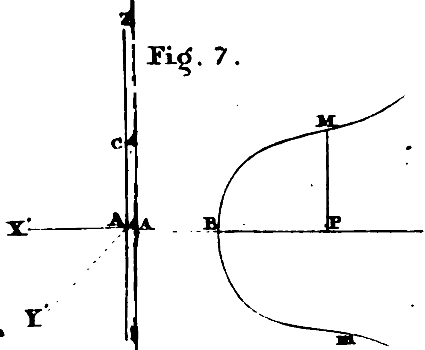


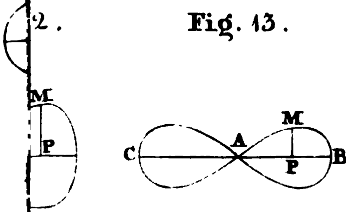
Fig. 13.



M. Aigner sc







M Aigner sc

Fig





Fig. 14.

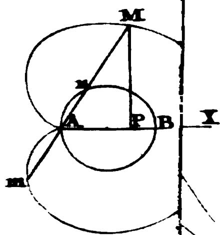


Fig. 21.

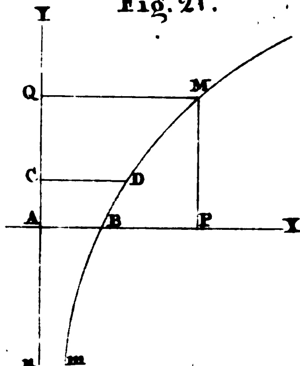


Fig. 22.

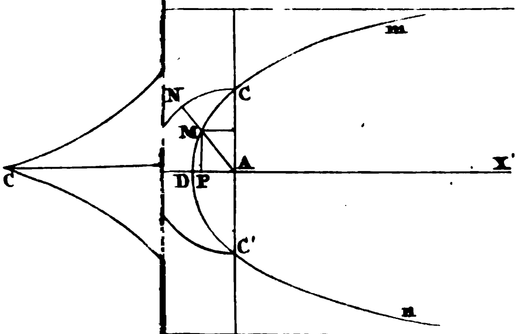
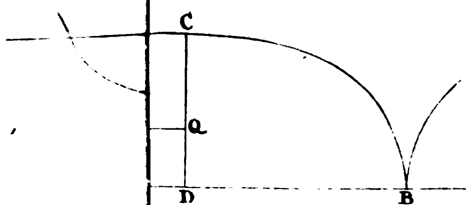
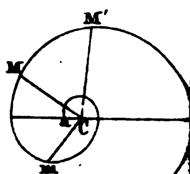
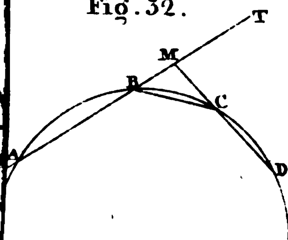


Fig. 26.



M. Aigner sc.


Fig. 28.
M'
M
C
m


Fig. 32.
T
M
B
C
A
D

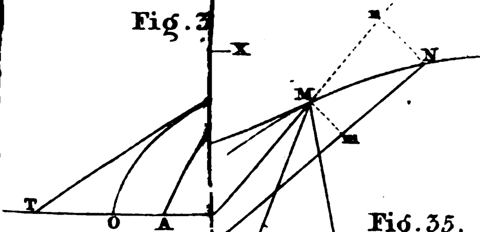
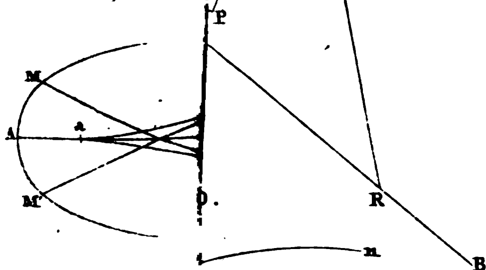

X
m
N
M
m
T
O
A

Fig. 35.


Fig. 37.
P
M
A
a
M'
R
B

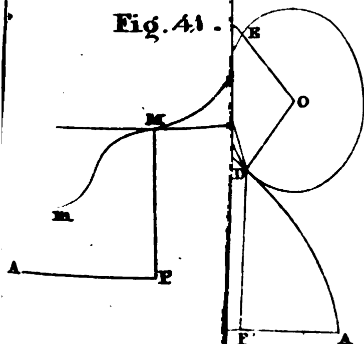

Fig. 41.
E
O
M
D
m
A
P
F
A







Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 54.

M. Aigner sc.

